Lehrbuch

der

Geometrie

mit Einschluß

der Coordinaten-Theorie und der Kegelschnitte.

Zum Gebrauch bei den Vorträgen an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Dr. K. H. M. Aschenborn,

Professor am Berliner Cadettenhause, Lehrer und Mitglied der Studien-Commission der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule.

Erster Abschnitt.

Die ebene Geometrie.

Berlin, 1862.

Verlag der Königlichen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei (R. Decker).

Lehrbuch

der

ebenen Geometrie

mit Einschluß

der algebraischen Geometrie und der ebenen Trigonometrie.

Zum Gebrauch bei den Vorträgen an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Dr. K. H. M. Aschenborn,

Professor am Berliner Cadettenhause, Lehrer und Mitglied der Studien-Commission der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule.

Berlin 1862.

Verlag der Königlichen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei
(R. Decker).

Vorrede.

Das vorliegende, zum Gebrauch bei den Vorträgen an der Königlichen vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule bestimmte Lehrbuch der ebenen Geometrie schließt sich, zunächst in Bezug auf Zweck und Methode, an des Verfassers Lehrbuch der Arithmetik an und bildet selbst den ersten Abschnitt eines umfassenderen Lehrbuches der niederen Geometrie, dessen zweite Hälfte zum Theil schon gedruckt ist und in kurzer Zeit im Buchhandel erscheinen wird.

Indem der Verfasser im Allgemeinen auf die Vorrede zu seinem Lehrbuche der Arithmetik verweist, hebt er hier nur die Gründe hervor, welche ihn bestimmen mußten, in der Planimetrie von der gewöhnlichen Folge der Kapitel und Sätze abzuweichen. Die verhältnißmäßig sehr kurze Zeit, welche an der genannten Schule zum Vortrage der ebenen Geometrie gewährt ist, nöthigten den Verfasser — und geistig entwickelte, nicht unvorbereitete Zuhörer gestatteten es —, die Planimetrie auf möglichst wenig Kapitel zu vertheilen. Dem Lehrer sollte ein schneller Vortrag, dem Zuhörer der Ueberblick über das Gebiet der Planimetrie, das Verständniß des Zusammenhanges der einzelnen Theile und bei dem Studium späterer Abschnitte das Nachschlagen einzelner Sätze erleichtert werden.

Von den sechs Kapiteln, in welche die Planimetrie (im engeren Sinne) zerfällt, sind namentlich im dritten, fünften und sechsten verwandte Sätze zusammengefaßt, welche für Anfänger in Rücksicht auf die verschiedenen Stufen ihrer Entwickelung hätten getrennt werden müssen.

Die noch folgenden zwei Kapitel enthalten die algebraische Geometrie und die ebene Trigonometrie.

Mit dem erwähnten Lehrbuche der Arithmetik steht das vorliegende Werk aber auch im engen wissenschaftlichen Zusammenhange. Wenn einerseits von allen dort entwickelten Gesetzen hier voller Gebrauch gemacht, auch in den Fällen, wo der Leser unsicher sein konnte, auf jenes Buch verwiesen worden ist: so sind andrerseits die Grenzen desselben bei den Anwendungen der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis auf die Geometrie nirgends überschritten worden. Umgekehrt haben einzelne Lehren der Arithmetik durch die Geometrie ihre Erläuterung, Bestätigung oder Begründung gefunden; namentlich gilt dies von den Kreisfunctionen, deren Zusammenhang mit der Geometrie erst durch die Reihenentwickelung der Zahl π und der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ in §§. 205. und 229. vollständig begründet worden ist (vergl. Arithm. §. 216.).

Auf Uebungen und Anwendungen mußte der Verfasser um so mehr Gewicht legen, als die Leser, für welche das Buch zunächst bestimmt ist, praktische Zwecke mit dem Studium der Mathematik verbinden. Neben einzelnen geometrischen Sätzen und trigonometrischen Formeln, welche zur Uebung vorgelegt worden sind, und neben vielen Constructions-Aufgaben, unter denen wohl nur wenige unbekannt sein möchten, hat der Verfasser durch nahe an 400 neue, von ihm selbst gebildete Uebungs-Aufgaben das praktische Bedürfniß zu befriedigen gesucht.

Für Diejenigen, welche das Buch zur Vorbereitung auf das Portepeefähnrich-Examen in der Preußischen Armee benutzen wollen, sei bemerkt, daß der geometrische Theil des Examens so ziemlich mit dem Inhalte dieses Lehrbuches zusammenfällt; nur können übergangen werden: §§. 95. bis 108., §§. 137. bis 140., die Reihenentwicklungen in §§. 205. und 229., die Polygonometrie §§. 243. und 244., endlich diejenigen Aufgaben, welche auf diophantische oder auf höhere als quadratische Gleichungen führen.

Berlin, im Juni 1862.

Für Diejenigen, welche das Buch zur Vorbereitung auf das Portepeefähnrich-Examen in der Preußischen Armee benutzen wollen, sei bemerkt, daß der geometrische Theil des Examens so ziemlich mit dem Inhalte dieses Lehrbuches zusammenfällt; nur können übergangen werden: §§. 95. bis 108., §§. 137 bis 140., die Reihenentwicklungen in §§. 205. und 229., die Polygonometrie §§. 243. und 244., endlich diejenigen Aufgaben, welche auf diophantische oder auf höhere als quadratische Gleichungen führen.

Berlin, im Juni 1862.

Inhalt.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Achtes Kapitel.

Einleitung.

---

§. 1.

Der Raum ist unendlich ausgedehnt, stetig (lückenlos) und theilbar. Ein von allen Seiten begrenzter Theil des Raumes heißt ein Körper; die Grenze des Körpers ist die Fläche; die Grenze der Fläche ist die Linie; die Grenze der Linie ist der Punkt.

Als Theil des Raumes hat der Körper auch dessen Eigenschaften, nur ist er begrenzt. In Beziehung auf seine Ausdehnung unterscheiden wir drei Richtungen derselben (Dimensionen); wir sagen: der Körper hat Länge, Breite und Dicke. Die Fläche hat nur Ausdehnung nach zwei Richtungen: sie hat Länge und Breite; ihr fehlt die Dicke. Die Linie ist nur nach einer Richtung ausgedehnt: sie hat Länge; ihr fehlen Dicke und Breite. Der Punkt hat keine Ausdehnung. Der Sprachgebrauch benennt die Dimensionen auch anders; man sagt: die Mauer hat Länge, Höhe und Dicke; der Graben hat Länge, Breite und Tiefe; das Haus hat Breite, Höhe und Tiefe; die Wand hat Breite und Höhe, oder auch Länge und Höhe u. s. w. Auch Flächen und Linien sind, wie der Körper, stetig und theilbar.

Linien, Flächen und Körper lassen sich resp. durch Linien, Flächen und Körper von bestimmter Größe messen; sie lassen sich also durch benannte Zahlen ausdrücken und sind daher (Raum-) Größen.

Die Geometrie lehrt die Eigenschaften der Raumgrößen kennen und die Raumgrößen messen.

Von dem Punkte, einer Stelle im Raume ohne Ausdehnung, ausgehend kann man die Linie als die Bahn (Spur) definiren, welche ein in Bewegung gedachter Punkt durchläuft; durch Bewegung der

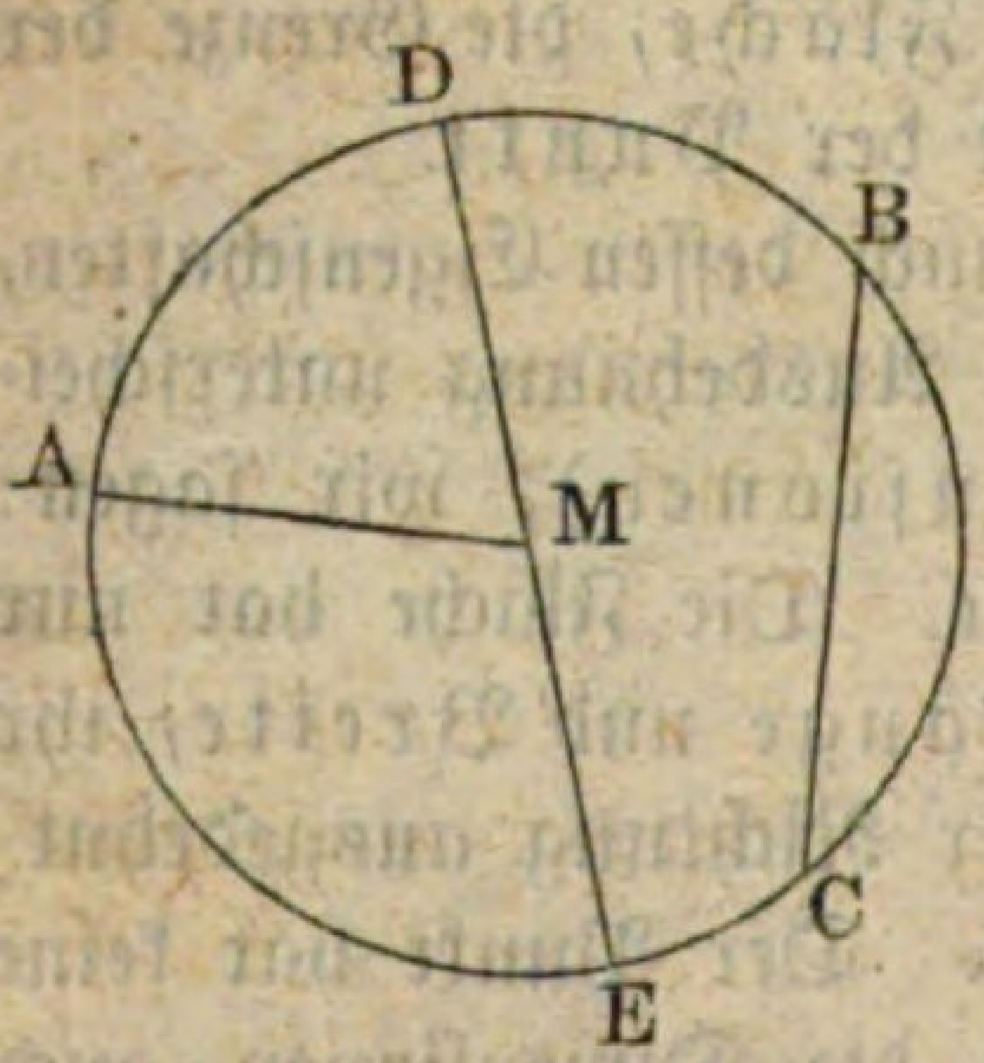
Linie kann man sich die Fläche, durch Bewegung der Fläche den Körper erzeugt denken. Man kann daher Linien und Flächen unabhängig vom Körper sich vorstellen, namentlich beide auch unbegrenzt.

§. 2.

Eine Linie ist entweder gerade (eine Richtung), oder krumm; kein Theil der krummen Linie ist gerade. Auch die Fläche ist entweder gerade (oder eben) und heißt dann eine Ebene, oder sie ist krumm. Die Ebene hat die Eigenschaft, daß jede gerade Linie, welche zwei ihrer Punkte verbindet, mit allen ihren Punkten in der Ebene liegt. Kein Theil einer krummen Fläche ist eben.

Liegen alle Punkte einer krummen Linie in derselben Ebene, so heißt sie eine Linie (Kurve) von einfacher Krümmung; ist dies nicht der Fall: eine Linie von doppelter Krümmung.

Von den einfach gekrümmten Kurven ist die einfachste und wichtigste: die Kreislinie. Sie entsteht, wenn eine begrenzte gerade Linie MA in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte (etwa um M) so lange herumgedreht wird, bis sie in ihre erste Lage zurückgekehrt ist. Der andere Endpunkt A beschreibt hierbei die Kreislinie. Die von der Kreislinie begrenzte Ebene heißt ein Kreis, der Punkt M sein Mittelpunkt (Centrum), die Kreislinie sein Umfang oder seine Peripherie. Jeder Theil der Peripherie wird ein Kreisbogen genannt. Die Gerade MA in jeder Lage, d. h. jede gerade Linie, welche den Mittelpunkt mit einem Punkte der Peripherie verbindet, heißt der Radius oder Halbmesser. Jede gerade Verbindungslinie zweier Punkte der Peripherie (wie BC) heißt eine Sehne oder Chorde des Kreises, und geht sie durch den Mittelpunkt (wie DE): ein Durchmesser oder Diameter.



Alle Radien (also auch alle Durchmesser) eines Kreises sind einander gleich.

§. 3.

Die Geometrie zerfällt in zwei Theile:

1) Die niedere Geometrie betrachtet solche Raumgrößen, die nur von der geraden Linie, der Ebene, dem Kreise und einigen mit dem Kreise zusammenhängenden krummen Flächen abhängig sind.

2) Die höhere Geometrie beschäftigt sich im Allgemeinen mit einfach und doppelt gekrümmten Linien und den von ihnen abhängigen Flächen und Körpern.

Die niedere (auch elementare) Geometrie zerfällt wieder in zwei Haupt-Abschnitte:

a) Die ebene Geometrie (Planimetrie) betrachtet die Raumgrößen, deren Punkte alle in derselben Ebene liegen.

b) Die körperliche Geometrie (Stereometrie) beschäftigt sich mit Raumgrößen, deren Punkte beliebig im Raume liegen.

Diesen beiden Abschnitten schließt sich ein dritter untergeordneter Abschnitt an: die Coordinaten-Theorie. Er führt die Untersuchungen über Lage und Eigenschaften der Raumgrößen mittelst einer besonderen Anwendung der Algebra und enthält die Coordinaten-Theorie der Ebene und des Raumes. Anstatt diese beiden Theile resp. der Planimetrie und der Stereometrie hinzuzufügen, pflegt man sie zusammen in einem besonderen Abschnitte abzuhandeln.

Die oben angegebene Eintheilung der Geometrie in die niedere und höhere zeigt keine scharfe Grenze beider Theile. Eine solche läßt sich in der That auch nicht angeben. Zu den Untersuchungen über Raumgrößen wendet man neben rein geometrischen Betrachtungen auch die Arithmetik, Algebra, die niedere und auch die höhere Analysis an. Letztere (die höhere Analysis) ist ausschließlich ein Hülfsmittel der höheren Geometrie, und ihr verdankt dieselbe ihre Ausbildung. Jede Untersuchung also, welche nur mit Hülfe der höheren Analysis geführt werden kann, rechnet man zur höheren Geometrie; hingegen sagt man, eine geometrische Aufgabe sei elementar auflösbar, wenn sie sich rein geometrisch oder durch Anwendung der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis lösen läßt; man rechnet sie dann zur niederen Geometrie. Nun sind aber manche Aufgaben, welche der oben [unter 1)] angegebenen Eintheilung gemäß in die niedere Geometrie gehören, nur mit Hülfe der höheren Analysis lösbar, z. B. die Inhaltsbestimmung des Mantels eines schiefen Kegels, und solche Aufgaben fallen der höheren Geometrie zu. Andere Untersuchungen wieder stehen auf der Grenze beider Theile, und dies gilt namentlich von einigen einfach gekrümmten Kurven. Unter diesen Kurven giebt es eine Gattung, welche man Kegelschnitte nennt, weil sie durch das Schneiden eines Kegelmantels mit einer Ebene entstehen. Sie hängen sonach — zwar nicht unmittelbar, aber doch mittelbar — von dem Kreise und der Ebene ab und können zur niederen Geometrie gerechnet werden. Dies geschieht auch gewöhnlich, weil die Kegelschnitte auch ohne Anwendung der höheren Analysis eine zwar nicht

erschöpfende, aber doch ausgedehnte und für practische Anwendungen sehr fruchtbare Untersuchung zulassen, während alle anderen Kurven (natürlich mit Ausnahme der Kreislinie) ohne die höhere Analysis nur sehr unvollkommen oder gar nicht zu untersuchen sind.

Das Gesagte wird den Leser in den Stand setzen, die nachfolgende Eintheilung der niederen Geometrie in diesem Lehrbuche, welches die höhere Analysis ausschließt, zu verstehen.

I. Die ebene Geometrie oder die Planimetrie.
II. Die körperliche Geometrie oder die Stereometrie.
III. Die Coordinaten-Theorie.
IV. Die Kegelschnitte.

§. 4.

Raumgrößen heißen gleich (=), wenn sie gleiche Räume einnehmen; sie heißen congruent (≌), wenn man sich dieselben so auf oder in einander gelegt denken kann, daß alle Punkte der einen mit allen Punkten der anderen zusammen fallen. Man sagt dann, die Raumgrößen decken sich.

Es folgt hieraus, daß congruente Raumgrößen auch immer gleiche sind; gleiche aber brauchen nicht congruent zu sein. Wir werden einzelne Raumgrößen kennen lernen, die, wenn sie gleich sind, auch congruent sein müssen, und machen den Leser schon jetzt darauf aufmerksam, daß es Sprachgebrauch ist, solche Raumgrößen nicht congruente, sondern nur gleiche zu nennen. So sagt man z. B.: zwei Winkel sind gleich, zwei gerade Linien sind gleich, zwei Kreisbogen desselben Kreises, zwei Quadrate, zwei Würfel u. s. w. sind gleich, während alle diese Raumgrößen auch congruent sein müssen, sobald sie nur gleich sind.

Erster Abschnitt.

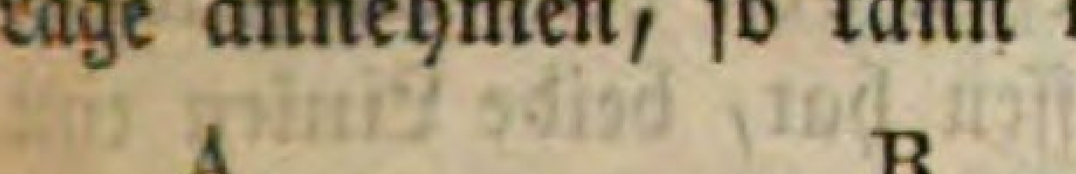
Die ebene Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von der Lage der geraden Linien in einer Ebene. Die Winkel. Abhängigkeit der Winkel und der Lage der Linien von einander.

§. 5.

In einer Ebene sind durch einen Punkt A unendlich viele gerade Linien denkbar, oder: man kann eine durch A gehende gerade Linie mittelst einer drehenden Bewegung um A in unendlich viele Lagen bringen. Soll nun die durch A gehende Gerade eine bestimmte feste Lage annehmen, so kann dies zunächst auf zwei Arten geschehen:



1) mittelst eines zweiten Punktes B, wenn bestimmt wird, daß die Gerade auch durch B gehen soll;

2) mittelst einer zweiten ihrer Lage nach gegebenen Linie NM, wenn bestimmt wird, daß die durch A gehende Linie die NM nie treffen soll, wenn auch beide Linien nach beiden Seiten hin unendlich lang gedacht werden.



Man nennt in diesem Falle die beiden Linien mit einander parallel (⫲) und schreibt, wenn etwa D ein zweiter Punkt der durch A gehenden und mit NM parallelen Linie ist: AD ⫲ NM.

Die beiden in 1) und 2) enthaltenen Wahrheiten sind einfache, ursprüngliche. In beiden Fällen gestattet das Gegentheil der Bedingung (also: die Linie soll nicht durch B gehen; sie soll nicht parallel NM sein) unendlich viele Lagen für die durch A gehende Gerade.

Hieraus folgen zwei Grundsätze:

I. Durch zwei Punkte kann nur eine gerade Linie gelegt werden, deren Lage dann durch die zwei Punkte völlig bestimmt ist.

II. Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie kann man mit dieser nur eine Parallele legen.

Anmerkung 1. Aus I. folgt dann noch, daß zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte, also nur einmal schneiden können.

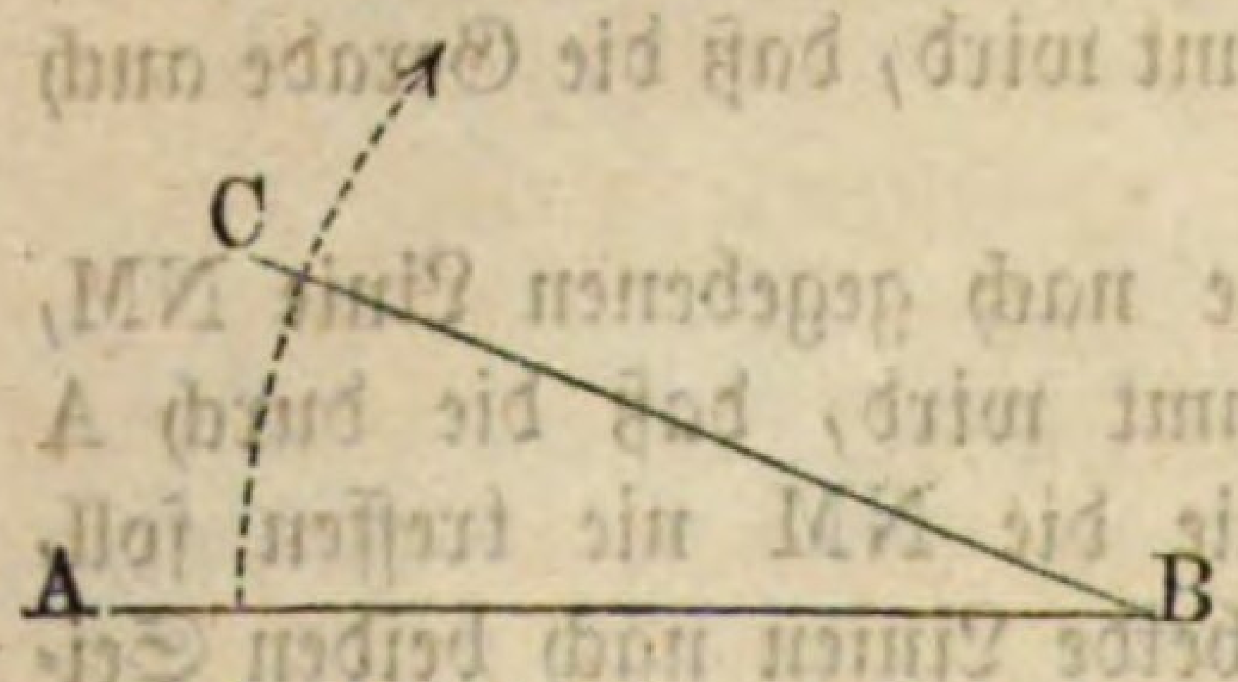
Anmerkung 2. Unter einer Linie ohne nähere Bezeichnung soll fortan immer eine gerade Linie verstanden werden.

§. 6.

Der Winkel.

Sind zwei Linien nicht parallel, so sagt man: sie convergiren nach der Seite hin, wo sie, gehörig lang gedacht, sich schneiden; nach der anderen Seite divergiren sie. Weil nun die bloße Eigenschaft der Convergenz zweier Linien nur ihre Parallelität ausschließt, sonst aber ihre gegenseitige Lage ganz unbestimmt läßt, so ist ein Mittel, diese Lage zu fixiren, nöthig. Wir finden es im Winkel.

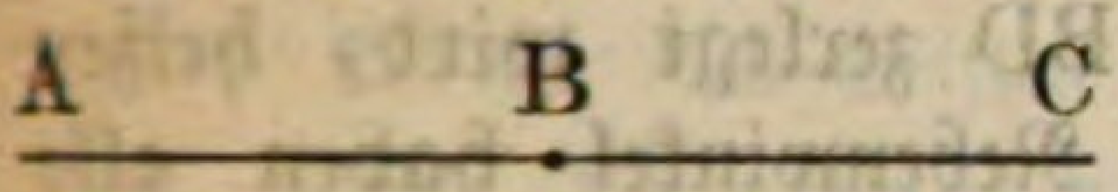
Denken wir uns zwei von demselben Punkt B ausgehende Linien BA und BC, beide nach A und C hin unbegrenzt, zuerst in der Lage, daß BC genau mit BA zusammenfällt (also BA deckt), lassen wir BA in ihrer Lage, denken uns aber BC in der Ebene beider Linien um B nach einer Richtung hin (etwa nach der des Pfeiles) drehend bewegt, so daß jeder Punkt der BC (B ausgenommen) eine Kreislinie zu durchlaufen beginnt: so schließen von dem Augenblicke an, in welchem BC die Lage der BA verlassen hat, beide Linien eine Ebene ein, die nach einer Seite hin unbegrenzt und in so fern unendlich ist, die aber in Folge der Bewegung der BC immer größer wird und zuletzt, wenn BC eine volle Umdrehung beendet hat, also in ihre alte Lage zurückgekehrt ist, zu der ganzen Ebene angewachsen ist.



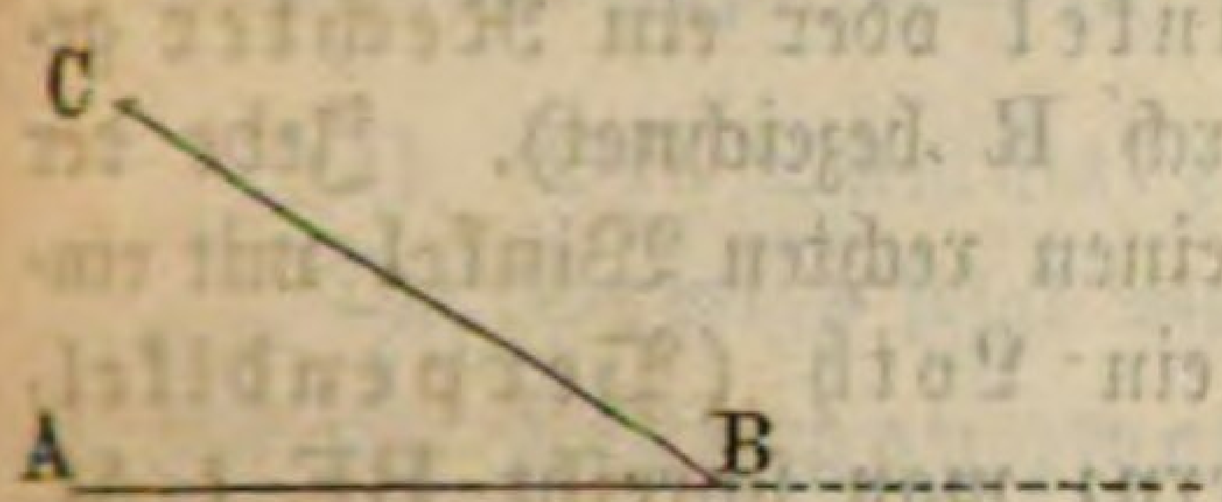
Der Theil der ganzen Ebene, welchen bei einer beliebigen bestimmten Lage der BC die beiden Linien BA und BC begrenzen, heißt eine Winkelebene oder ein Winkel (bezeichnet durch ∠ ABC oder nur ∠ B); A heißt sein Scheitel oder seine Spitze, und die unendlich langen Linien BA und BC sind seine Schenkel.

Da man BC aus der Lage BA in diejenige, welche die Figur zeigt, auch durch Drehung in der dem Pfeile entgegengesetzten Rich-

tung bringen kann, so bilden BA und BC zwei Winkel mit einander, welche zusammen die ganze Ebene ausmachen. Um diese Winkel von einander zu unterscheiden, wollen wir uns BA und BC jetzt in der Lage denken, in welcher jede dieser Linien die Verlängerung der



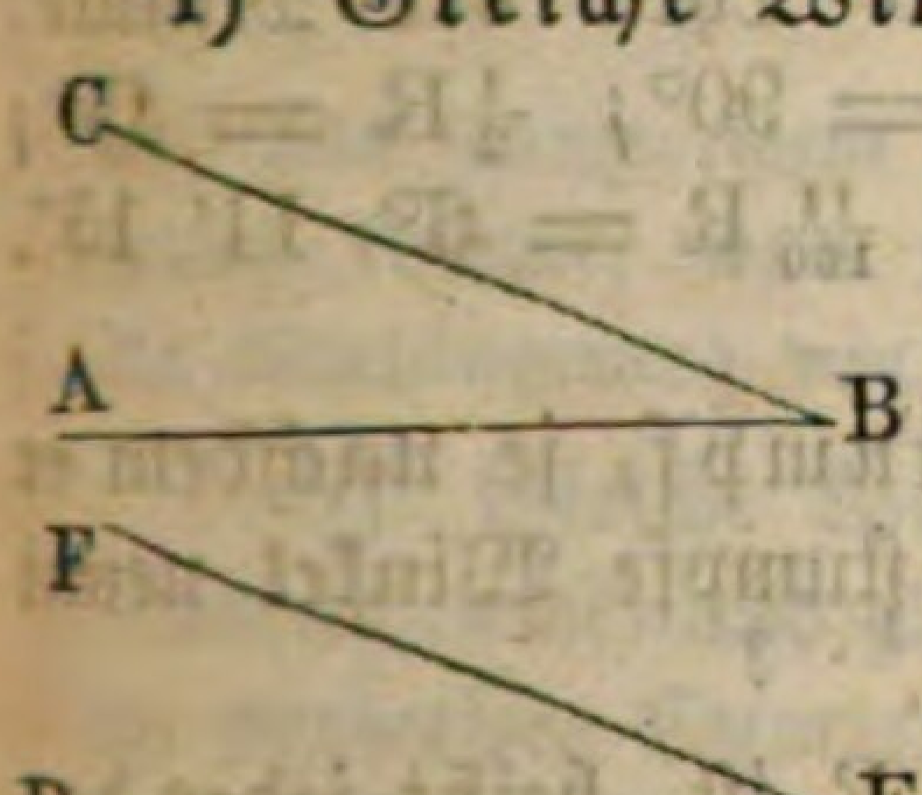
andern über B hinaus ist. Dann sind beide Winkel congruent; denn man kann sich den unterhalb AC liegenden Theil der ganzen Ebene so um AC herumgelegt denken, daß er den Theil oberhalb AC deckt. Jeder Winkel ist dann die Hälfte der ganzen Ebene und wird ein flacher oder gestreckter Winkel genannt. — Kehren wir zu der früheren



Lage der Linien zurück. Denken wir uns AB über B verlängert, so erscheint der eine Winkel, den BA und BC bilden, als Theil eines gestreckten Winkels: er ist kleiner als dieser; der andere ist größer als der gestreckte, denn der gestreckte ist ein Theil von ihm. Ein Winkel heißt concav (hohl), oder convex (erhaben), je nachdem er kleiner, oder größer als der gestreckte ist. Da convexe Winkel selten in Betracht kommen, so soll $\measuredangle$ ABC immer den concaven Winkel bezeichnen, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird.

§. 7.

1) Gleiche Winkel sind auch immer congruent; denn



legt man von zwei Winkeln ABC und DEF den einen DEF so auf den anderen ABC, daß E in B und ED entlang BA fällt, so kann EF nur zwischen BA und BC, oder in BC, oder über BC hinaus fallen. Im ersten Falle ist $\measuredangle$ DEF kleiner als $\measuredangle$ ABC, im dritten größer; sind also die Winkel gleich, so muß EF in BC fallen, und die Winkel decken sich.

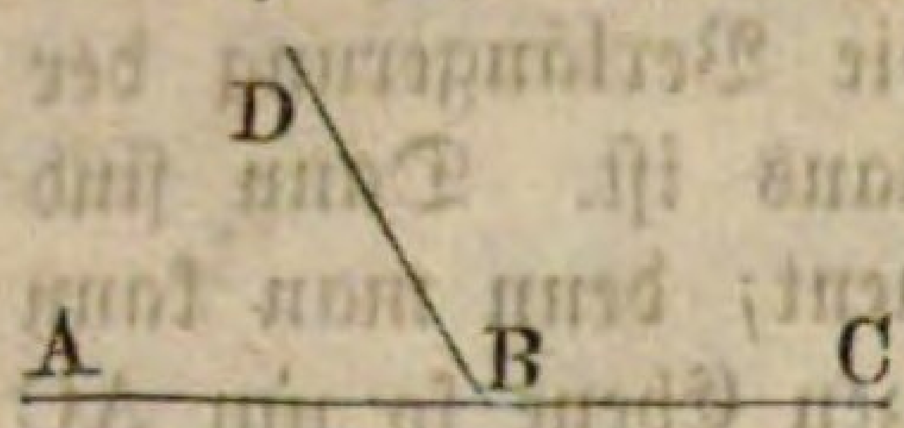
2) Alle flachen Winkel sind einander gleich; denn man kann sich dieselben so auf einander gelegt denken, daß sie sich decken. (Vergl. den Schluß des §. 4.)

3) Der Winkel ist eine Raum-Größe; denn man kann ihn durch einen andern Winkel messen, etwa durch einen aliquoten Theil des flachen Winkels. Indem wir zwei Winkel auf einander legen, oder an einander, können wir ihre Differenz, oder ihre Summe bilden. Durch Addition der Winkel kann ein Winkel entstehen, der größer als die Summe zweier flachen ist. Die Erklärung des Winkels in §. 6. gestattet diese Erweiterung; BC kann mehr als eine Umdrehung machen.

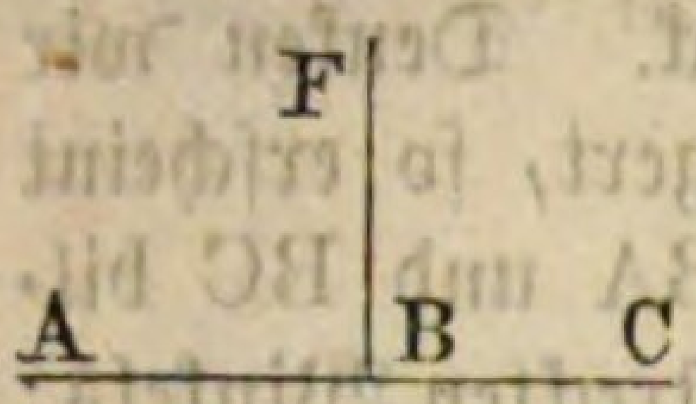
§. 8.

Erklärung.

1) Die beiden Winkel ABD und DBC, in welche ein flacher



Winkel ABC durch eine von seinem Scheitel ausgehende Linie BD zerlegt wird, heißen **Nebenwinkel**. Nebenwinkel haben also einen gemeinschaftlichen Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel; ihre beiden anderen Schenkel bilden einen flachen Winkel. — Sind die beiden Nebenwinkel einander gleich, $\measuredangle ABF = \measuredangle FBC$, so ist jeder die Hälfte eines flachen Winkels und



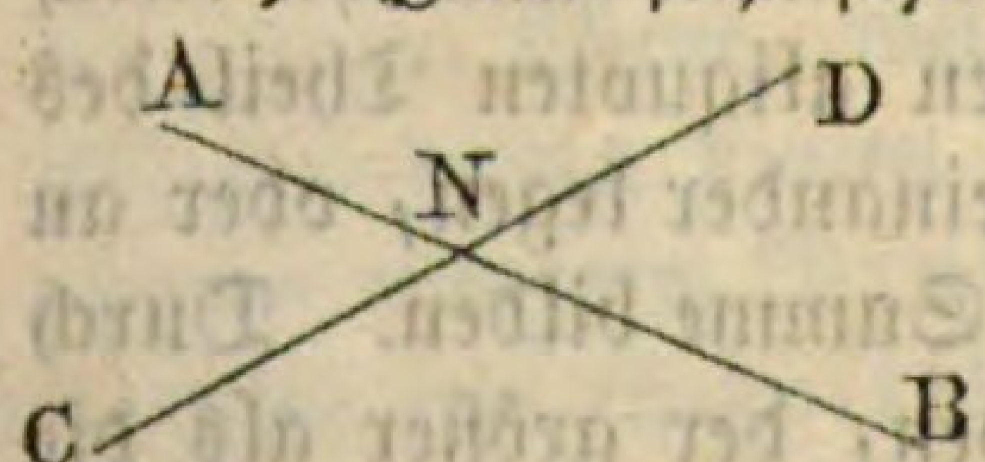
wird ein **rechter Winkel** oder ein **Rechter** genannt (gewöhnlich durch R bezeichnet). Jede der beiden Linien, welche einen rechten Winkel mit einander bilden, heißt ein **Loth** (**Perpendikel, Senkrechte, Normale**) auf der andern; man schreibt $BF \perp AC$ (BF senkrecht auf AC). — Eine durch einen Punkt P gezogene Linie, welche eine andere Linie AC senkrecht trifft, heißt auf AC senkrecht **errichtet**, oder **gefällt**, je nachdem P **in** AC liegt, oder **außerhalb** AC. Der gemeinschaftliche Punkt beider Linien heißt der **Fußpunkt** der auf AC errichteten oder gefällten Senkrechten.

2) Der 90te Theil des rechten Winkels dient als Einheit zum Messen der Winkel und heißt ein **Grad** (1°); der 60te Theil des Grades heißt eine **Minute** (1′); der 60te Theil der Minute: eine **Secunde** (1″). Hiernach ist z. B. $R = 90°$; $\frac{1}{2}R = 45°$; $\frac{1}{4}R = 22° \; 30'$; $\frac{2}{3}R = 60°$; $\frac{1}{3}R = 30°$; $\frac{11}{160}R = 6° \; 11' \; 15''$. Der flache Winkel ist gleich 2 R oder 180°.

3) Ein hohler Winkel heißt **spitz**, oder **stumpf**, je nachdem er kleiner, oder größer als R ist. Spitze und stumpfe Winkel nennt man auch **schiefe** Winkel.

4) Von zwei Winkeln, deren Summe = R ist, heißt jeder das **Complement** des andern; beträgt ihre Summe 2 R: das **Supplement**. Statt Complement und Supplement sagt man auch **Ergänzung** zu einem Rechten und zu zwei Rechten. Ebenso können zwei Winkel einander zu 3 R, 4 R u. s. w. ergänzen.

5) Zwei sich schneidende Linien AB und CD bilden vier hohle



Winkel, von denen je zwei gegenüberliegende **Scheitelwinkel** heißen; z. B. $\measuredangle ANC$ und $\measuredangle BND$. Scheitelwinkel haben also einen gemeinschaftlichen Scheitel, und jeder Schenkel des einen ist die Verlängerung eines Schenkels des andern über den Scheitel hinaus.

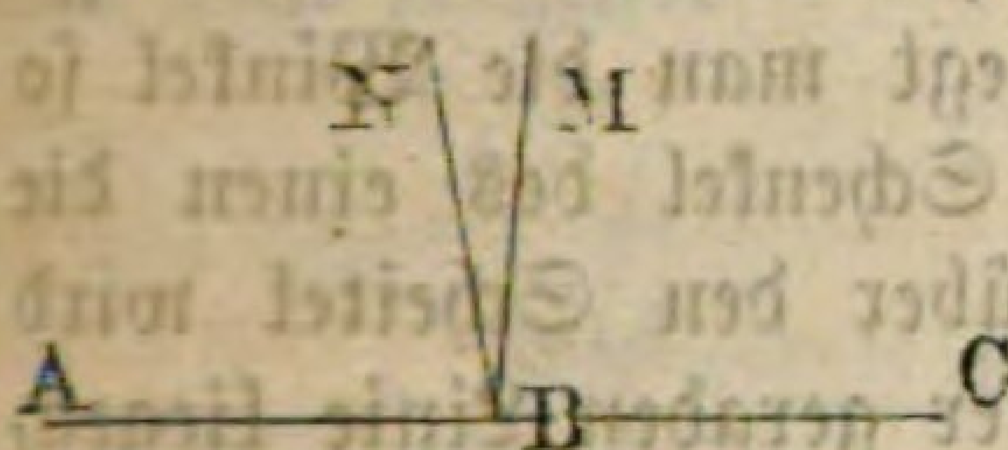
§. 9.

Gesetze.

1) **Rechte Winkel sind einander gleich.**

Bew. Als Hälften flacher Winkel (§. 7., 2.).

2) **In einem Punkte B einer Linie AC kann man auf AC auf einer Seite nur eine Senkrechte errichten.**



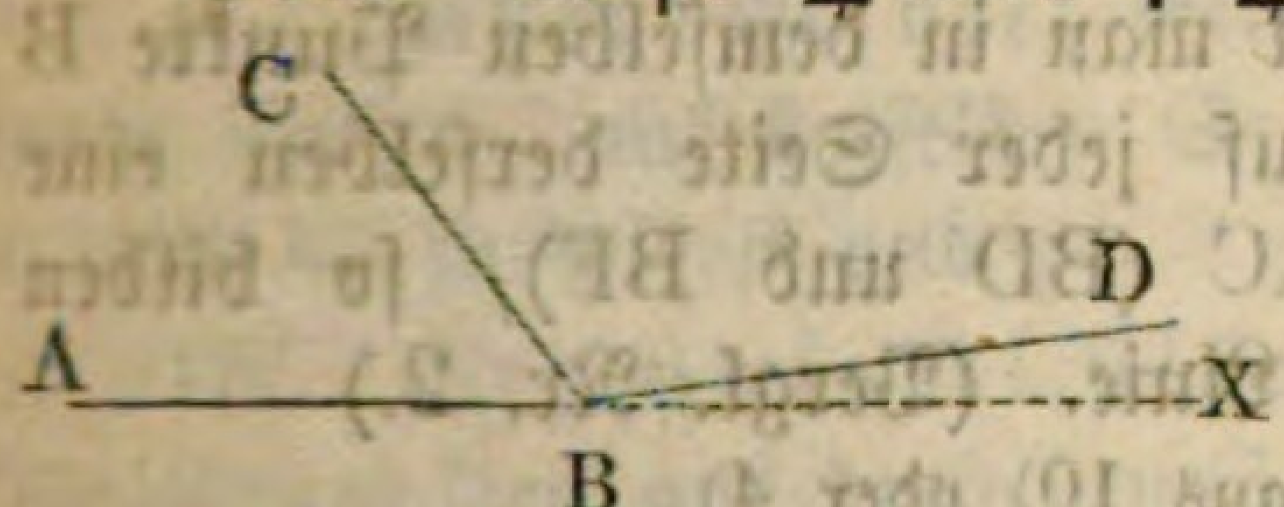
Bew. (indirect). Die Annahme, es gäbe zwei auf AC senkrechte Linien BN und BM, führt nach 1) zu dem Widerspruch $\measuredangle ABN = \measuredangle ABM$.

3) **Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich 2R.**

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Anschauung.

4) **Legt man zwei Winkel, deren Summe gleich 2R ist, so neben einander, daß ihre Scheitel und ein Paar Schenkel in einander fallen, so bilden die andern Schenkel eine gerade Linie, d. h. die Winkel werden Nebenwinkel.**

Bew. Es sei $\measuredangle ABC + \measuredangle CBD = 2R$. Gesetzt nun, ABD wäre nicht eine gerade Linie, so verlängere man AB über B nach X; dann ist nach 3) $\measuredangle ABC + \measuredangle CBX = 2R$, folglich $\measuredangle ABC + \measuredangle CBD = \measuredangle ABC + \measuredangle CBX$.



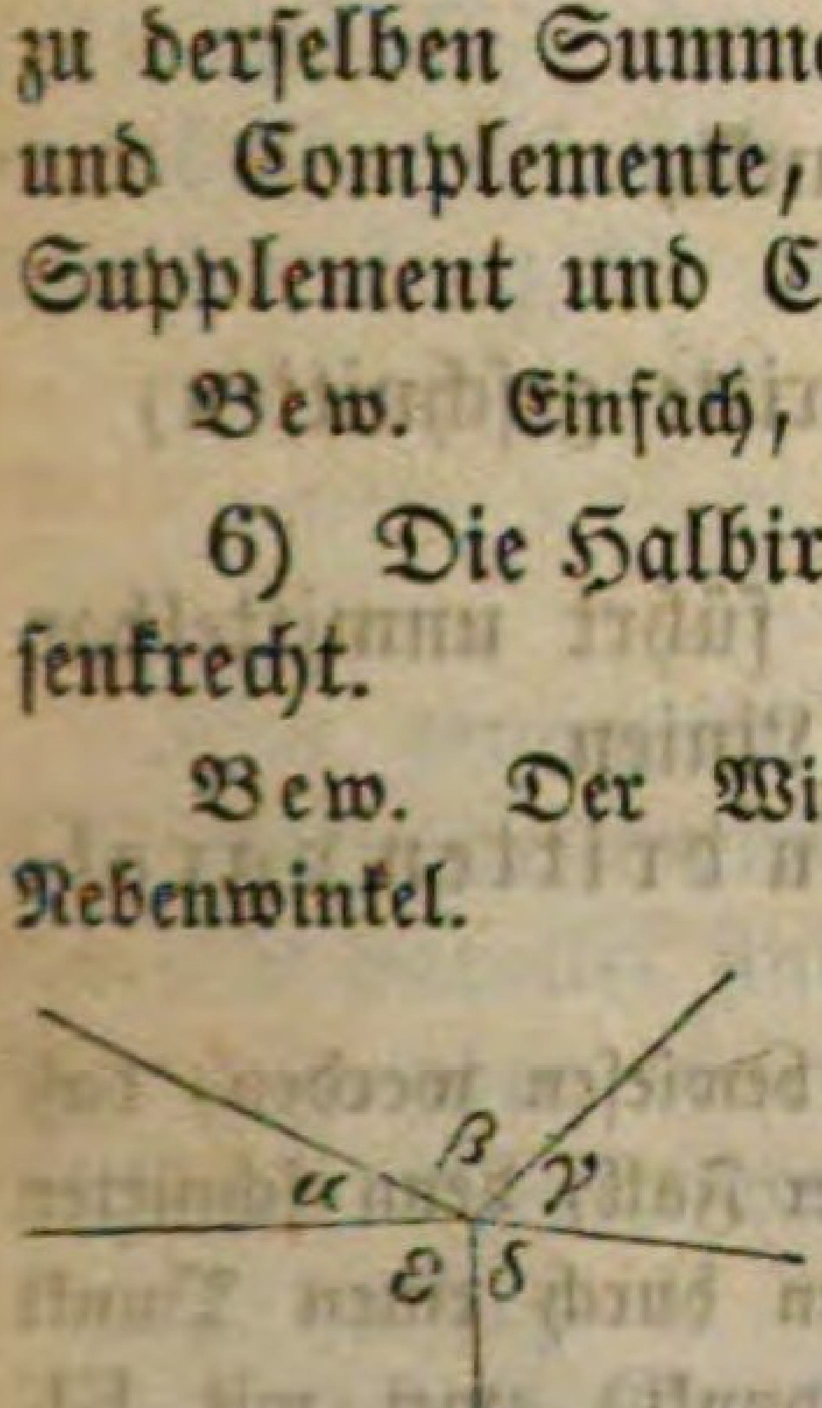
Da diese Gleichung den Widerspruch zeigt, daß das Ganze einem seiner Theile gleich ist, und da man auf denselben Widerspruch kommt, wenn man annimmt, BD fiele unterhalb BX, so muß BD in die Verlängerung von AB, d. h. in BX fallen.

5) Gleiche Winkel haben gleiche Supplemente (also auch gleiche Nebenwinkel) und gleiche Complemente, überhaupt gleiche Ergänzungen zu derselben Summe. Ungleiche Winkel haben ungleiche Supplemente und Complemente, so daß zu dem größeren Winkel das kleinere Supplement und Complement gehört.

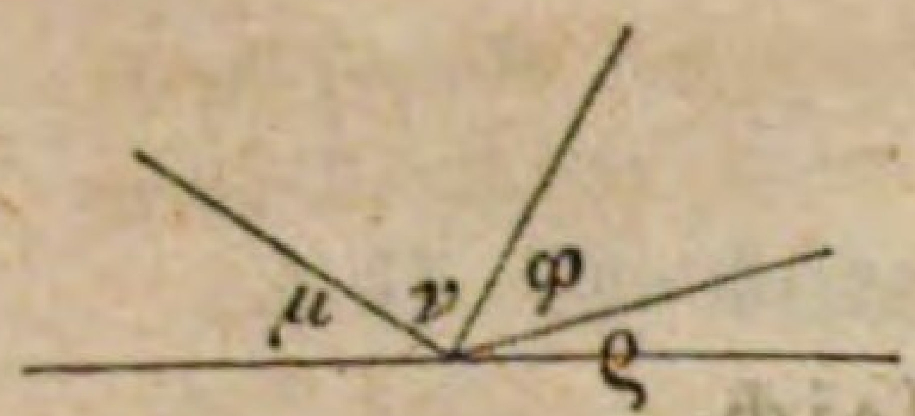
Bew. Einfach, etwa durch Aufeinanderlegen.

6) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht.

Bew. Der Winkel, den sie einschließen, ist die Summe der halben Nebenwinkel.



7) Die Summe aller Winkel um einen Punkt herum (z. B. die Summe der Winkel α, β, γ, δ, ε) beträgt zwei flache Winkel oder 4R (360°).



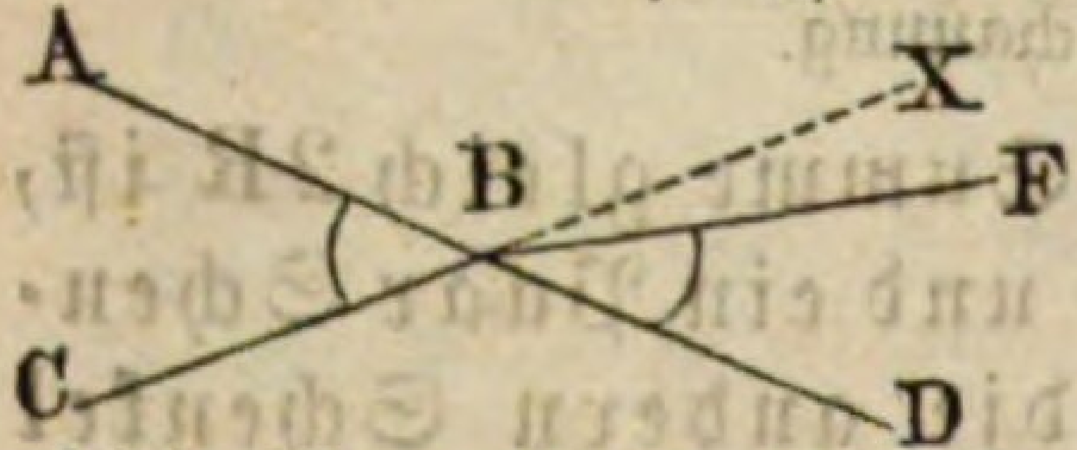
8) Die Summe aller Winkel um einen Punkt auf einer Seite einer geraden Linie ist gleich 2 R; z. B. $\mu + \nu + \varphi + \varrho = 2$ R.

9) Scheitelwinkel sind einander gleich.

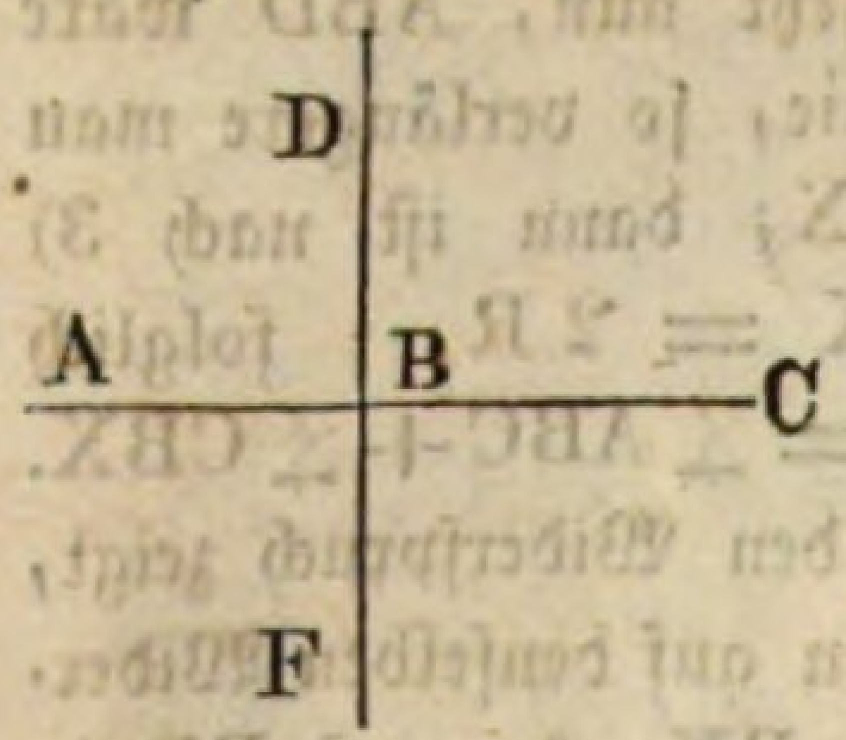
Bew. Sie haben denselben Nebenwinkel.

10. Zwei gleiche Winkel lassen sich immer in die Lage von Scheitelwinkeln bringen, d. h. legt man die Winkel so hin, daß sie denselben Scheitel haben, ein Schenkel des einen die Verlängerung eines Schenkels des andern über den Scheitel wird und die Winkel auf verschiedenen Seiten dieser geraden Linie liegen, so bilden auch die andern Schenkel eine gerade Linie.

Bew. Es sei ∡ ABC = ∡ DBF und ABD eine gerade Linie. Wäre



nun CBF keine gerade Linie, so verlängere man CB über B nach X; dann würde ∡ ABC = ∡ DBX als Scheitelwinkel sein; folglich müßte auch ∡ DBX = ∡ DBF sein, da jeder demselben dritten Winkel gleich ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß BF nur in die Verlängerung von CB fallen kann.



11) Errichtet man in demselben Punkte B der Linie AC auf jeder Seite derselben eine Senkrechte auf AC (BD und BF), so bilden beide eine gerade Linie. (Vergl. Nr. 2.)

Bew. Folgt aus 10) oder 4).

Drei Linien.

§. 10.

Gesetze und Erklärung.

Drei Linien können, wenn keine mit einer der andern zusammenfällt, folgende Lagen haben:

1) alle drei Linien schneiden sich in einem Punkt;

2) alle drei sind parallel;

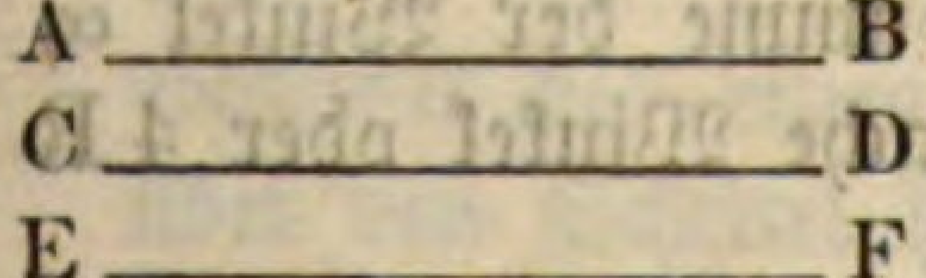
3) zwei sind parallel und werden durch die dritte geschnitten;

4) alle drei schneiden sich in drei Punkten.

Der Begriff der Parallelität zweier Linien führt unmittelbar zu der Vorstellung von drei und mehr parallelen Linien.

Lehrsatz 1. Sind zwei Linien derselben dritten parallel, so sind sie unter einander parallel.

Bew. Es sei AB ∦ EF und CD ∦ EF, so soll bewiesen werden, daß

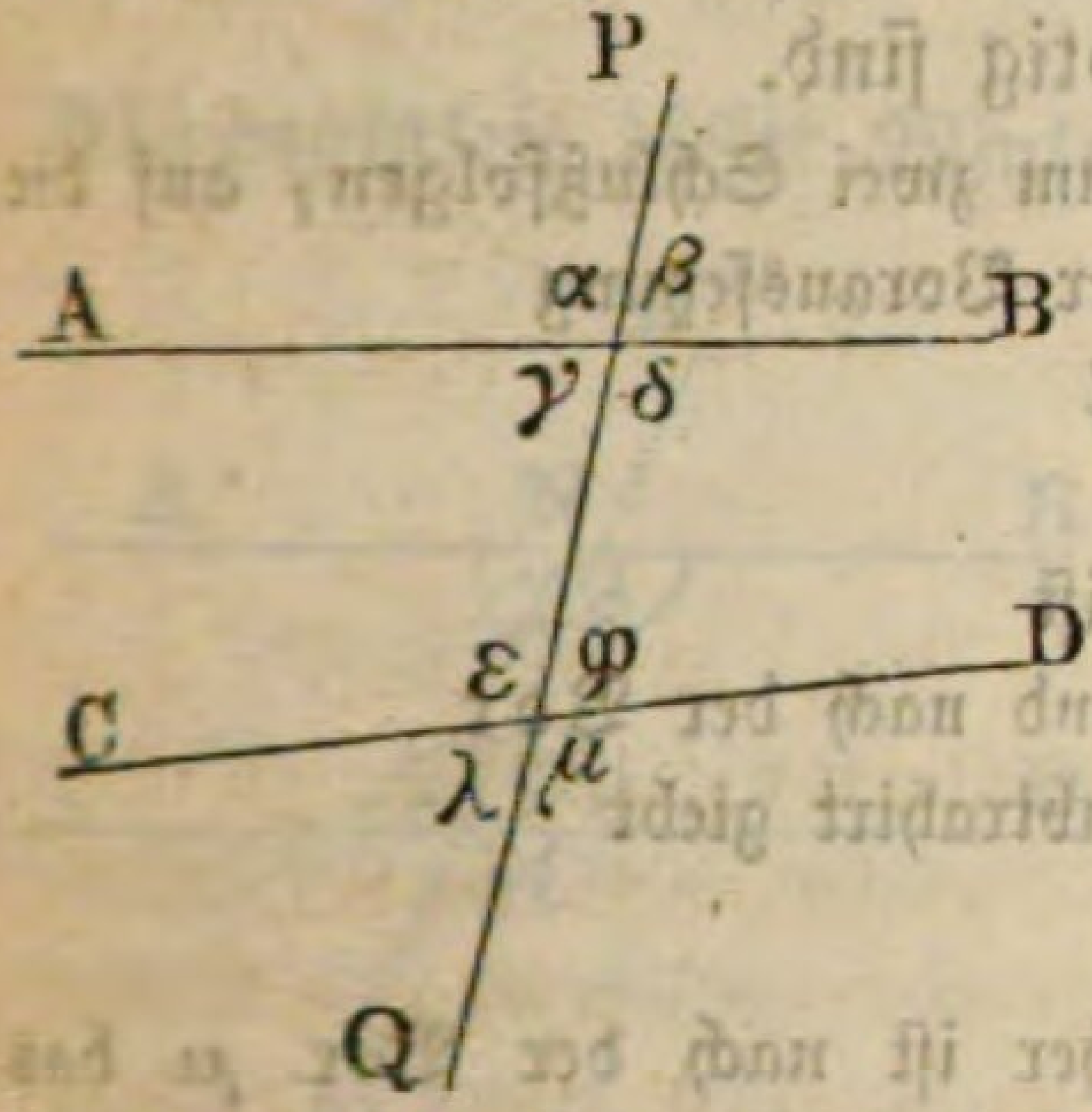


AB ∦ CD ist. Dies ist der Fall, denn schnitten sich beide Linien, so müßten durch einen Punkt (nämlich ihren Durchschnittspunkt) zwei mit EF

parallele Linien möglich sein, was doch nach §. 5. II. nicht möglich ist. — Aehnlich beweist man noch einen zweiten Lehrsatz, welcher die unter Nr. 3. angegebene Lage dreier Linien erläutert:

Lehrsatz 2. Jede Linie, welche eine von zwei parallelen Linien schneidet, schneidet, gehörig verlängert, auch die andere.

In Bezug auf die unter Nr. 3. und 4. angegebene Lage merke man nun folgende



Erklärung: Werden zwei Linien AB und CD durch eine dritte PQ geschnitten, so entstehen an den zwei Durchschnittspunkten acht hohle Winkel α, β, γ, δ, ε, φ, λ und μ. Von diesen heißen, gleichviel, ob AB und CD parallel sind, oder nicht:

I. innere Winkel solche zwei, welche innerhalb der geschnittenen Linien, auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen; also γ und ε, so wie δ und φ;

II. äußere Winkel solche zwei, welche außerhalb der geschnittenen Linien, auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen; also α und λ, so wie β und μ;

III. Gegenwinkel solche zwei, welche an verschiedenen Durchschnittspunkten auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, aber der eine außerhalb, der andere innerhalb der geschnittenen Linien; also α und ε, β und φ, λ und γ, so wie μ und δ;

IV. Wechselwinkel solche zwei, welche an verschiedenen Durchschnittspunkten auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen und entweder beide innerhalb der geschnittenen Linien (innere Wechselwinkel), oder beide außerhalb derselben (äußere Wechselwinkel). Es sind sonach die inneren Wechselwinkel: γ und φ, so wie δ und ε; die äußeren: α und μ, so wie β und λ.

§. 11.

Gesetze.

Die genannten Winkel haben mit der Lage der Linien AB und CD einen bestimmten Zusammenhang; sie erfüllen, je nachdem AB und CD parallel sind, oder nicht, gewisse Bedingungen, oder andere. Ehe wir aber diesen Zusammenhang angeben, soll gezeigt werden, wie diese Winkel von einander allein abhängig sind.

Lehrsatz 1. Wenn von folgenden Bedingungen: ein Paar innere oder äußere Winkel betragen 2 R, ein Paar Gegenwinkel oder

Wechselwinkel sind gleich, **eine** wahr ist, so sind alle anderen nothwendige Folge.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß, wenn von folgenden Gleichungen:

I. 1) $\gamma + \varepsilon = 2R$; 2) $\delta + \varphi = 2R$;
II. 3) $\alpha + \lambda = 2R$; 4) $\beta + \mu = 2R$;
III. 5) $\alpha = \varepsilon$; 6) $\beta = \varphi$; 7) $\gamma = \lambda$; 8) $\delta = \mu$;
IV. 9) $\gamma = \varphi$; 10) $\delta = \varepsilon$; 11) $\alpha = \mu$; 12) $\beta = \lambda$,

eine wahr ist, dann auch die anderen richtig sind.

Alle hierher gehörigen Beweise drehen sich um zwei Schlußfolgen, auf die hinzuweisen genügen wird. Es soll z. B. aus der Voraussetzung

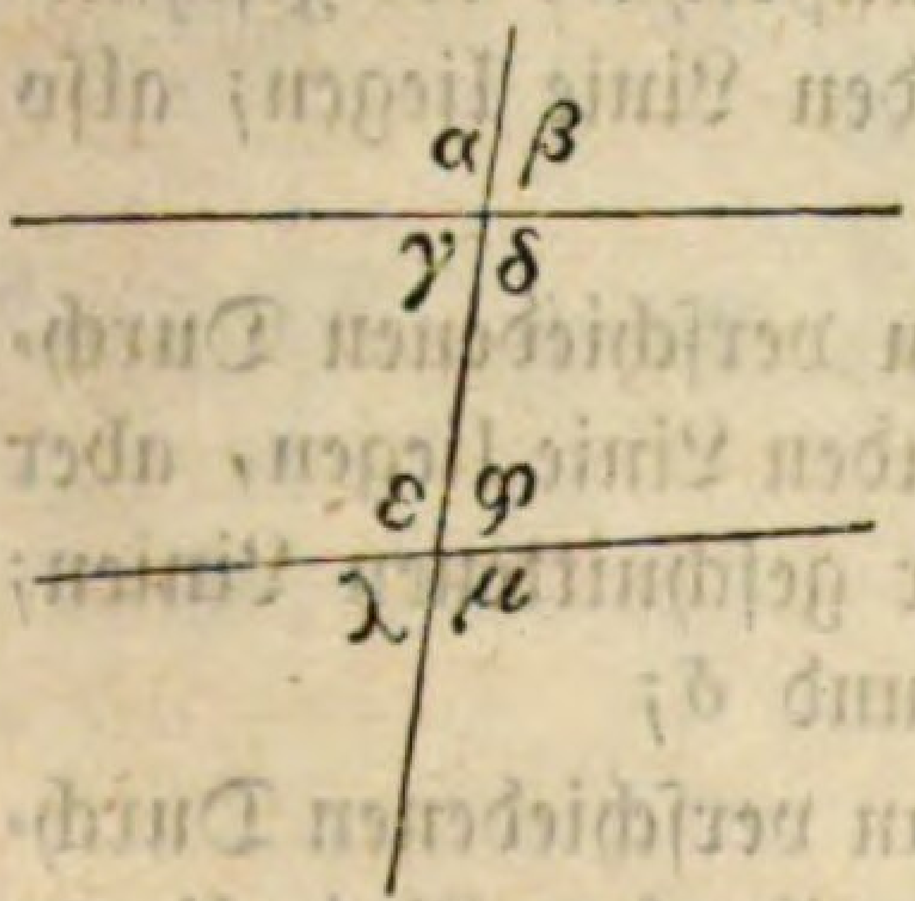
$$1)\quad \gamma + \varepsilon = 2R$$

gefolgert werden: Nr. 3. und Nr. 11.

Als Summen von zwei Paar Nebenwinkel ist

$$\alpha + \gamma + \varepsilon + \lambda = 4R, \text{ und nach der Vor.}$$
$$\gamma + \varepsilon = 2R; \text{ subtrahirt giebt}$$
$$\text{Nr. 3)}\quad \alpha + \lambda = 2R.$$

Ferner ist $\mu = \varepsilon$ als Scheitelwinkel; daher ist nach der Vor. μ das Supplement von γ; ebenso ist α als Nebenwinkel das Supplement von γ, folglich $\alpha = \mu$, wodurch Nr. 11. bewiesen ist.



Lehrsatz 2. Wenn man eine der zwölf Gleichungen im vorigen Satze in eine Ungleichung verwandelt (z. B. $\gamma + \varepsilon \gtrless 2R$ statt $\gamma + \varepsilon = 2R$) und zur Voraussetzung macht, so gehen auch die übrigen Gleichungen in Ungleichungen über, und zwar so, daß, wenn von folgenden zwölf Ungleichungen:

I. 1) $\gamma + \varepsilon \gtrless 2R$; 2) $\delta + \varphi \lessgtr 2R$;
II. 3) $\alpha + \lambda \lessgtr 2R$; 4) $\beta + \mu \gtrless 2R$;
III. 5) $\alpha \lessgtr \varepsilon$; 6) $\beta \gtrless \varphi$; 7) $\gamma \gtrless \lambda$; 8) $\delta \lessgtr \mu$;
IV. 9) $\gamma \gtrless \varphi$; 10) $\delta \lessgtr \varepsilon$; 11) $\alpha \lessgtr \mu$; 12) $\beta \gtrless \lambda$,

eine wahr ist, dann auch alle anderen richtig sind.

Auch hier wird es genügen, durch ein Paar **Beweise** den Gang aller anzudeuten.

Aus Nr. 1. soll Nr. 2. gefolgert werden.

$$\gamma + \delta + \varepsilon + \varphi = 4R$$
$$\gamma + \varepsilon \gtrless 2R \text{ (Vor.); subtrahirt:}$$
$$\text{Nr. 2)}\quad \delta + \varphi \lessgtr 2R.$$

Aus Nr. 1. soll Nr. 12. gefolgert werden.

Es ist $\beta = \gamma$ als Scheitelwinkel, daher nach der Vor.:

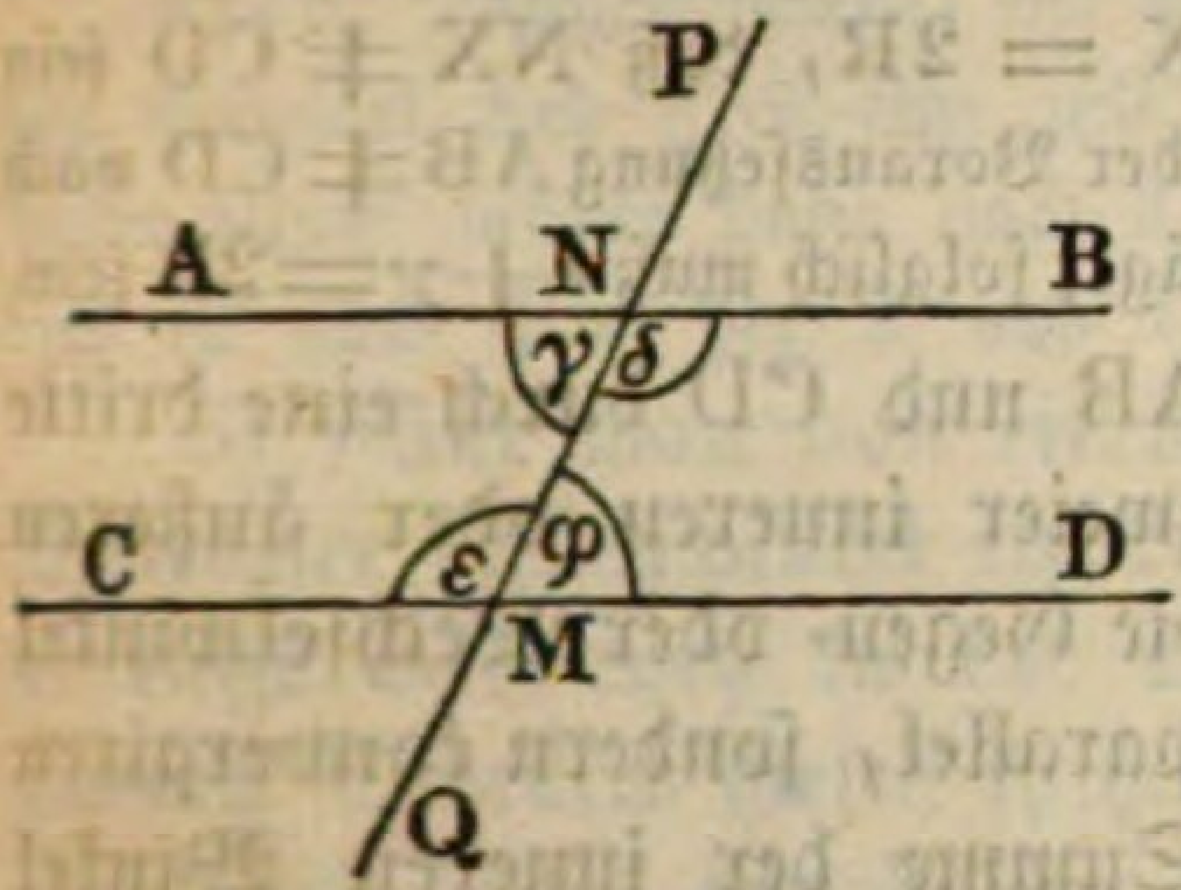
$$\beta + \varepsilon \gtrless 2R$$

$$\lambda + \varepsilon = 2R,$$ woraus folgt:

$$\beta + \varepsilon \gtrless \lambda + \varepsilon \text{ oder } \beta \gtrless \lambda.$$

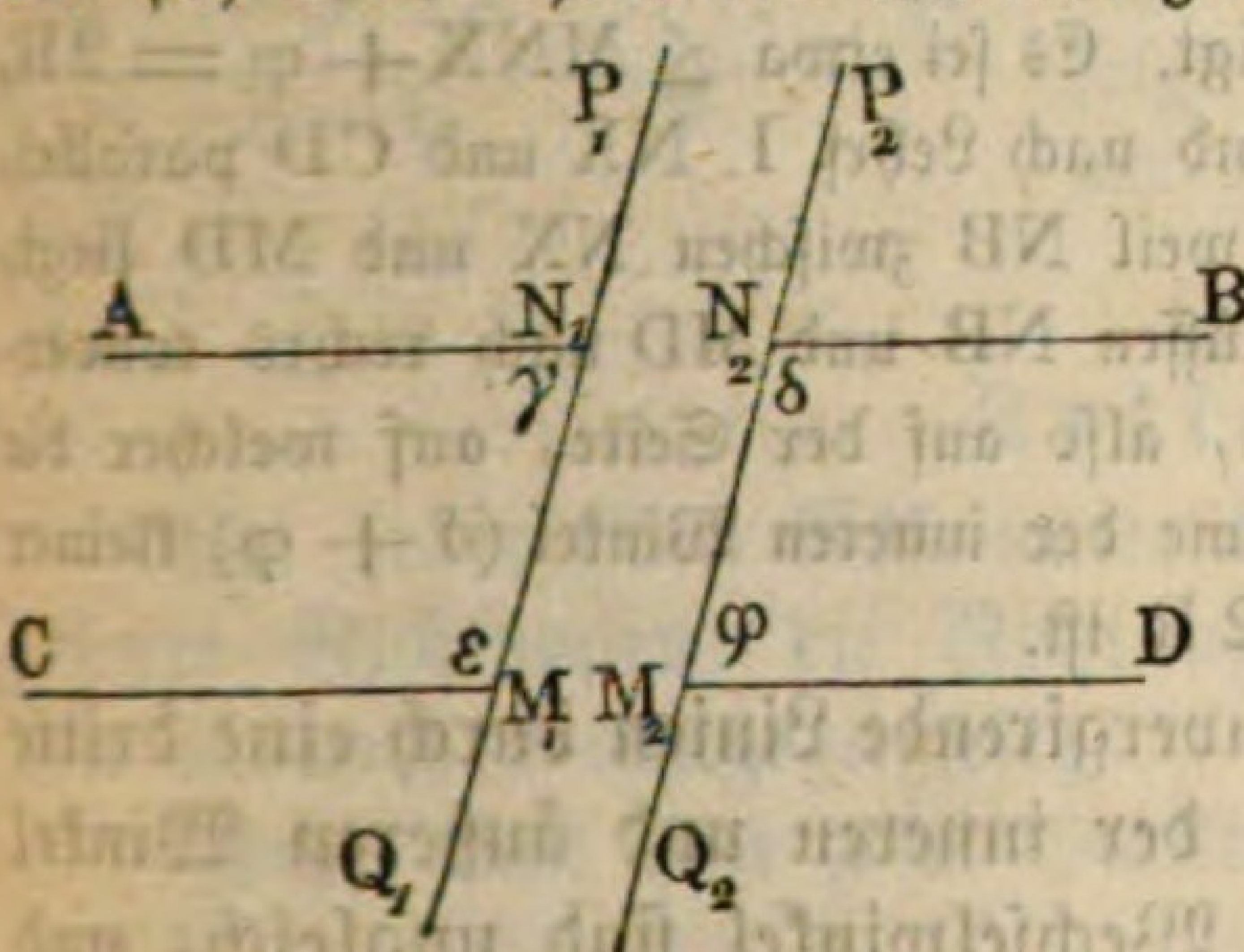
§. 12.

Abhängigkeit dieser Winkel und der Lage der Linien von einander.



Lehrsatz 1. Werden zwei Linien AB und CD durch eine dritte PQ geschnitten, und ist die Summe zweier inneren oder äußeren Winkel gleich 2R, oder sind ein Paar Gegen- oder Wechselwinkel gleich, so sind die beiden Linien AB und CD parallel.

Bew. Man kann nach §. 11. Lehrs. 1. alle zwölf dort angegebenen Gleichungen als Voraussetzung annehmen. — Zum Beweise soll gezeigt werden, daß man den Theil der Figur, welcher rechts von PQ liegt, so auf den Theil links von PQ legen kann, daß beide Figuren sich decken. Zu diesem Zwecke denke man sich beide Theile von einander getrennt, wie die zweite Figur zeigt, bringe

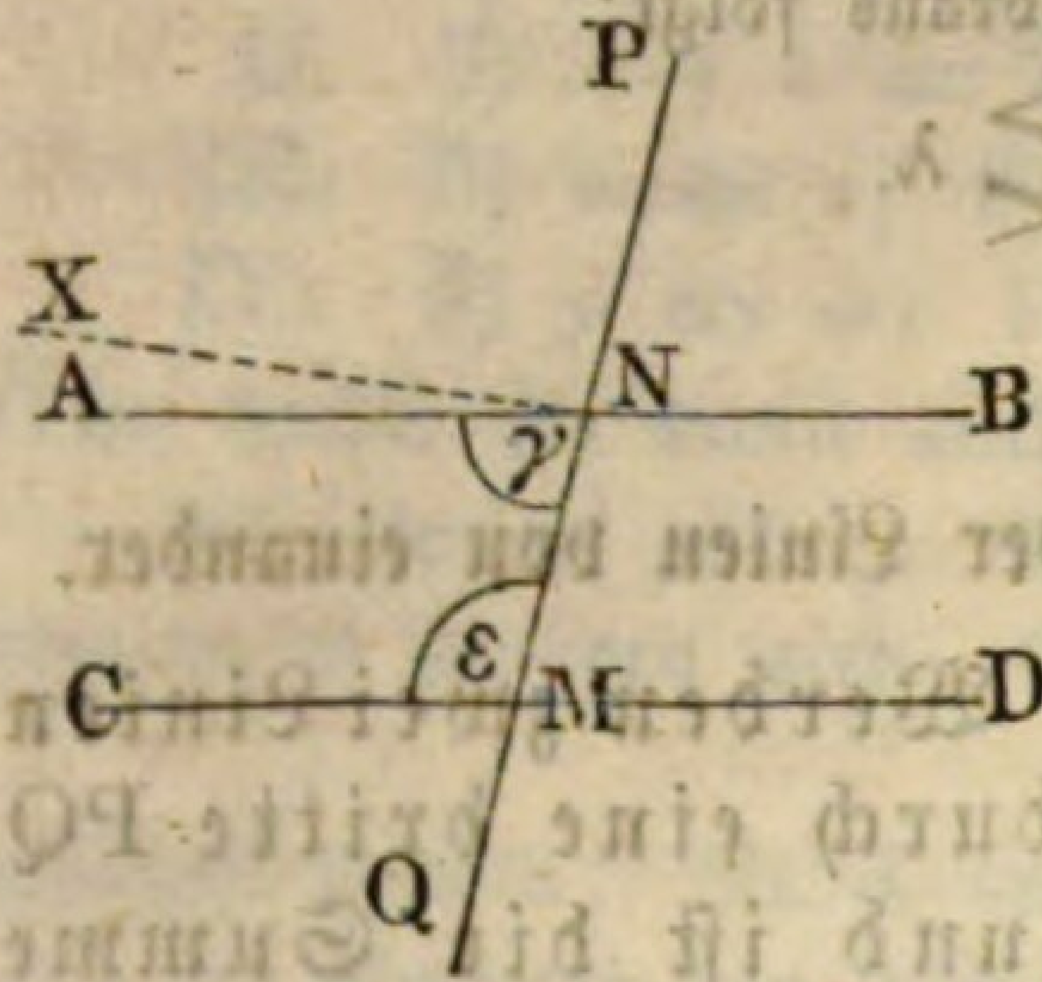


nun durch eine drehende Bewegung die Figur rechts von PQ in eine solche Lage, daß P_2 unten und Q_2 oben liegt, und lege sie nun so auf die Figur links von PQ, daß N_2 in M_1 und N_2M_2 entlang M_1N_1 fällt. Dann muß M_2 in N_1 fallen, weil $N_2M_2 = M_1N_1$ ist; ferner muß N_2B entlang M_1C fallen, weil die Winkel δ und ε gleich sind, und M_2D entlang N_1A, weil die Winkel φ und γ gleich sind. Es ist also nachgewiesen, daß man beide Theile der Figur so auf einander legen kann, daß sie sich decken, daß namentlich N_2B und M_2D resp. in M_1C und N_1A fallen. Nimmt man nun an, daß N_1A und M_1C nach links convergiren, so müßten M_2D und N_2B durch ihren Durchschnittspunkt gehen, also auch convergiren, und zwar in ihrer ursprünglichen Lage nach rechts, d. h. AB und CD müßten sich zweimal schneiden, was nach §. 5. Anmerk. 1. nicht möglich ist. Zu demselben Widerspruch führt die Annahme, daß N_1A und M_1C nach links divergiren; folglich müssen AB und CD parallel sein.

Lehrsatz 2. Werden zwei parallele Linien AB und CD durch eine dritte PQ geschnitten, so ist die Summe

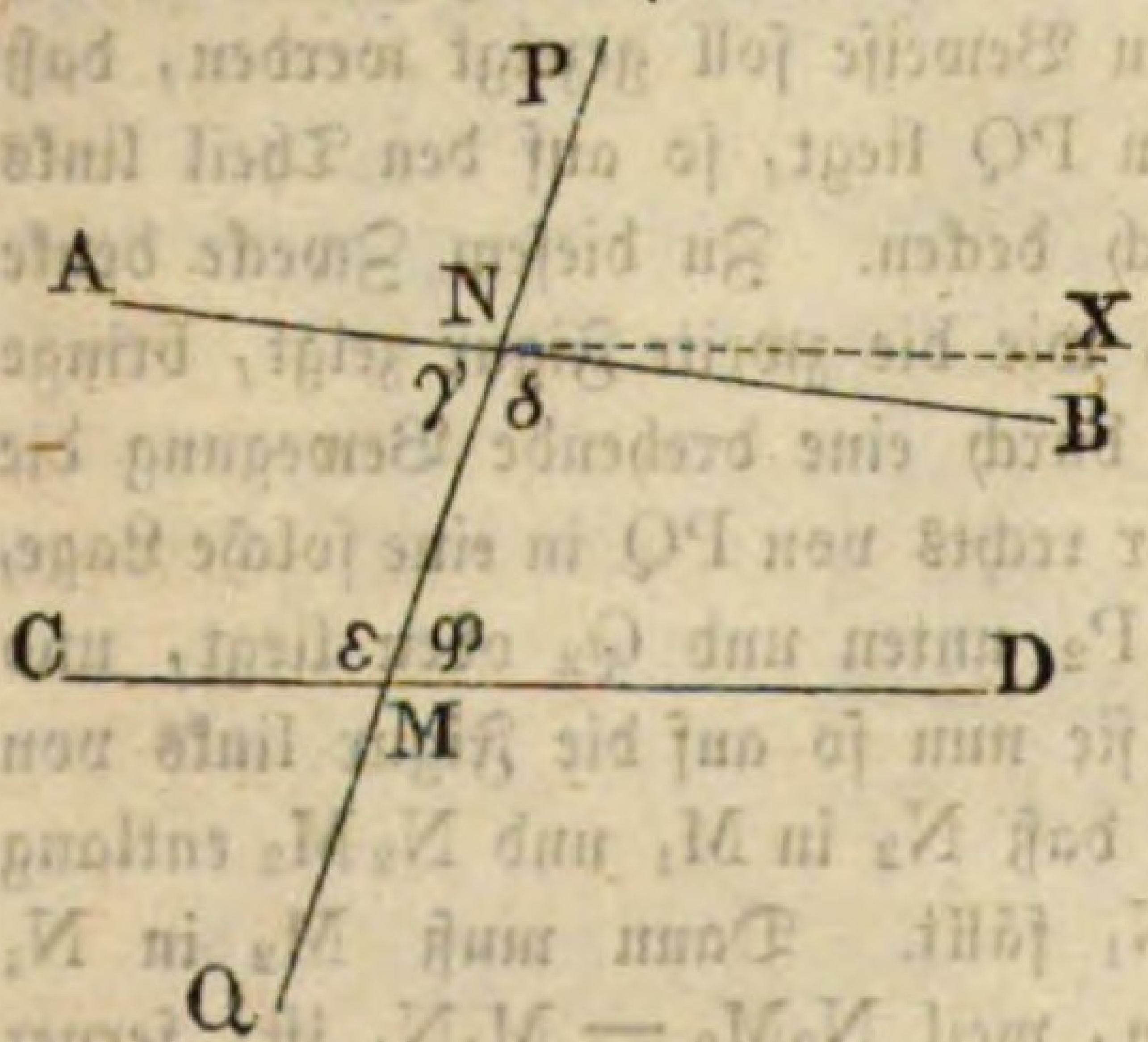
zweier inneren oder äußeren Winkel gleich 2R, und die Gegenwinkel, so wie die Wechselwinkel sind einander gleich.

Bew. Es genügt, die Richtigkeit einer der zwölf Gleichungen in §. 11. Lehrs. 1. nachzuweisen, z. B. $\varepsilon + \gamma = 2R$. Nimmt man aber an, es wäre $\varepsilon + \gamma$ ungleich 2R, so müßte ε mit einem anderen Winkel (statt γ) 2R betragen. Diesen Winkel denke man sich in N an NM angetragen, und $\measuredangle$ MNX sei dieser Winkel. Nach dem vorigen Lehrsatze folgt aber aus $\varepsilon + \measuredangle MNX = 2R$, daß NX $\parallel$ CD sein muß, was sich mit der Voraussetzung AB $\parallel$ CD nach §. 5. II. nicht verträgt; folglich muß $\varepsilon + \gamma = 2R$ sein.



Lehrsatz 3. Werden zwei Linien AB und CD durch eine dritte PQ geschnitten, und ist die Summe zweier inneren oder äußeren Winkel ungleich zwei Rechten, oder sind die Gegen- oder Wechselwinkel ungleich, so sind die beiden Linien nicht parallel, sondern convergiren nach der Seite hin, auf welcher die Summe der inneren Winkel kleiner als 2R ist.

Bew. Es sei $\varepsilon + \gamma > 2R$, also $\varphi + \delta < 2R$ (§. 11. Lehrs. 2.), so kann man sich den Winkel δ um so viel vergrößert denken, bis er mit φ zwei Rechte beträgt. Es sei etwa $\measuredangle MNX + \varphi = 2R$, so sind nach Lehrs. 1. NX und CD parallel, und weil NB zwischen NX und MD liegt, so müssen NB und MD nach rechts convergiren, also auf der Seite, auf welcher die Summe der inneren Winkel ($\delta + \varphi$) kleiner als 2R ist.



Lehrsatz 4. Werden zwei convergirende Linien durch eine dritte Linie geschnitten, so ist die Summe der inneren und äußeren Winkel ungleich 2R, und die Gegen- und Wechselwinkel sind ungleich; und zwar ist die Summe der innern Winkel auf der Seite kleiner als 2R, auf welcher die Linien convergiren; auf der andern Seite ist sie größer als 2R.

Der Beweis folgt leicht indirect aus den Sätzen 1. und 3. dieses §.

§. 13.

Folgerungen.

1) Von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie kann man auf diese nur eine Senkrechte fällen.

Beweis indirect (§. 12. Lehrs. 1.).

2) Stehen zwei (oder mehrere) Linien auf derselben dritten senkrecht, so sind sie parallel. (§. 12. Lehrs. 1.)

3) Steht eine Linie auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht. (§. 12. Lehrs. 2.)

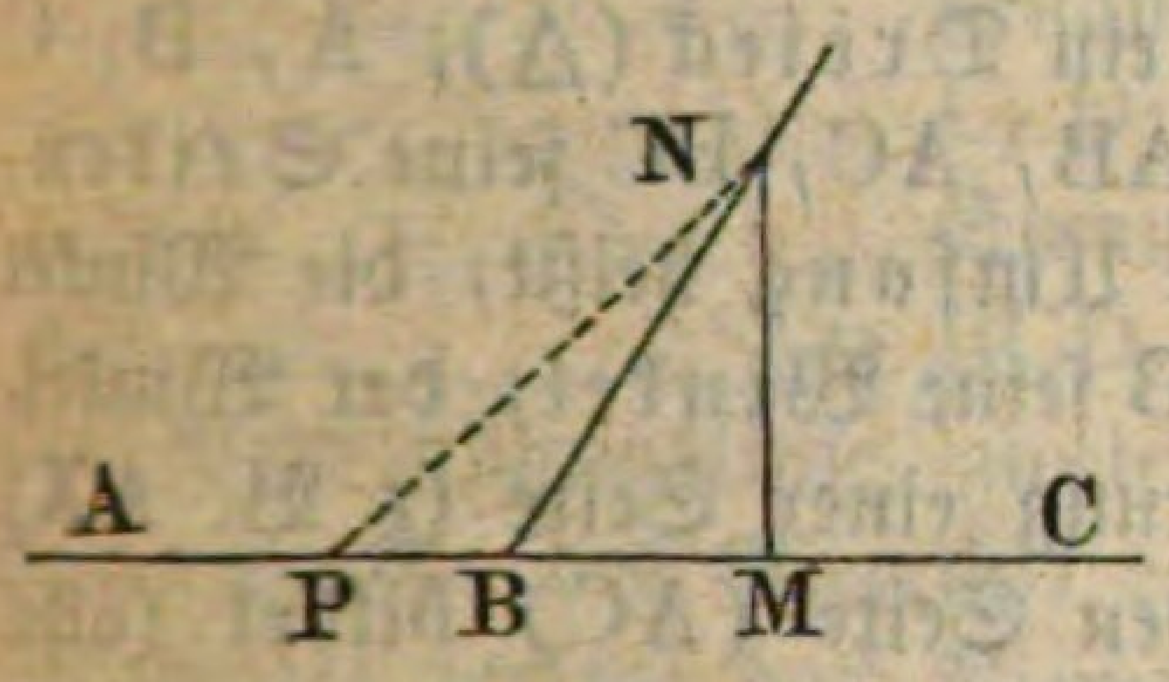
4) Fällt man von einem Punkte auf zwei parallele Linien Lothe, so liegen beide Lothe in einer geraden Linie. (Indirect aus 3. und 1.)

5) Errichtet man auf jeden Schenkel eines nicht flachen Winkels α in einem beliebigen Punkte desselben eine Senkrechte, so müssen diese Senkrechten, gehörig verlängert, sich schneiden.

Bew. Angenommen, die Senkrechten wären parallel, so könnte man durch den Scheitel des $\measuredangle\alpha$ eine mit beiden Senkrechten parallele Linie legen. Auf dieser Linie müßte dann nach 3) jeder Schenkel des $\measuredangle\alpha$ senkrecht stehen, und dies ist nach §. 9. Nr. 2. und 11. nicht möglich.

6) Fällt man von einem Punkte des gemeinschaftlichen Schenkels ungleicher Nebenwinkel ein Loth auf die Richtung der andern Schenkel, so liegt das Loth in der Ebene des spitzen Winkels und trifft den andern Schenkel dieses spitzen Winkels.

Bew. Das von N auf AC gefällte Loth kann zunächst nicht B treffen,



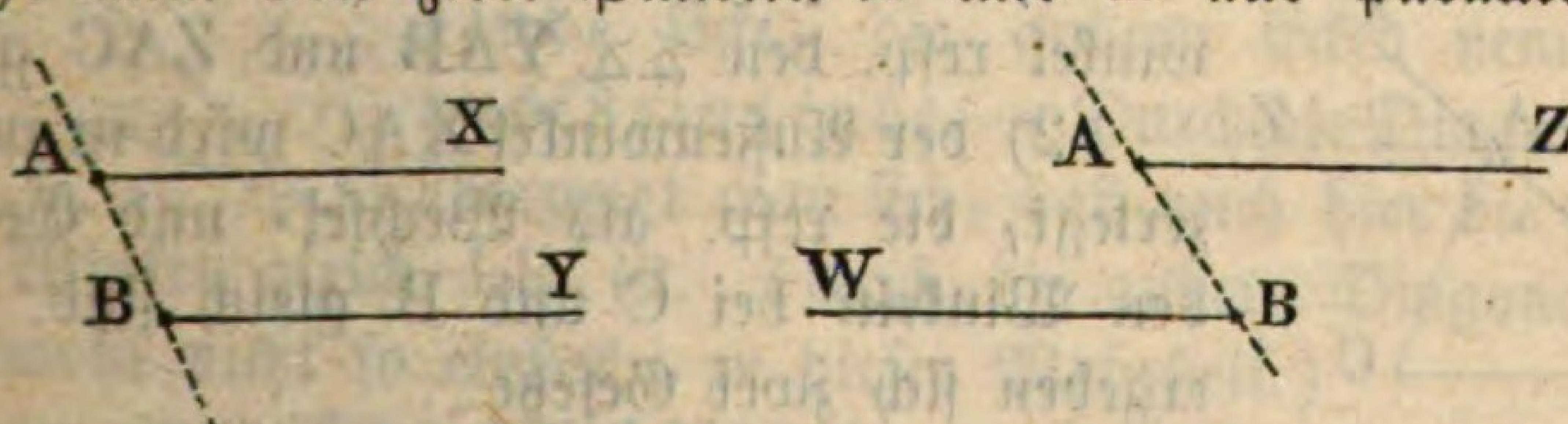
weil die Winkel bei B schiefe sein sollen; es kann ferner nicht den Schenkel BA des stumpfen Winkels NBA treffen; denn wäre NP das Loth, so würde aus $\measuredangle NPB + \measuredangle NBP > 2R$ folgen, daß PN und BN nach N hin divergiren müssen; folglich kann das von N auf AC gefällte Loth nur den Schenkel BC (etwa in M) treffen.

§. 14.

Erklärung.

Bei jeder Linie NM unterscheidet man zwei einander entgegengesetzte Richtungen: die Richtung von N nach M ist der Richtung von M nach N entgegengesetzt.

Zieht man von zwei Punkten A und B aus parallele Linien,



so daß jede durch einen dieser Punkte begrenzt wird, so können beide Linien entweder nach derselben Richtung hin gezogen werden (wie AX und BY) und liegen dann auf derselben Seite der Verbindungslinie AB, oder sie erstrecken sich von A und B aus nach entgegengesetzten Richtungen (wie AZ und BW) und liegen dann auf ent-

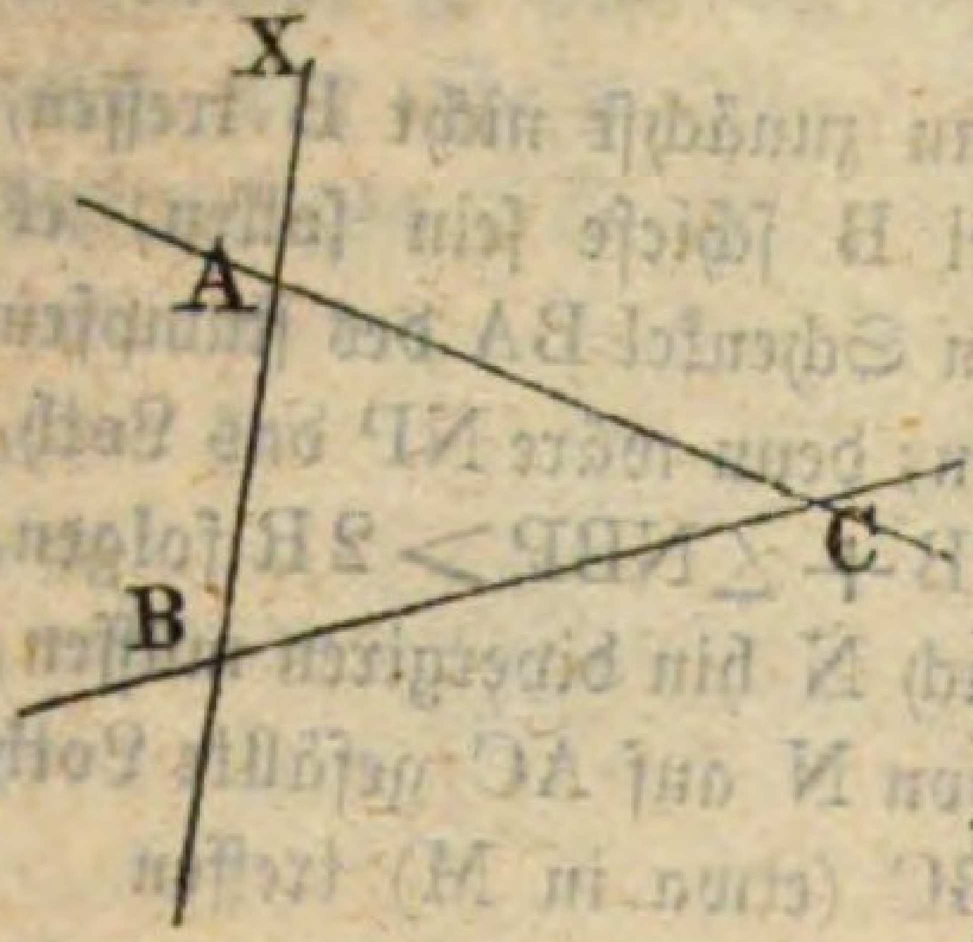
gegengesetzten Seiten der Verbindungslinie AB. Im ersten Falle sollen AX und BY *gleichlaufend-parallele* Linien heißen, im zweiten Falle aber nennen wir AZ und BW *entgegengesetzt-parallele* Linien. — Man halte bei dieser Erklärung aber auch fest, daß von den beiden Richtungen, welche jede einzelne der parallelen Linien an sich hat, diejenige gemeint ist, welche von dem begrenzenden Punkte (A oder B) ausgeht.

Abhängigkeit der Winkel von einander in geschlossenen von geraden Linien begrenzten Figuren.

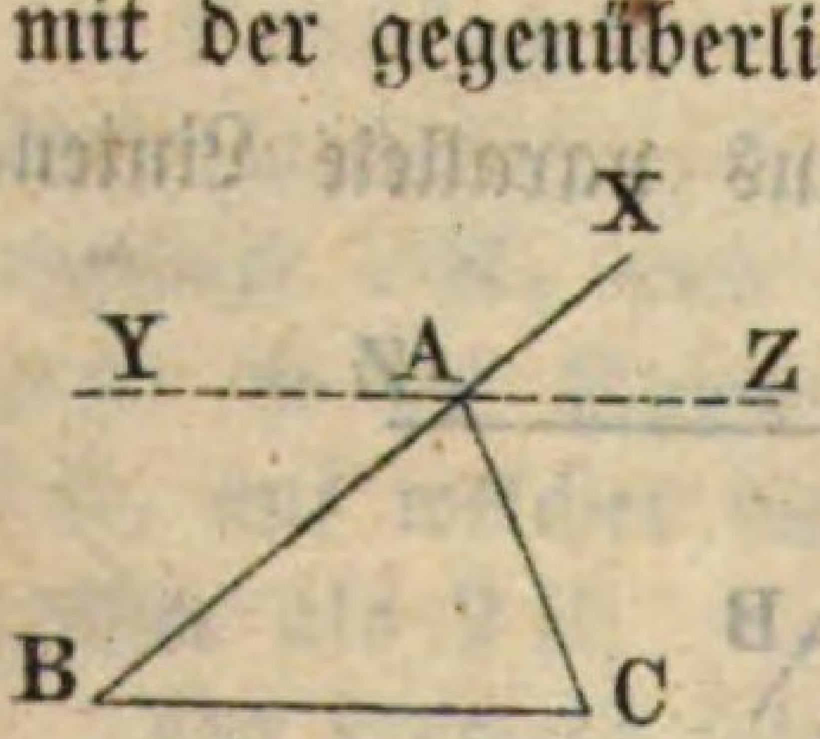
§. 15.

Das Dreieck.

Verlängert man zwei convergirende Linien AC und BC, welche durch eine dritte AB geschnitten werden, bis zu ihrem Durchschnittspunkte C, so begrenzen diese drei Linien einen Theil der Ebene vollständig. Diese begrenzte Ebene ABC heißt ein *Dreieck* (Δ); A, B, C sind seine *Ecken*; AB, AC, BC seine *Seiten*, deren Summe sein *Umfang* heißt; die Winkel ABC, BCA, CAB seine *Winkel*; der Winkel, den die Verlängerung einer Seite (z. B. AX) mit der anliegenden Seite (AC) bildet (also ∡ XAC), heißt ein *Außenwinkel* des Dreiecks; der Winkel des Dreiecks, welcher sein Nebenwinkel ist (∡ CAB), heißt sein *anliegender innerer Winkel*; die beiden anderen sind seine *gegenüberliegenden inneren Winkel*.



Legt man durch eine Ecke A des Dreiecks ABC eine Parallele YZ mit der gegenüberliegenden Seite BC, so findet man zweierlei:



1) die Winkel bei B und C sind als Wechselwinkel resp. den ∡∡ YAB und ZAC gleich;

2) der Außenwinkel XAC wird in zwei Theile zerlegt, die resp. als Wechsel- und Gegenwinkel den Winkeln bei C und B gleich sind. Hieraus ergeben sich zwei Gesetze:

I. *Die Summe der drei Winkel jedes Dreiecks ist gleich 2R oder 180°.*

II. *Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der gegenüberliegenden inneren Winkel*, folglich größer als jeder einzelne derselben.

Hieraus folgt weiter:

III. Jeder Winkel eines Dreiecks ist ein hohler, und die Summe je zweier Winkel ist kleiner als 2 R.

IV. Ein Dreieck kann enthalten:

1) *einen stumpfen Winkel*, und dann sind die beiden andern spitz; das Dreieck heißt dann ein *stumpfwinkliges* Dreieck;

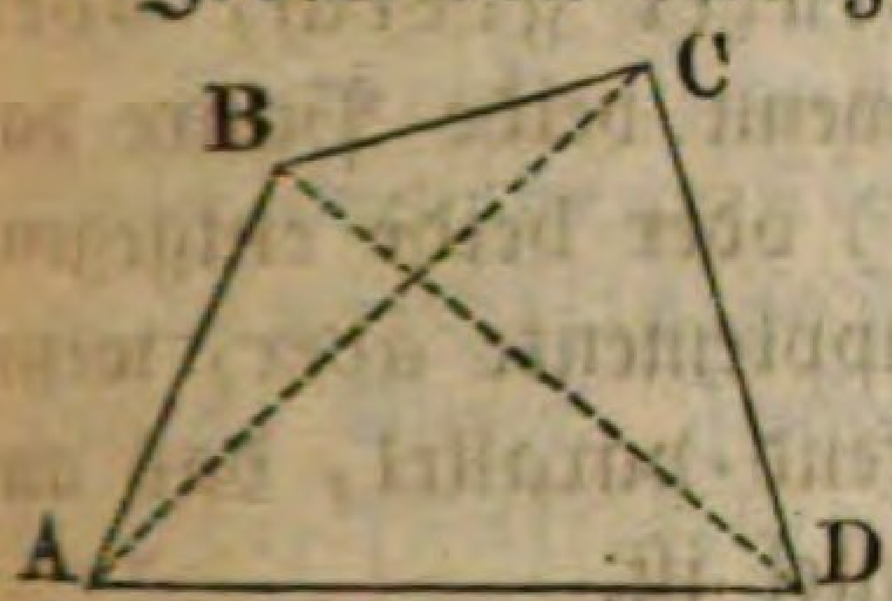
2) *einen rechten Winkel*, und dann sind die beiden andern spitz und Complemente; das Dreieck heißt ein *rechtwinkliges*, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die *Hypotenuse*; die beiden anderen Seiten werden die *Katheten* genannt;

3) *drei spitze Winkel*; das Dreieck heißt dann ein *spitzwinkliges*.

§. 16.

Das Viereck.

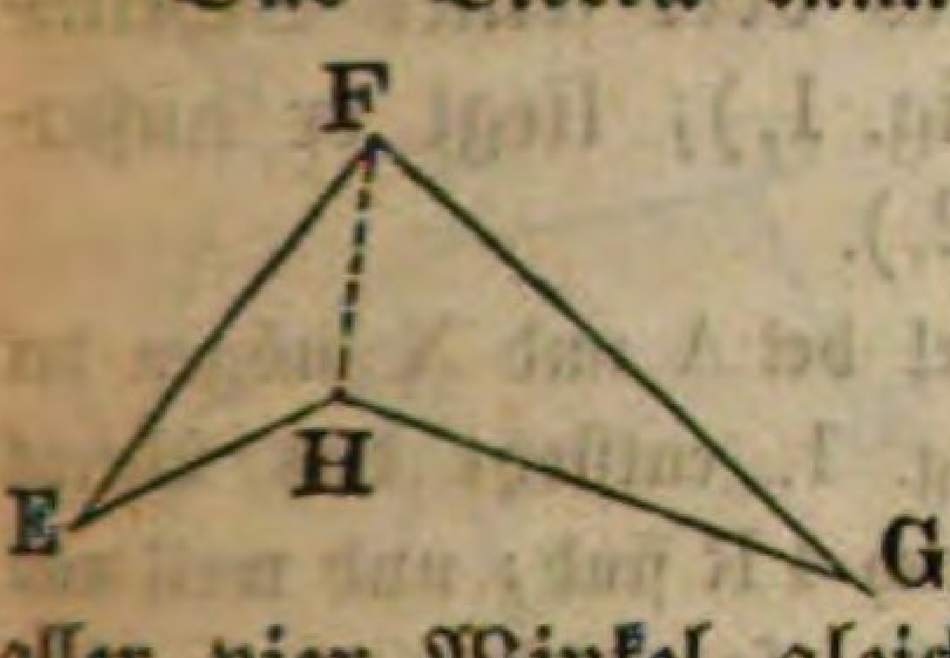
Jeder von vier geraden Linien vollständig begrenzte Theil einer Ebene (wie ABCD) wird ein *Viereck* (⏢) genannt. Das Viereck hat vier Ecken (A, B, C, D), vier Seiten (AB, BC, CD, DA), deren Summe sein Umfang ist, vier Winkel (ABC, BCD, CDA, DAB) und acht Außenwinkel.



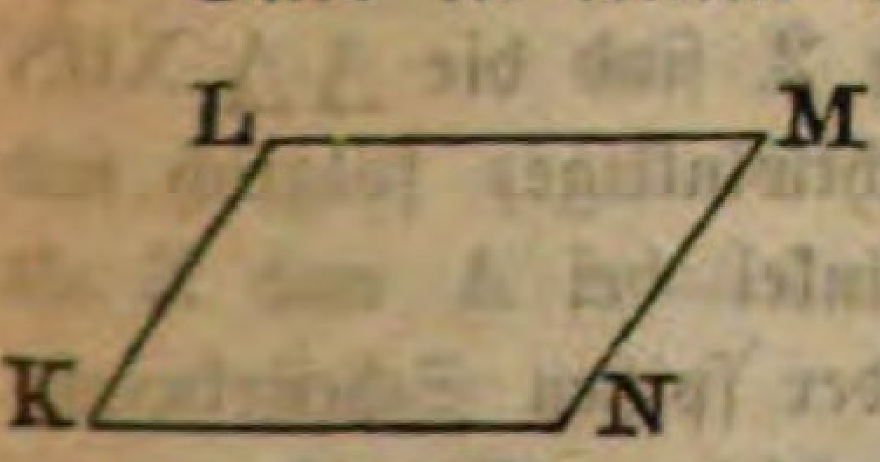
Die Verbindungslinie zweier gegenüberliegenden Ecken heißt eine *Diagonale* des Vierecks; es giebt deren zwei: AC und BD. Jede Diagonale zerlegt das Viereck in zwei Dreiecke, deren Winkel zusammen die des Vierecks ausmachen, woraus folgt:

In jedem Viereck ist die Summe aller vier Winkel gleich 4 R oder 360°.

Das Viereck kann sonach auch *einen* convexen Winkel haben, wie der Winkel bei H in ⏢ EFGH; man sagt dann: das Viereck hat bei H eine *einspringende* Ecke; die andern Ecken nennt man *ausspringende*. — Durch die Diagonale FH überzeugt man sich, daß auch hier die Summe aller vier Winkel gleich 4 R ist. (Auch die andere Diagonale EG führt, wiewohl nicht so einfach, zu dieser Wahrheit.)

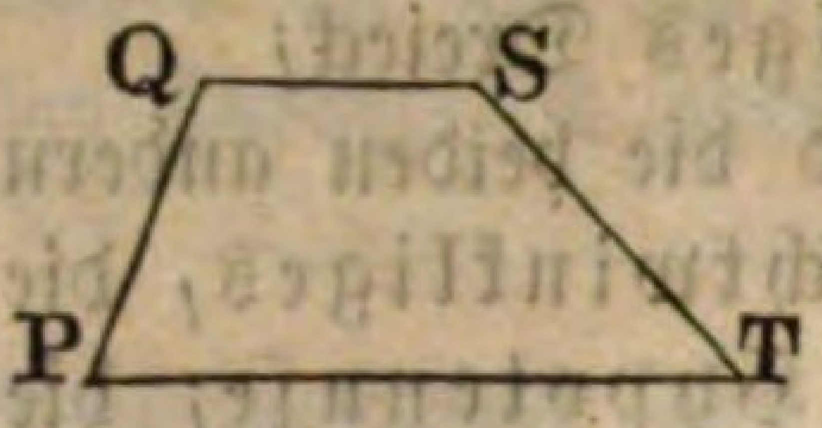


Sind in einem Viereck (KLMN) je zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so wird es ein *Parallelogramm* (#) genannt. Im Parallelogramm betragen je zwei derselben Seite anliegende Winkel zusammen 2 R; die *gegenüberliegenden Winkel sind einander gleich* (z. B. ∠K = ∠M, weil jeder



das Supplement des Winkels N ist). Hieraus folgt noch: ist ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, so sind alle vier Winkel rechte; man unterscheidet daher rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme.

Hat ein Viereck nur ein Paar paralleler Seiten (z. B. PQST, in welchem PT $\neq\!\!\!\!\!\!=$ QS), so wird es ein Paralleltrapez oder nur ein Trapez genannt. Das Paralleltrapez hat, wie das Parallelogramm, nur hohle Winkel, und die Summe solcher zwei Winkel, welche einer der nicht parallelen Seiten anliegen, ist gleich 2R.

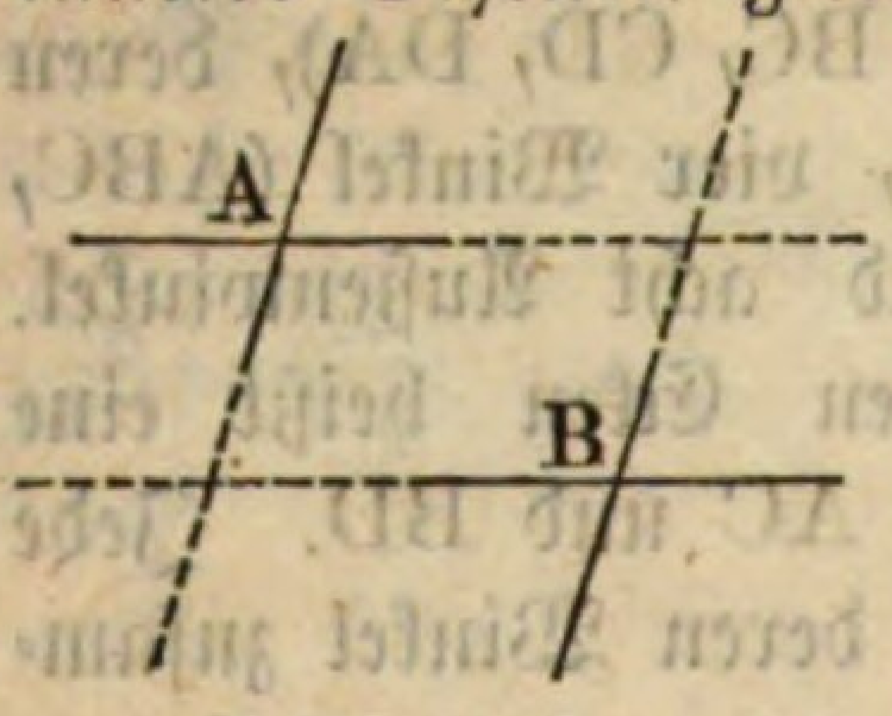


Ein Viereck ohne parallele Seiten wird auch ein Trapezoid genannt.

§. 17.

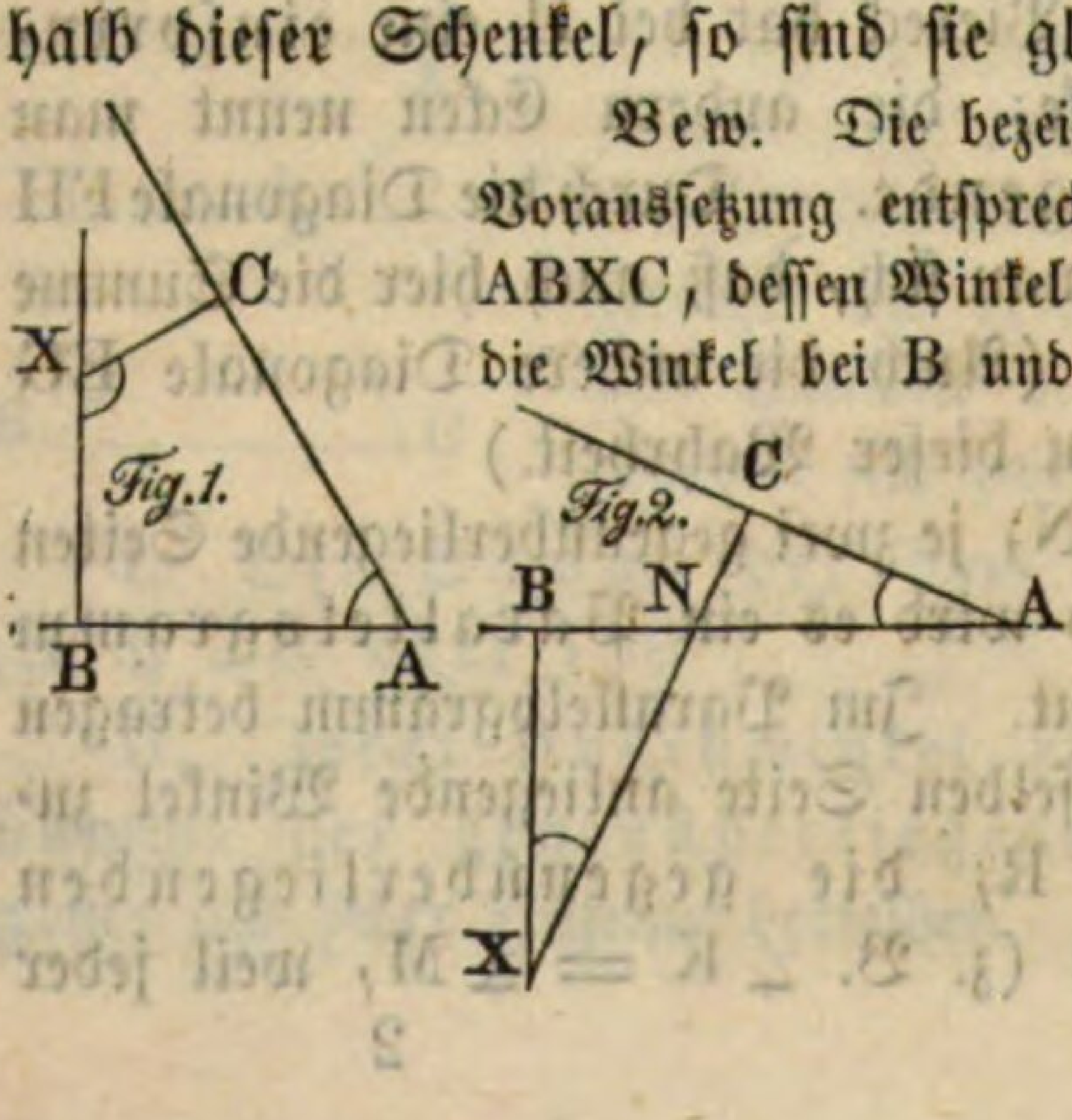
Lehrsätze.

1) Sind die Schenkel eines Winkels den Schenkeln eines andern parallel, so sind die Winkel gleich, oder Supplements-Winkel. Gleich sind sie, wenn beide Paare paralleler Schenkel gleichlaufend-parallel (§. 14.) oder beide entgegengesetzt-parallel sind; Supplemente aber, wenn das eine Paar gleichlaufend-parallel, das andere entgegengesetzt-parallel ist.



Bew. Haben die Winkel bei A und B parallele Schenkel, so begrenzen diese Schenkel, gehörig verlängert, ein Parallelogramm.

2) Stehen die Schenkel eines Winkels auf den Schenkeln eines andern senkrecht, so sind die Winkel gleich, oder Supplements-Winkel. Liegt der Scheitel des einen Winkels zwischen den Schenkeln des andern Winkels oder seines Scheitelwinkels, so sind die Winkel Supplemente (Fig. 1.); liegt er außerhalb dieser Schenkel, so sind sie gleich (Fig. 2.).



Bew. Die bezeichneten Winkel bei A und X mögen der Voraussetzung entsprechen. In Fig. 1. entsteht das Viereck ABXC, dessen Winkel zusammen gleich 4 R sind; und weil nun die Winkel bei B und C rechte sind, so muß $\measuredangle A + \measuredangle X = 2R$ sein. Jeder dieser Winkel ist also noch dem Nebenwinkel des andern gleich. In Fig. 2. sind die $\Delta\Delta$ XBN und ACN rechtwinklige; folglich sind die spitzen Winkel bei A und X als Complemente der spitzen Scheitelwinkel bei N einander gleich. — Man kann auch

für beide Figuren den Beweis dadurch führen, daß man durch A Parallelen mit den Schenkeln des Winkels X zieht.

§. 18.
Das Vieleck.

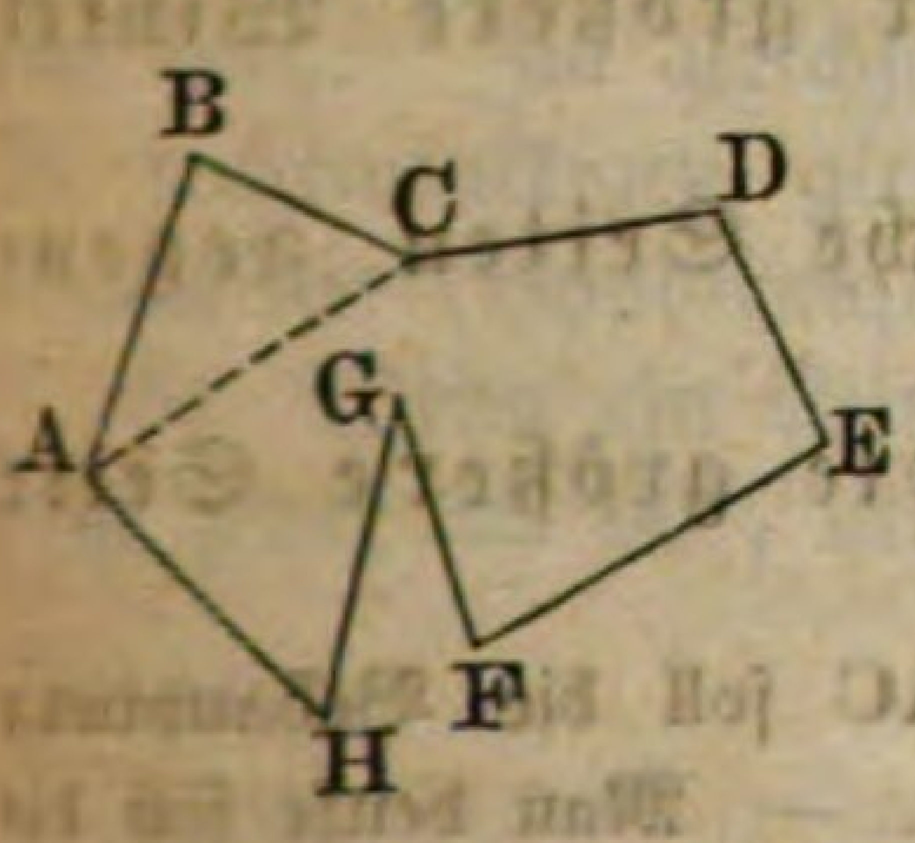
Eine durch fünf, sechs, sieben u. s. w. gerade Linien vollständig begrenzte Ebene heißt resp. ein Fünfeck, Sechseck, Siebeneck u. s. w., allgemein: ein Vieleck oder Polygon. Das n-Eck hat n Seiten, n Winkel (auch Umfangs-Winkel genannt), 2n Außenwinkel und $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen. Letzteres folgt so: man kann von jeder Ecke aus n — 3 Diagonalen ziehen (nämlich keine Diagonale nach der Ecke selbst und den beiden benachbarten), und weil n Ecken sind, so giebt dies n(n — 3) Diagonalen. Hierbei ist aber jede Diagonale zweimal gezählt worden, nämlich von jedem ihrer Endpunkte aus gezogen; folglich ist die wahre Anzahl: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Anmerk. Jede vollständig begrenzte Ebene nennt man auch (im engeren Sinne) eine ebene Figur, und unterscheidet geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren. Zur ersteren Art gehören die Polygone. Statt Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. sagt man auch: eine dreiseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w. Figur. Die Summe aller begrenzenden Linien ist der Umfang der Figur.

§. 19.
Lehrsatz.

Die Summe aller Umfangswinkel in einem n-Eck ist gleich (n — 2) . 2 R.

Bew. Bezeichnet S diese Summe, und zieht man eine Diagonale, welche eine ausspringende Ecke abschneidet, z. B. die Diagonale AC, so wird das n-Eck in ein Dreieck und ein n — 1-Eck zerlegt. Da nun die Summe der Winkel in beiden Figuren zusammen gleich S ist, im Dreieck allein aber gleich 2 R, so muß die Summe der Winkel im n — 1-Eck gleich S — 2 R sein. Da man ferner vom n — 1-Eck ebenso zum n — 2-Eck u. s. f. bis zum Dreieck fortgehen kann, so erhält man:



im n — 1-Eck ist die Summe der Winkel = S — 2 R,
» n — 2-Eck » » » » » = S — 2 . 2 R,
» n — 3-Eck » » » » » = S — 3 . 2 R,
» n — 4-Eck » » » » » = S — 4 . 2 R,
u. s. w.
im n — (n — 3)-Eck » » » » » = S — (n — 3) 2 R.

Die Summe der Winkel im n — (n — 3)-Eck, d. h. im Dreieck, ist aber bekannt: gleich 2 R; folglich muß S — (n — 3) 2 R = 2 R sein, oder

$$S = (n-3)\,2R + 2R = (n-2)\,2R.$$

Uebrigens wird auch durch eine Diagonale, welche eine einspringende Ecke abschneidet, die Summe der Winkel um 2 R vermindert, z. B. durch FH. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Beisp. Ein Zehneck hat lauter gleiche Winkel; wie groß ist jeder?

Antw. Die Summe aller = 16 R, daher jeder einzelne = $\frac{16}{10}$ R = 144°.

Anmerk. Um dem Gedächtniß zu Hülfe zu kommen, kann man die Formel S = (n — 2) 2 R sehr schnell so herleiten: Man denke sich ein n-Eck mit nur ausspringenden Ecken und verbinde jede mit einem Punkte innerhalb. So entstehen n Dreiecke, in welchen die Summe aller Winkel = n . 2 R ist. Zieht man nun die Summe der Winkel um jenen Punkt herum ab, also 4 R, so bleibt die Summe der Umfangswinkel als Rest: gleich n . 2 R — 4 R = (n — 2) 2 R.

Zweites Kapitel.

Abhängigkeit der Winkel und der Länge der Linien in geradlinigen Figuren von einander. Anzahl der bestimmenden Stücke solcher Figuren. Congruenz dieser Figuren.

§. 20.

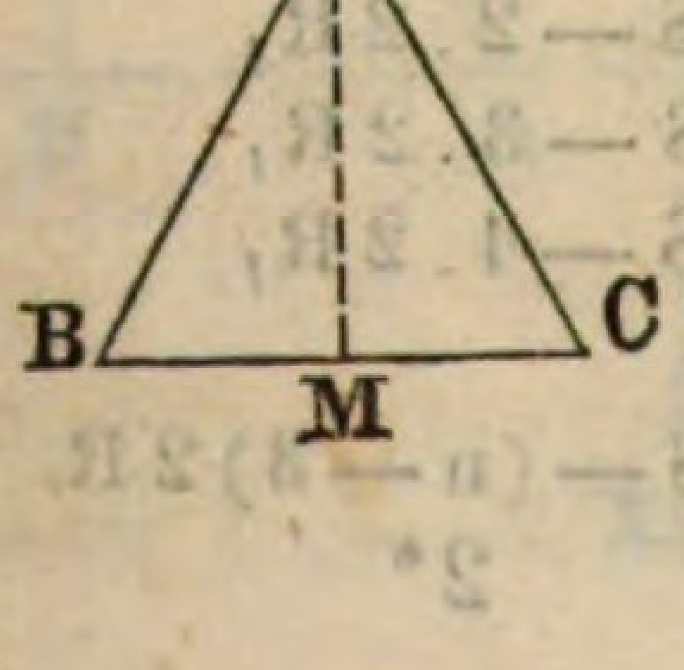
Lehrsätze.

Die Untersuchung, welchen Einfluß die Länge der Seiten eines Dreiecks auf die Winkel hat, und welchen Einfluß umgekehrt die Winkel auf die Länge der Seiten haben, führt zu folgenden Sätzen:

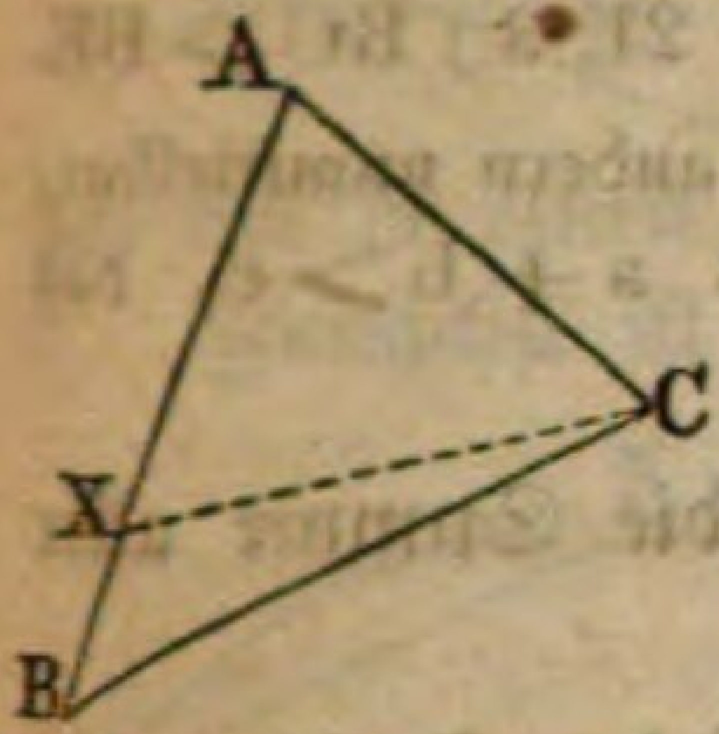
In jedem Dreieck liegen:

I. gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber;
II. der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber;
III. gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber;
IV. dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber.

Bew. zu I. Aus der Voraussetzung AB = AC soll die Behauptung ∡ C = ∡ B bewiesen werden. — Man denke sich die den ∡ A halbirende Linie AM und lege △ AMC so um AM herum, daß es auf △ AMB fällt. Weil AM in AM bleibt, so muß, wegen Gleichheit der beiden Winkel bei A, AC in AB fallen, folglich auch, weil diese Seiten gleich sind, C in B. Sonach liegt CM in BM und ∡ ACM deckt den ∡ ABM.



Bew. zu II. Aus der Voraussetzung $AB > AC$ soll die Beh. $\measuredangle ACB > \measuredangle ABC$ bewiesen werden. — Aus $AB > AC$ folgt, daß ein Theil der $AB = AC$ sein muß. Dieser Theil sei AX; man ziehe CX. Aus $AC = AX$ folgt (nach I.): $\measuredangle AXC = \measuredangle ACX$, und weil als Außenwinkel (§. 15. II.) $\measuredangle AXC$ größer als $\measuredangle ABC$ ist, so muß auch $\measuredangle ACX$ größer als $\measuredangle ABC$ sein, daher um so mehr $\measuredangle ACB > \measuredangle ABC$.



Die Beweise zu III. und IV. ergeben sich aus I. und II. sehr einfach indirect.

§. 21.
Erklärung und Gesetze.

Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten heißt gleichschenklig; die gleichen Seiten heißen die Schenkel, die dritte Seite heißt die Grundlinie, die gegenüberliegende Ecke die Spitze des Dreiecks. — Ein Dreieck mit drei gleichen Seiten heißt gleichseitig, mit drei ungleichen Seiten: ungleichseitig. — Aus dem vorigen §. folgen noch die nachstehenden Sätze:

1) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; und sind zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig.

2) Im gleichseitigen Dreieck sind die drei Winkel einander gleich; und jedes Dreieck mit drei gleichen Winkeln ist gleichseitig.

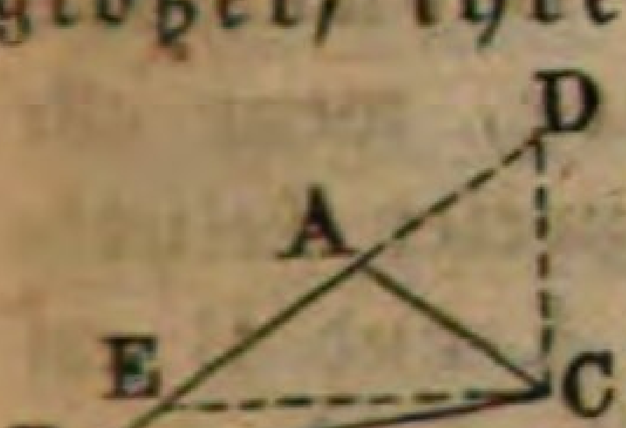
3) Im stumpfwinkligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte; im rechtwinkligen Dreieck ist es die Hypotenuse.

4) Ist in einem Dreieck eine Seite nicht größer als jede der beiden andern Seiten, so ist der ihr gegenüberliegende Winkel spitz; namentlich sind im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie spitz. Im gleichseitigen Dreieck ist jeder Winkel $= \frac{2}{3} R = 60°$. Im rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck ist jeder Winkel an der Grundlinie (Hypotenuse) $= \frac{1}{2} R = 45°$.

5) Wenn ein Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks $= 60°$ ist, so ist jeder $= 60°$, also das Dreieck gleichseitig.

§. 22.
Gesetze.

1) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer, ihre Differenz kleiner als die dritte Seite.



Bew. Macht man $AD = AC = AE$, so ist BD die Summe, BE die Differenz der Seiten AB und AC. Zieht man CD und CE, so sind ADC und AEC gleichschenklige Dreiecke. Hieraus folgt zuerst, daß $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC$ ist;

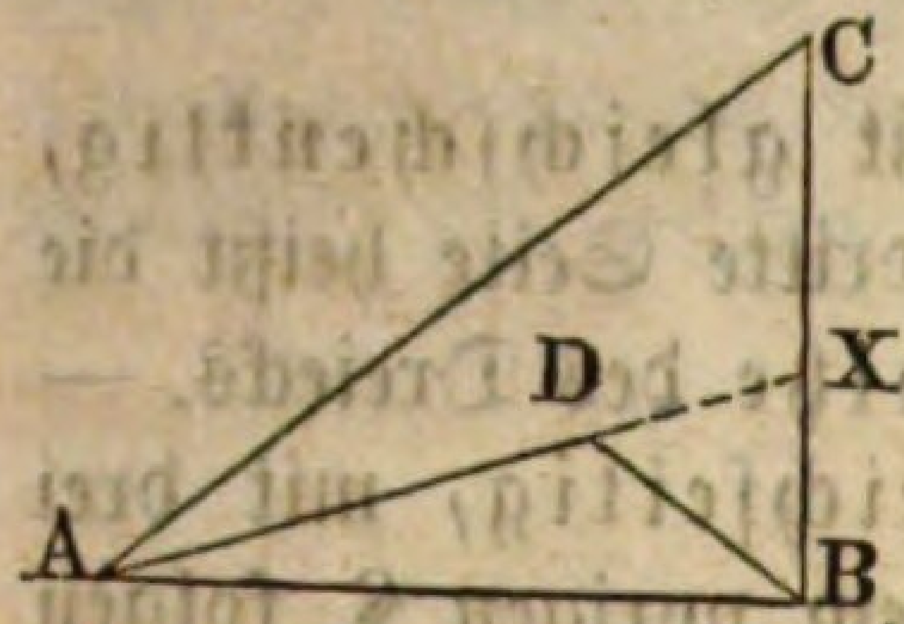
daher ist $\measuredangle$ BCD > $\measuredangle$ BDC, also (§. 20. IV.) BD > BC. Dann folgt noch, daß $\measuredangle$ AEC spitz, also $\measuredangle$ BEC stumpf ist, folglich (§. 21. 3.) BC > BE.

Uebrigens folgt jeder der beiden Sätze in 1) aus dem andern unmittelbar; denn bezeichnen a, b, c die drei Seiten, so folgt aus $a + b > c$, daß $a > c - b$ ist, und umgekehrt.

2) Jede Seite eines Vielecks ist kleiner als die Summe aller übrigen Seiten.

Beweis folgt leicht aus 1), wenn man von einem Endpunkte der ersten Seite alle Diagonalen zieht.

3) Haben zwei Dreiecke ABC und ABD eine gemeinschaftliche Seite AB, und liegt das eine (ABD) ganz innerhalb des anderen, so ist AC + CB > AD + DB; auch ist noch $\measuredangle$ D > $\measuredangle$ C.



Bew. Verlängert man AD bis zum Durchschnittspunkte X mit BC, so folgt:

$$AC + CX > AD + DX$$
$$DX + XB > DB, \text{ folglich, wenn man addirt:}$$
$$AC + CX + XB + DX > AD + DB + DX.$$

Zieht man von beiden Seiten DX ab, so bleibt:

$$AC + CB > AD + DB.$$

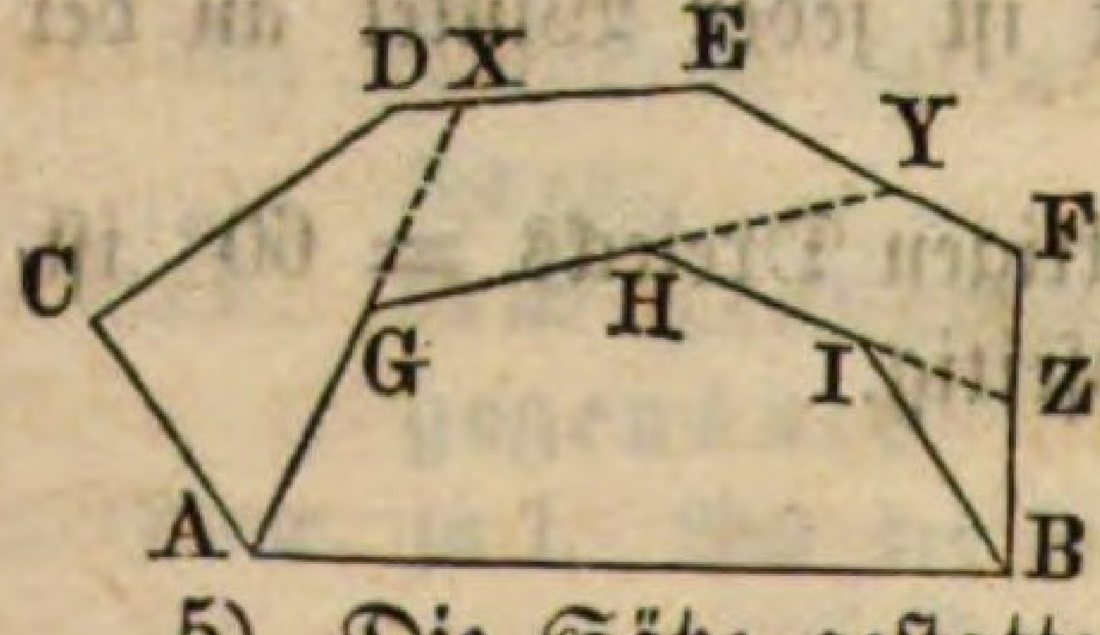
Endlich ist noch als Außenwinkel:

$$\measuredangle ADB > \measuredangle AXB > \measuredangle ACB.$$

4) Der vorstehende Satz gilt auch für Vielecke, wenn sie eine gemeinschaftliche Seite AB haben, und das eine ganz innerhalb des andern liegt und nur ausspringende Ecken hat. Es ist dann

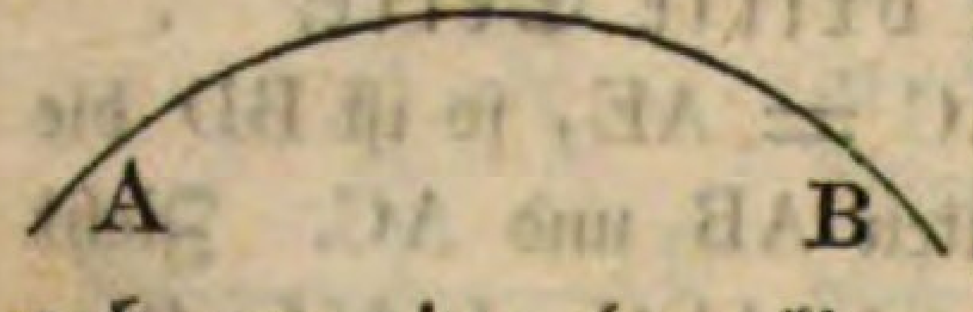
$$AC + CD + DE + EF + FB > AG + GH + HI + IB,$$

oder, wie man gewöhnlich sagt, es ist dann die gebrochene Linie ACDEFB größer als die gebrochene Linie AGHIB.



Der Beweis folgt leicht aus Nr. 2., wenn man AG, GH, HI resp. bis X, Y, Z verlängert und die Figuren ACDX, GXEY, HYFZ und IZB betrachtet.

5) Die Sätze gestatten eine Anwendung auf krumme Linien. — Eine krumme Linie, welche durch zwei Punkte A und B geht, heißt zwischen diesen Grenzen A und B durchaus concav oder durchaus convex, wenn alle



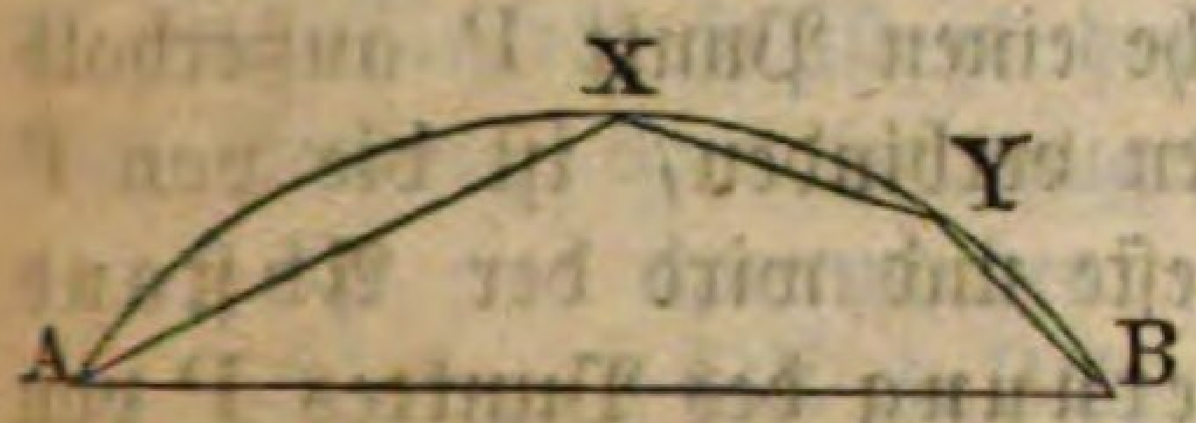
geraden Verbindungslinien je zweier beliebig nah an einander liegenden Punkte derselben zwischen A und B auf ein und derselben Seite der Linie liegen. Diese Seite heißt dann

ihre concave Seite, die andere ihre convexe. Die Linie CND



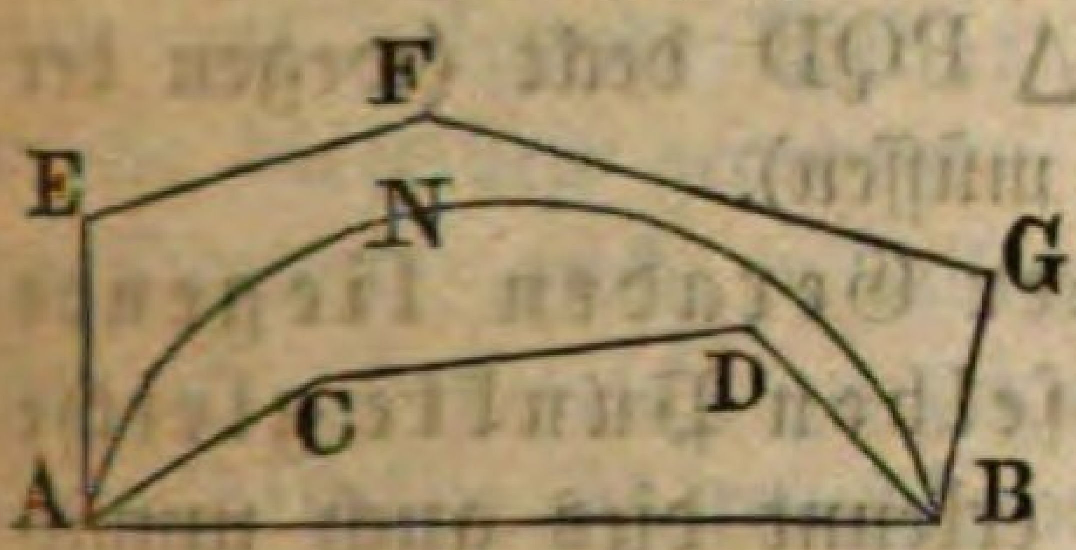
ist nicht von einerlei Krümmung, sondern geht bei N aus concav in convex über: sie hat bei N einen Wendepunkt.

Zunächst ist nun leicht zu zeigen, daß eine krumme Linie, welche



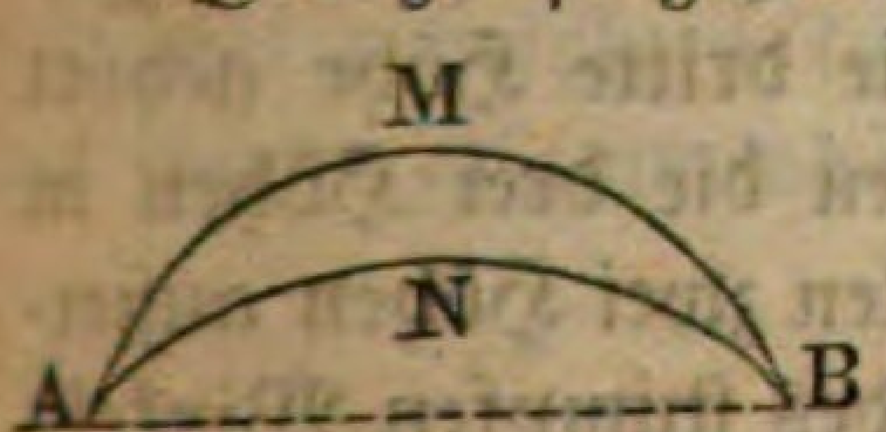
A mit B verbindet, größer ist, als die Gerade AB. Zieht man nämlich die gebrochene Linie AXYB, deren Punkte X und Y in der krummen liegen, und schaltet dann zwischen A und X, X und Y, Y und B auf dieselbe Weise gebrochene Linien ein, und fährt so fort, so nähern sich diese gebrochenen Linien der krummen nach und nach immer mehr. Bei jedem neuen Einschalten erhält man immer eine A mit B verbindende gebrochene Linie, welche also größer als AB ist; diese gebrochenen Linien werden aber selbst, je mehr sie sich der krummen nähern, immer größer; daher ist auch die krumme selbst größer als AB.

Betrachten wir jetzt den Fall, wenn die Endpunkte der Geraden AB durch eine durchaus concave Linie ANB verbunden sind, und dann noch auf derselben Seite von AB durch zwei gebrochene Linien, von denen die eine ACDB nur ausspringende Ecken hat und ganz von ANB umschlossen wird, die andere AEFGB aber die krumme



ganz umschließt. Die krumme Linie ist dann größer als ACDB, aber kleiner als AEFGB. — Zum Beweise schalte man zwischen ACDB und ANB gebrochene Linien mit ausspringenden Winkeln ein, die sich nach und nach der krummen Linie immer mehr nähern, und nach Nr. 4. auch immer größer werden. Eben so schalte man zwischen AEFGB und ANB gebrochene Linien mit nur ausspringenden Winkeln ein, welche sich nach und nach der krummen immer enger anschließen und dann, ebenfalls nach Nr. 4., immer kleiner werden.

Zuletzt folgt noch, daß von zwei krummen, A und B verbin-



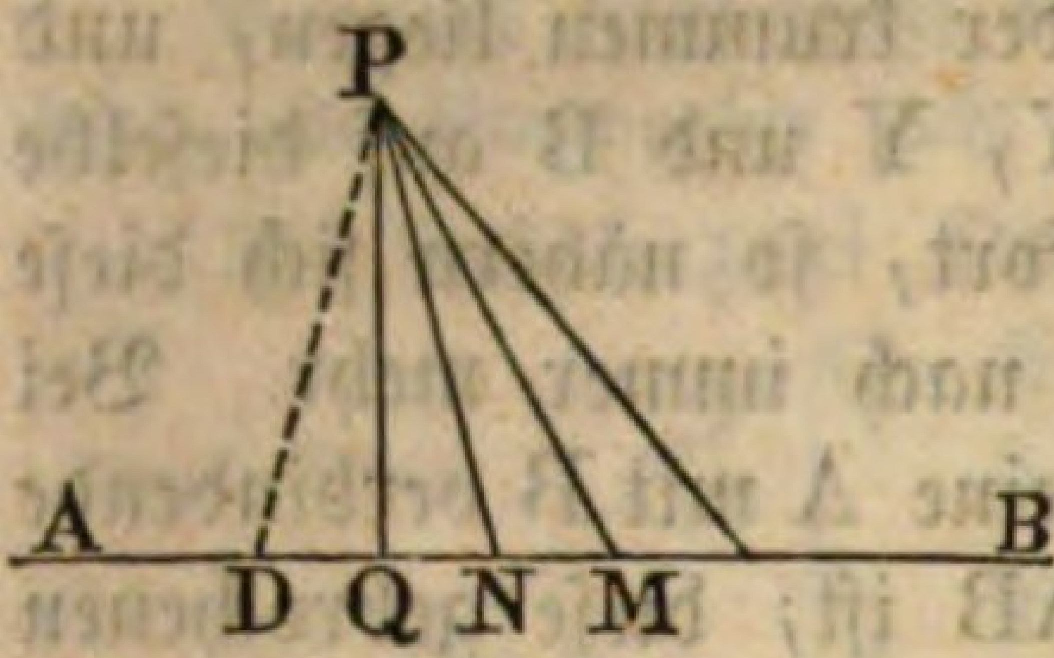
denden Linien, wenn die eine AMB die andere ANB umschließt, und letztere durchaus concav ist, die umschließende größer ist, als die eingeschlossene. Man kann sich nämlich zwischen beiden Linien eine gebrochene, A und B verbindende Linie mit nur ausspringenden Ecken denken, die dann kleiner als AMB, aber größer als ANB sein muß.

6) Aus diesen Sätzen folgt aber, daß unter allen Linien, welche

A und B verbinden, die gerade die kürzeste ist. Sie heißt die **Entfernung** beider Punkte von einander.

§. 23.
Erklärungen und Gesetze.

1) Von allen geraden Linien, welche einen Punkt P außerhalb einer Geraden AB mit Punkten derselben verbinden, ist die von P auf AB gefällte Senkrechte PQ die kürzeste und wird der **Abstand** oder die **Entfernung** des Punktes P von AB genannt. Denn alle anderen Linien PN, PM u. s. w. sind als Hypotenusen größer als die Kathete PQ (§. 21., 3). Je weiter die Punkte N, M u. s. w. von Q entfernt sind, desto größer werden die Linien PN, PM u. s. w.; denn der Winkel PNQ ist spitz, folglich sein Nebenwinkel PNM stumpf, daher PM > PN (§. 21, 3.). Zwei Punkte in AB, auf derselben Seite von Q können sonach nicht von P gleich weit entfernt sein; hingegen giebt es zu jedem Punkt rechts von Q einen zugehörigen links, welcher von P denselben Abstand hat; es müssen dann beide Punkte auch von Q gleich weit entfernt sein. Ist QN = QD, so folgt PN = PD, weil man dann Δ PQN so um PQ herumlegen kann, daß es das Δ PQD deckt (wegen der gleichen Nebenwinkel bei Q, die sich decken müssen).

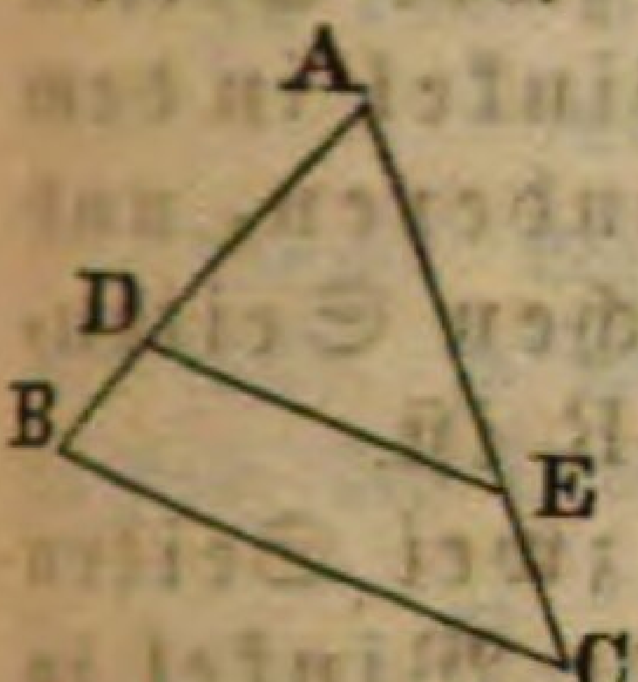


2) Hieraus folgt, daß **drei in einer Geraden liegende Punkte niemals von einem und demselben Punkte gleiche Entfernungen haben können.** Man erkennt dies auch unmittelbar: denn wäre PD = PN = PM, so müßten die Nebenwinkel bei N als Winkel an der Grundlinie in gleichschenkligen Dreiecken spitze sein, was doch unmöglich ist, da ihre Summe = 2 R ist.

3) In jedem Dreieck heißt die Entfernung einer Ecke von der gegenüberliegenden Seite: eine **Höhe** des Dreiecks, und diese Seite: die zugehörige **Grundlinie**. Jedes Dreieck hat also 3 Höhen, und die Seiten sind die zugehörigen 3 Grundlinien. Im rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten selbst zwei Höhen; die dritte Höhe gehört zur Hypotenuse. Im spitzwinkligen Dreieck fallen die drei Höhen in das Dreieck hinein; im stumpfwinkligen aber fallen zwei Höhen außerhalb des Dreiecks, nämlich die auf die Schenkel des stumpfen Winkels gefällten. (Folgt aus §. 13, 6.) Im gleichschenkligen Dreieck heißt die den Schenkeln ungleiche Seite ausschließlich die Grundlinie; daher nennt man die ihr zugehörige Höhe vorzugsweise dieses Dreiecks Höhe und muß, wenn eine der beiden andern gemeint ist, dies hinzufügen.

§. 24.

Wenn wir von der Gleichheit oder Ungleichheit zweier Winkel eines Dreiecks auf die Gleichheit oder Ungleichheit der gegenüberliegenden Seiten schließen konnten, und umgekehrt von den Seiten auf die Winkel, so ist es doch nicht möglich, auf die wirkliche Größe dieser Seiten, oder im umgekehrten Falle der Winkel, einen Schluß



zu machen. Denkt man sich im Dreieck ABC die DE ⫩ BC, so sind die Winkel ADE und AED resp. den Winkeln bei B und C gleich. Es können sonach bei denselben zwei Winkeln in verschiedenen Dreiecken die gegenüberliegenden Seiten sehr verschiedene Längen haben; und eben so leicht läßt sich zeigen, daß in Dreiecken, welche zwei Paar gleicher Seiten haben, die gegenüberliegenden Winkel von sehr verschiedener Größe sein können. Um also die Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines Dreiecks von einander so weit bestimmen zu können, daß man von gegebenen Stücken (Seiten und Winkeln) eines Dreiecks einen Schluß auf die wirkliche Größe der anderen Stücke machen kann, muß vor Allem untersucht werden, durch wie viele jener sechs Stücke eines Dreiecks die anderen mit bestimmt sind. Diese Untersuchung führt man auf folgende Weise: Man denkt sich zwei (oder mehr) Dreiecke, welche dieselben gegebenen Stücke enthalten, und untersucht, ob dann die Dreiecke auch in allen anderen Stücken übereinstimmen müssen. Nun ist aber leicht zu zeigen, daß man sich zwei Dreiecke, welche in allen Stücken übereinstimmen, immer so auf einander gelegt denken kann, daß sie sich decken; d. h. die Dreiecke müssen dann congruent sein. Hieraus folgt, daß die Frage, durch wie viel Stücke eines Dreiecks die andern bestimmt sind, mit der zusammen fällt: aus wie viel übereinstimmenden Stücken zweier Dreiecke folgt ihre Congruenz. Jene Untersuchung führt uns also zur Congruenz der Dreiecke und dann der übrigen Figuren. Bemerkt muß noch werden, daß die wirkliche Berechnung unbekannter Stücke eines Dreiecks aus gegebenen erst später erfolgen kann, also mit den Congruenz-Sätzen und einigen mit ihnen zusammenhängenden dies Kapitel geschlossen ist.

§. 25.

Die Lehrsätze von der Congruenz der Dreiecke.

I. **Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck eben so groß sind, als in dem anderen.**

II. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks eben so groß sind, als die des anderen.

III. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel — oder eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel — in dem einen Dreieck eben so groß sind, als in dem anderen.

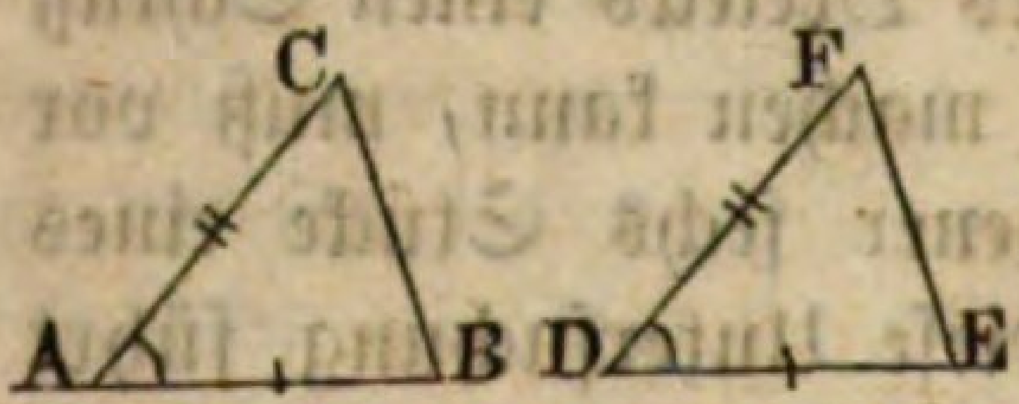
IV. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der der einen Seite gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck eben so groß sind, als in dem anderen, und wenn noch die Summe der dem anderen gleichen Seitenpaare gegenüberliegenden Winkel ungleich 2R. ist.

V. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck eben so groß sind, als im anderen.

Die Beweise dieser Sätze.

Zu I. Vor. $AB = DE$, $AC = DF$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.

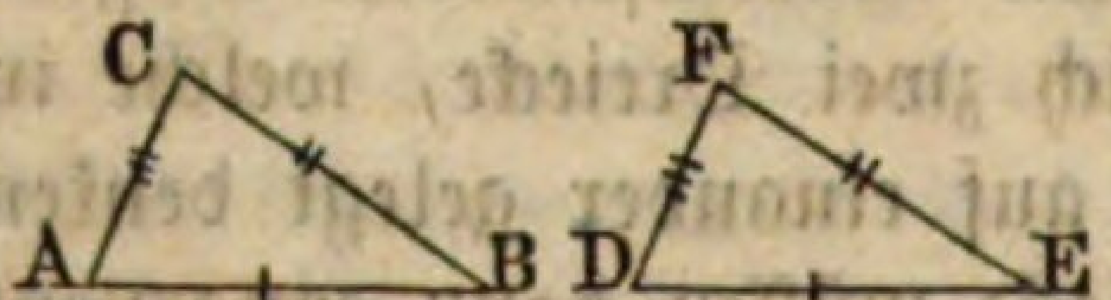
Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



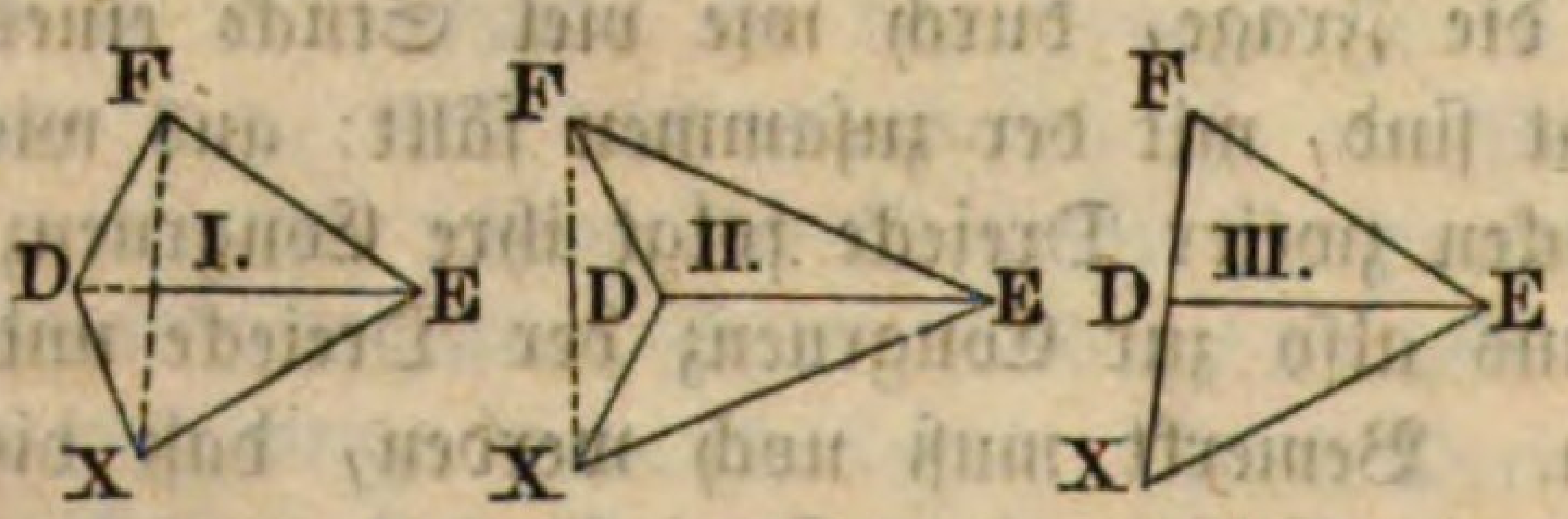
Bew. Legt man $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$, daß A in D und AB entlang DE fällt, so muß nach der Vor. B in E, AC entlang DF und C in F fallen; folglich decken sich die Dreiecke.

Zu II. Vor. $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$.

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Bew. Legt man $\triangle ABC$ so an das $\triangle DEF$ an, daß A in D und AB entlang DE fällt, so muß B in E fallen, und $\triangle ABC$ die Lage des $\triangle DEX$ annehmen. Zieht man FX, so können drei Fälle Statt finden: entweder schneidet FX die DE zwischen D und E, oder sie schneidet ihre Verlängerung, oder sie geht durch den einen Endpunkt der DE.

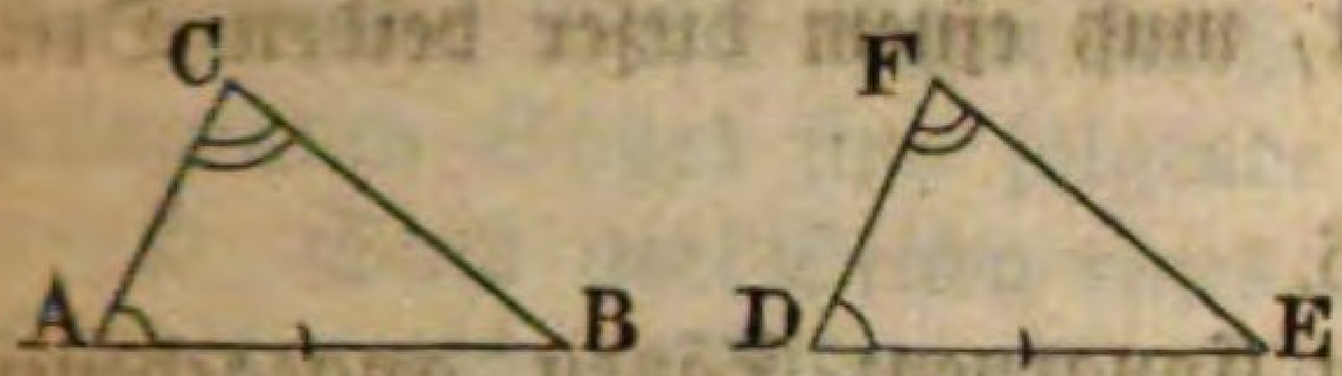


Die Figuren I., II., III. zeigen diese drei Lagen. In allen ist dann $\triangle EFX$ gleichschenklig, in den Figuren I. und II. auch $\triangle DFX$. Daher sind die Winkel EFD und EXD gleich, in Figur III. unmittelbar, in I. als Summen, in II. als Differenzen gleicher Winkel. Hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke nach dem vorhergehenden Satze.

Zu III. Vor. $AB = DE$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$.

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Aus der Vor. folgt zunächst, daß auch die dritten Winkel gleich sein müssen, also $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, weil die Summe der Winkel in jedem Dreieck

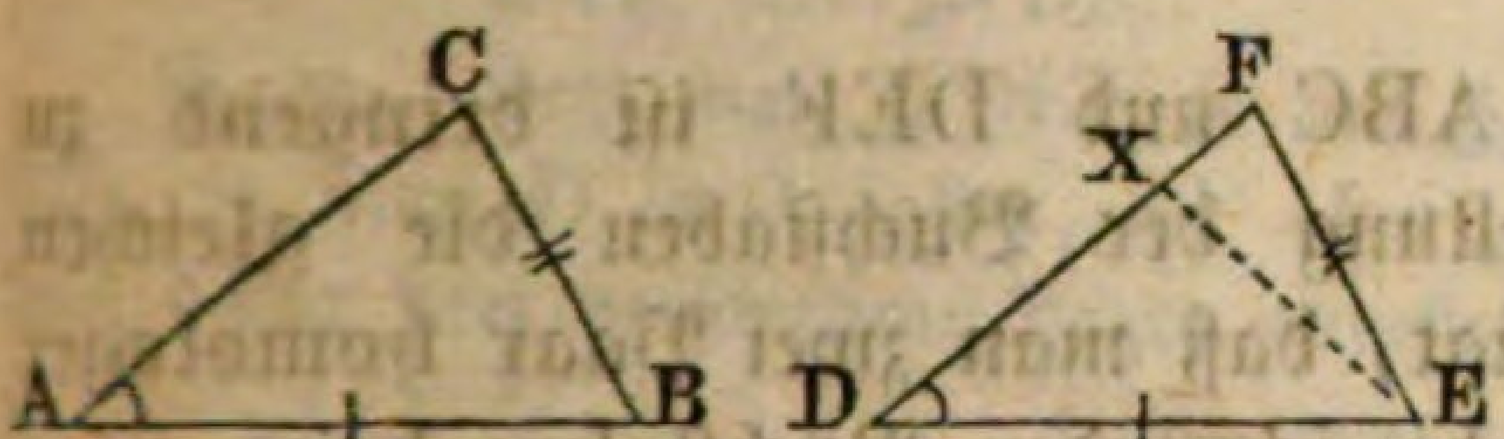


$= 2R$ ist. Legt man nun $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$, daß A in D und AB entlang DE fällt, so muß B in E, AC entlang DF und BC entlang EF fallen, folglich auch C in F, weil zwei Linien sich nur in einem Punkte schneiden können.

Zu IV. Vor. $AB = DE$, $BC = EF$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle C + \sphericalangle F \gtrless 2R$.

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

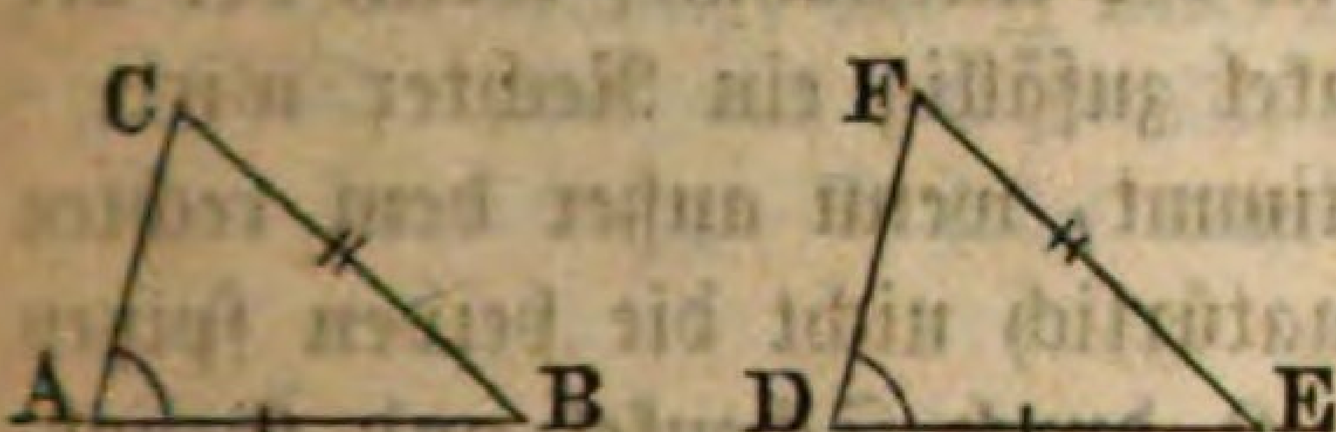
Bew. Legt man $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$, daß A in D und AB entlang DE fällt, so muß B in E und AC entlang DF fallen. Fällt auch C in F, so sind die Dreiecke congruent. Gesetzt also, C fiele nicht in F, so muß C doch in die Richtung der DF fallen und entweder diesseits F, oder jenseits F. Beide Annahmen führen zu einem Widerspruch. Denn fällt C etwa in X, und zieht man XE, so ist $\triangle DEX \cong \triangle ABC$, folglich $EX = BC$. Nach der Voraussetzung ist aber $BC = EF$, folglich muß $EX = EF$ sein, daher $\sphericalangle EFX = \sphericalangle EXF$ (§. 21. 1.). Nun ist aber $\sphericalangle EXF + \sphericalangle EXD = 2R$, folglich auch $\sphericalangle EFD + \sphericalangle EXD = 2R$, oder, weil $\sphericalangle EXD = \sphericalangle BCA$ ist: $\sphericalangle EFD + \sphericalangle BCA = 2R$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung; folglich kann C nicht diesseits F fallen. Ganz ebenso ist zu zeigen, daß C nicht jenseits F fallen kann; folglich muß C in F fallen, und die Dreiecke decken sich.



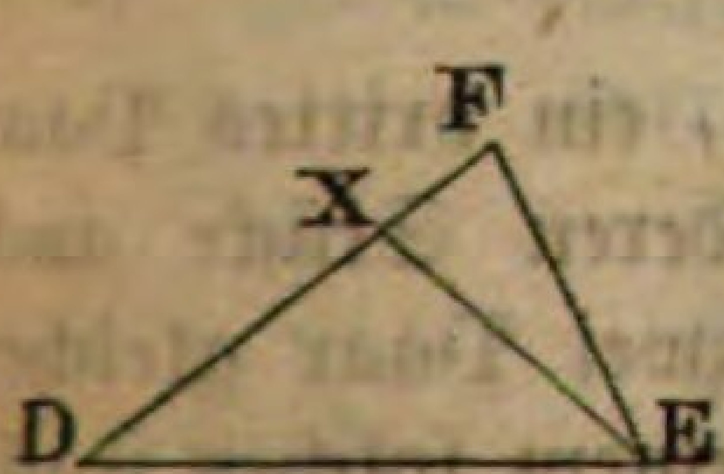
Zu V. Vor. $AB = DE$, $BC = EF$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $BC > AB$ (folglich auch $EF > DE$).

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Die Winkel C und F sind spitze, weil sie nicht den größten Seiten gegenüber liegen (§. 21. 4.); folglich ist $\sphericalangle C + \sphericalangle F < 2R$; daher sind die Dreiecke congruent nach dem vorhergehenden Lehrsatze, von welchem der vorliegende nur ein besonderer Fall ist.



Anmerk. Haben die Dreiecke ABC und DEF zwei Seiten und den der kleineren gegenüberliegenden Winkel gleich, so sind sie nicht nothwendig congruent. Legt man sie dann so, wie im Beweise zu IV. geschehen, auf einander, so daß DEF und DEX die beiden Dreiecke sind, so muß $EF = EX$ sein, und weil von E aus nur zwei gleich lange Linien nach einer Geraden DF gezogen werden können (§. 23., 1. und 2.), so können nur zwei verschiedene Dreiecke mit den angegebenen Stücken existiren, d. h. jedes andere Dreieck, welches dieselben zwei Seiten und denselben der kleineren



Seite gegenüberliegenden Winkel hat, muß einem dieser beiden Dreiecke congruent sein.

§. 26.

Wenn zwei Dreiecke die in den Congruenz-Sätzen angegebenen Stücke gleich haben, so sind auch die übrigen Stücke einander gleich; denn die Dreiecke lassen sich dann so auf einander legen, daß sie sich decken. Die Stücke congruenter Figuren, welche beim Decken in einander fallen, nennt man gleichliegende oder homologe; daher sind in congruenten Figuren homologe Stücke gleich; im Besonderen liegen in congruenten Dreiecken gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Bei congruenten Dreiecken ABC und DEF ist dringend zu empfehlen, schon durch die Stellung der Buchstaben die gleichen Stücke zu markiren. Hierzu genügt, daß man zwei Paar homologer Ecken richtig erkennt und die sie bezeichnenden Buchstaben beim Hinschreiben analog setzt. Ist z. B. A homolog D und B homolog E (d. h. ist $\measuredangle A = \measuredangle D$ und $\measuredangle B = \measuredangle E$), so schreibt man $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ oder $\Delta CBA \cong \Delta FED$ u. s. w. Umgekehrt kann man dann aus der Congruenz $\Delta KNM \cong \Delta FAC$ schließen: $\measuredangle N = \measuredangle A$, $NM = AC$, $MK = CF$, u. s. w.

Aus den Congruenz-Sätzen folgt ferner, daß durch 3 Stücke eines Dreiecks die übrigen bestimmt sind (vergl. §. 24.); nur dürfen diese 3 Stücke nicht die 3 Winkel sein, und nicht 2 Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel. Denn im ersten Falle giebt es unendlich viele nicht congruente Dreiecke mit denselben 3 Stücken; im zweiten Falle giebt es deren zwei, mit der Ausnahme, wenn der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel zufällig ein Rechter wird.

Das rechtwinklige Dreieck ist bestimmt, wenn außer dem rechten Winkel noch 2 Stücke gegeben sind (natürlich nicht die beiden spitzen Winkel); das gleichschenklige Dreieck ist durch Schenkel und Grundlinie, oder durch eine Seite und einen Winkel bestimmt; das gleichseitige Dreieck endlich durch eine Seite.

§. 27.

Lehrsätze.

Haben zwei Dreiecke zwei Paar gleicher Stücke, ein drittes Paar aber ungleich, so müssen im Allgemeinen die anderen Stücke auch ungleich sein. (Eine Ausnahme machen z. B. bei zwei Paar gleicher Winkel die dritten Winkel.) Es läßt sich aber in einem solchen Falle untersuchen, in welchem Dreiecke von einem Paare ungleicher Stücke

das größere Stück liegen muß. Von den dieser Betrachtung entspringenden Sätzen sind folgende zwei hervorzuheben:

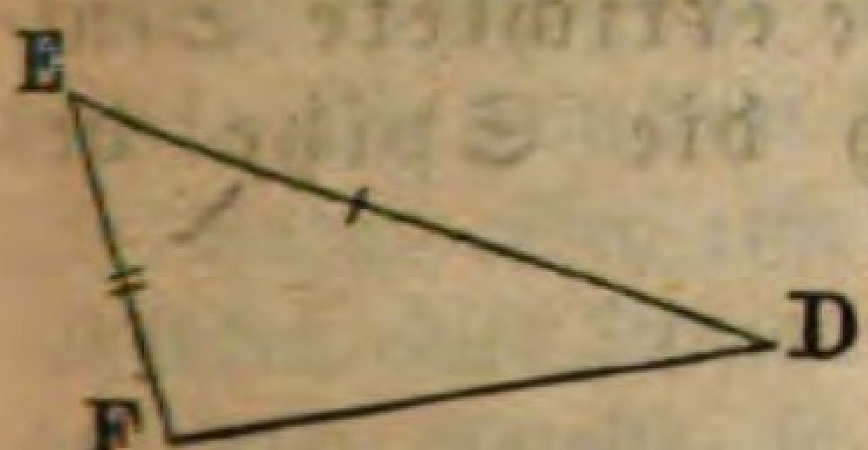
I. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zweien Seiten eines anderen gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so ist die dritte Seite in demjenigen Dreiecke größer als im anderen, in welchem der größere Winkel ist.

II. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zweien Seiten eines anderen gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so ist der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in demjenigen Dreieck größer als im anderen, in welchem die größere dritte Seite liegt.

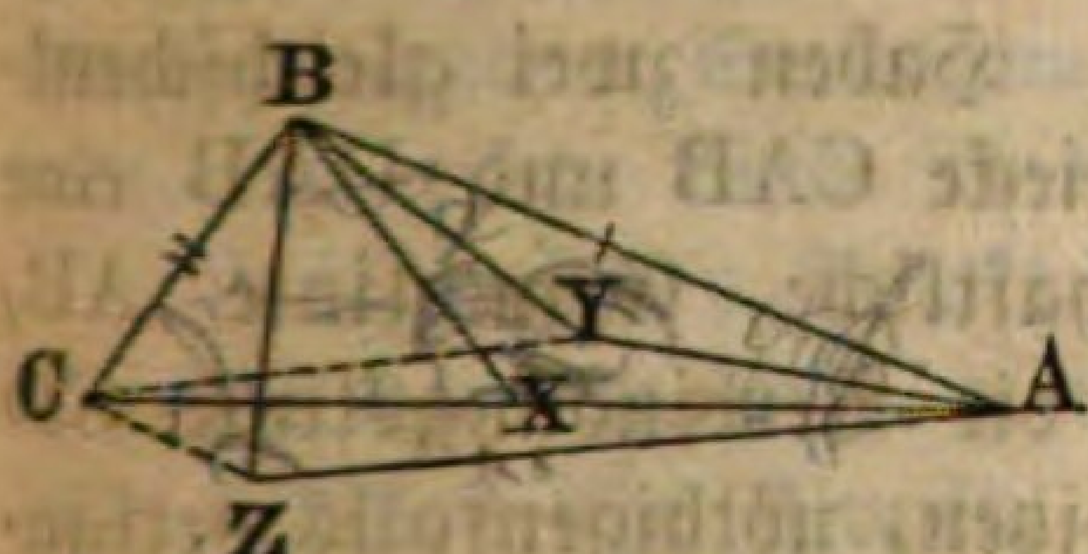
Zu I. Vor. $AB = DE$, $BC = EF$, $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DEF$.

Beh. $AC > DF$.

Bew. Legt man ΔDEF so auf ΔABC, daß E in B, ED entlang BA fällt, so muß D in A fallen, EF aber zwischen BA und BC. Der Punkt F kann dann drei verschiedene Lagen annehmen:



1) Er fällt in AC, etwa in X, so ist $\Delta ABX \cong DEF$, und es ist dann unmittelbar $AC > AX$, oder $AC > DF$.



2) F kann innerhalb des ΔABC, etwa in Y fallen, so daß $\Delta ABY \cong \Delta DEF$ ist, also $BY = EF = BC$. Dann ziehe man CY, so ist ΔBCY gleichschenklig, folglich $\sphericalangle BYC$ spitz, daher sein Nebenwinkel, und um so mehr $\sphericalangle CYA$, stumpf. Hieraus folgt aber (§. 21. 3.): $AC > AY$, oder $AC > DF$.

3) F kann endlich außerhalb des ΔABC fallen, etwa in Z, so daß $\Delta ABZ \cong \Delta DEF$ ist, also $BZ = EF = BC$. Man ziehe CZ, so ist ΔBCZ gleichschenklig, also $\sphericalangle BZC = \sphericalangle BCZ$. Hieraus folgt aber: $\sphericalangle AZC > \sphericalangle ACZ$, daher auch $AC > AZ$, oder $AC > DF$.

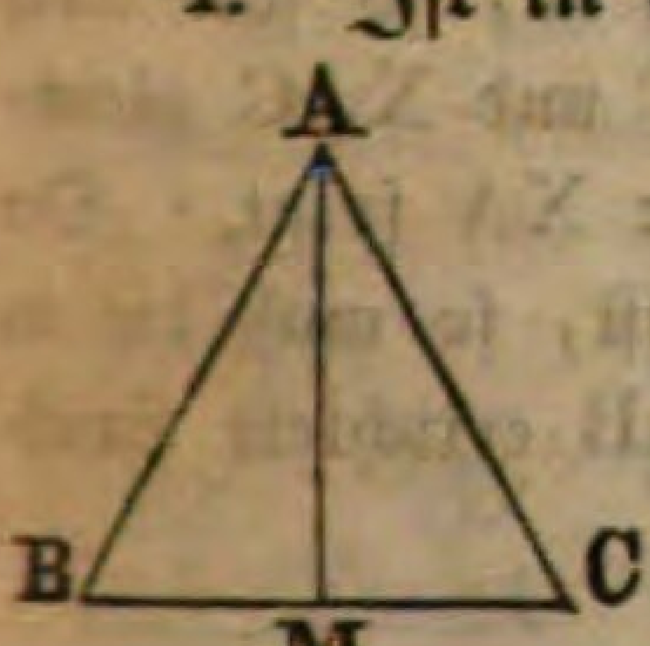
Der Beweis zu II. folgt leicht indirect aus I. und §. 25. I.

Folgerungen aus den Lehrsätzen von der Congruenz der Dreiecke.

§. 28.

Gesetze.

I. Ist in einem Dreiecke ABC ein Punkt M der Seite BC mit A verbunden, und finden von folgenden Bedingungen



(1) $AB = AC$

(2) $BM = CM$

(3) $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$

(4) $AM \perp BC$

zwei als Voraussetzung Statt, so folgen immer die beiden andern als Behauptung.

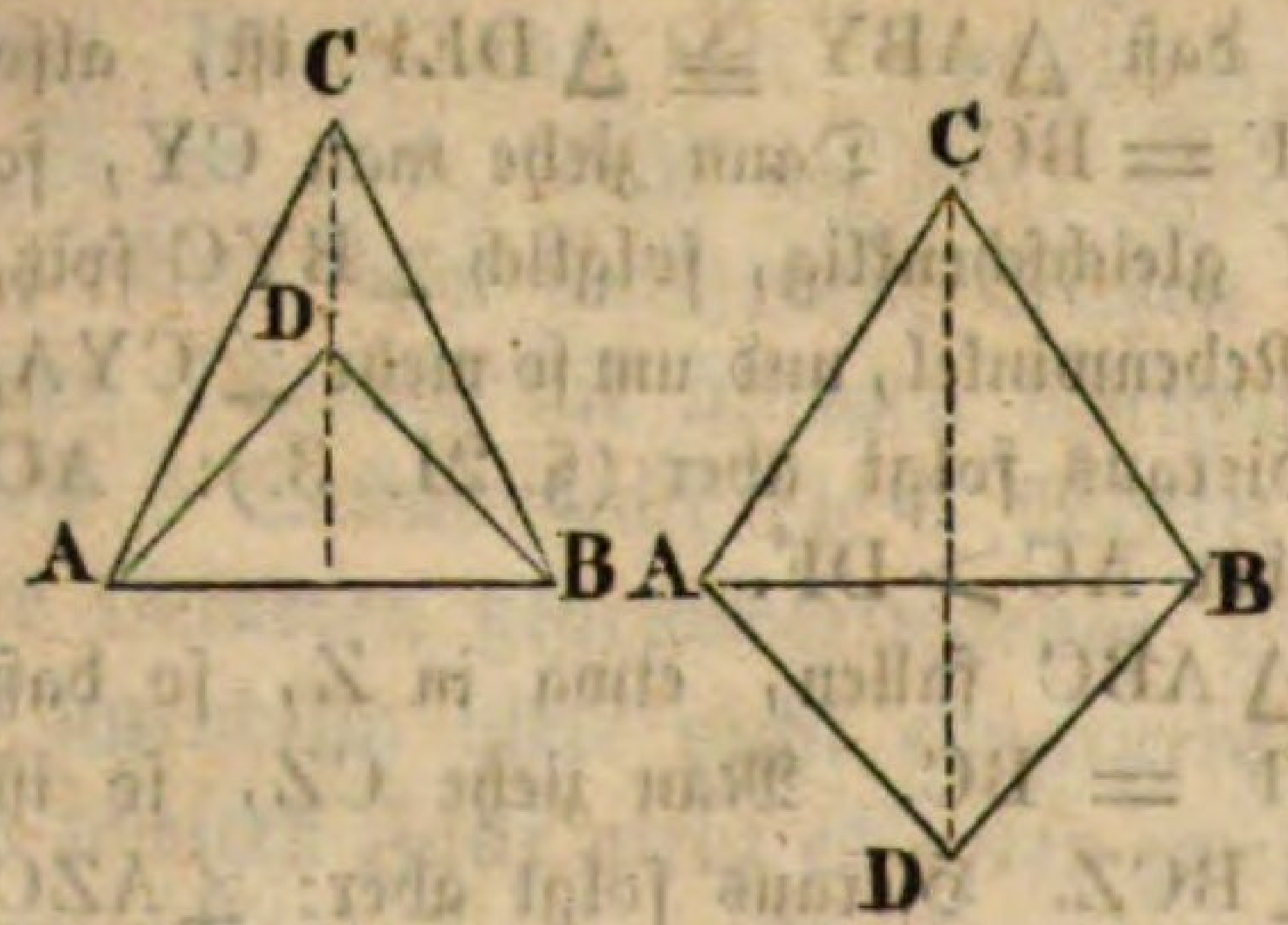
Dieser Lehrsatz enthält sechs einzelne leicht zu lesende Gesetze. Die Beweise ergeben sich aus Congruenz der $\Delta\Delta$ ABM und ACM. Hauptsächlich merke man:

1) *Im gleichschenkligen Dreieck fallen folgende drei Linien immer in eine zusammen: die Höhe, die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundlinie und die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze.*

2) *Errichtet man in der Mitte (M) einer Linie (BC) auf diese Linie eine Senkrechte, so ist jeder Punkt derselben von dem Endpunkte der Linie gleich weit entfernt.*

II. *Die im Mittelpunkt der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie errichtete Senkrechte geht gehörig verlängert durch die Spitze des Dreiecks.*

Bew. indirect.

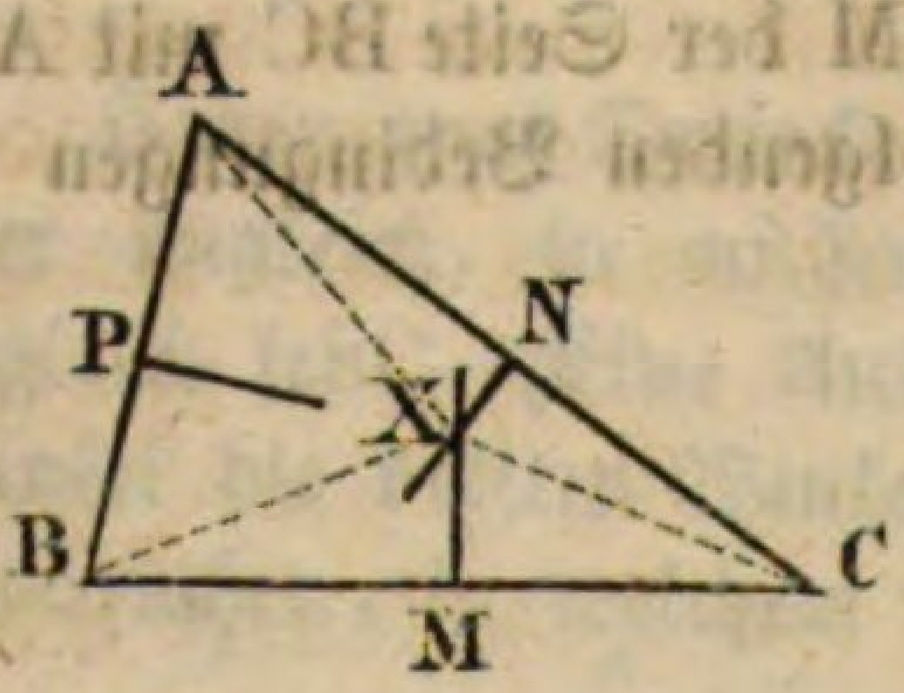


III. Haben zwei gleichschenklige Dreiecke CAB und DAB eine gemeinschaftliche Grundlinie AB, so steht die Verbindungslinie CD ihrer Spitzen, nöthigenfalls verlängert, auf dieser Grundlinie senkrecht und halbirt sie und auch die Winkel an den Spitzen.

Bew. Δ ACD $\cong$ Δ BCD aus Gleichheit aller Seiten; folglich halbirt CD die Winkel bei C und D. Das Uebrige folgt aus I., 1.

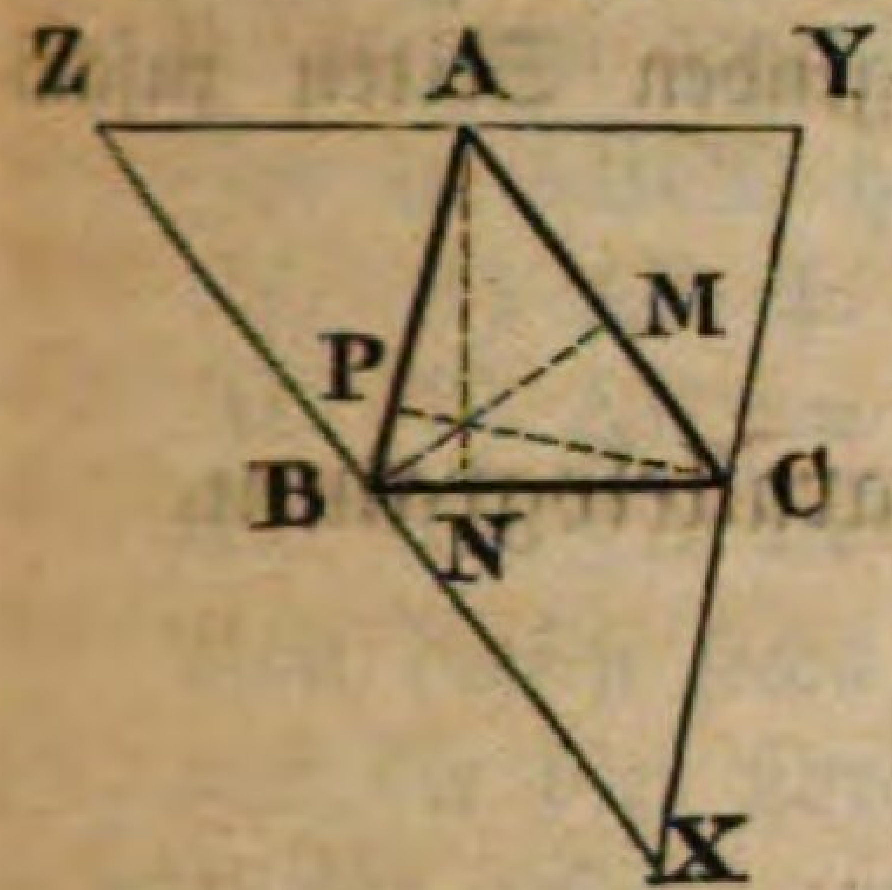
IV. *Errichtet man in dem Mittelpunkte jeder Seite eines Dreiecks auf diese Seite eine Senkrechte, so schneiden sich diese drei Senkrechten in einem Punkte, welcher von den drei Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt ist und des Dreiecks Mittelpunkt genannt wird.*

Bew. Schneiden sich die in den Mittelpunkten M und N der Seiten BC und AC errichteten Senkrechten in X, so sind nach dem Satze I., 2. die Dreiecke XBC und XAC gleichschenklig, woraus XB = XC = XA folgt. Da nun auch Δ XAB gleichschenklig ist, so muß die in der Mitte P der Seite AB auf AB errichtete Senkrechte ebenfalls durch X gehen.



V. **In jedem Dreieck schneiden sich die 3 Höhen in einem Punkt.**

Bew. ABC sei das Dreieck und AN, BM, CP die Höhen. Man lege



durch jede Ecke des Δ ABC eine mit der gegenüberliegenden Seite parallele Linie und verlängere diese Linien, bis sie sich schneiden, also ein Δ XYZ bilden. Die Höhen des Δ ABC stehen auch auf den Seiten des Δ XYZ senkrecht (§. 13. No. 3.), und kann man noch beweisen, daß A, B, C die Mittelpunkte der Seiten dieses Dreiecks sind, so müssen sich nach dem vorstehenden Satze (IV.) die Höhen in einem Punkt schneiden. Nun ist aber Δ ABC jedem der $\Delta\Delta$ CYA, BAZ, XCB congruent (§. 25., III.), so daß also diese $\Delta\Delta$ auch unter einander congruent sind, woraus ZA = AY, YC = CX, XB = BZ folgt.

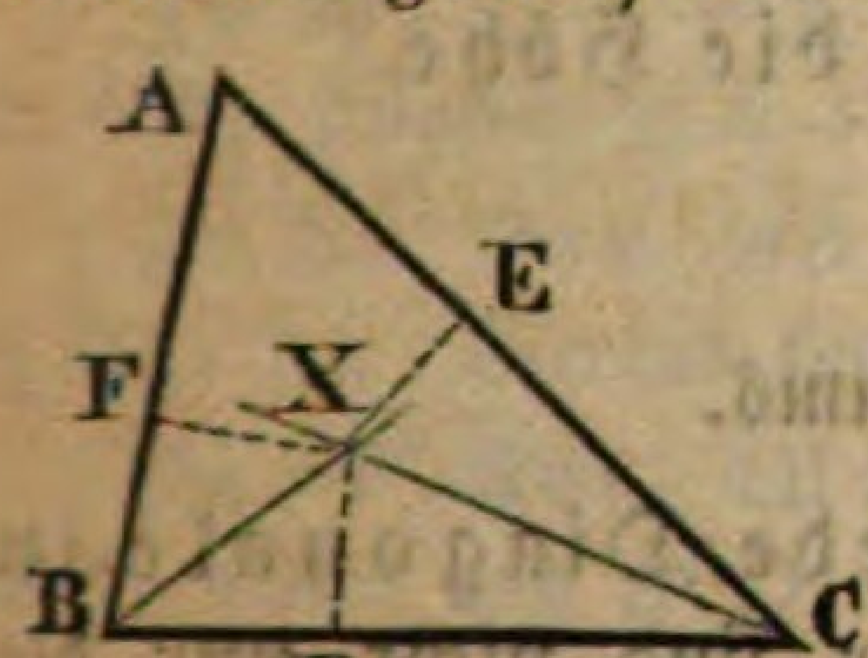
VI. **Es giebt immer einen Punkt, aber auch nur immer einen einzigen, welcher von drei nicht in einer geraden Linie liegenden Punkten A, B, C gleich weit entfernt ist.**

Bew. Der erste Theil der Behauptung folgt aus IV., weil A, B, C als Ecken eines Dreiecks zu betrachten sind. Der zweite folgt indirect. Gäbe es zwei solche Punkte, so müßten die in den Mittelpunkten zweier Seiten auf diese Seiten errichteten Senkrechten durch beide gehen (II.), was nicht möglich ist, weil zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können.

VII. Jeder Punkt der Halbirungslinie eines Winkels ist von den beiden Schenkeln gleich weit entfernt. (Folgt aus §. 25., III.)

VIII. Ein Punkt, welcher von den Schenkeln eines Winkels gleich weit entfernt ist, liegt in der Halbirungslinie des Winkels. (Folgt aus §. 25., V.)

IX. **Die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der von den drei Seiten gleich weit entfernt ist.**



Bew. Schneiden sich die Halbirungslinien der Winkel B und C in X, und man fällt XD, XE, XF senkrecht auf BC, AC, AB, so folgt aus VII.: XD = XE = XF. Nach VIII. muß nun X auch in der Halbirungslinie des Winkels A liegen.

X. Im gleichschenkligen Dreieck (ABC) sind die Höhen auf den Schenkeln einander gleich (BD = CE); eben so die bis zu den



Schenkeln verlängerten Halbirungslinien der Winkel an der Grundlinie, und auch die Verbindungslinien der Ecken an der Grundlinie mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Schenkel. — Der Beweis folgt

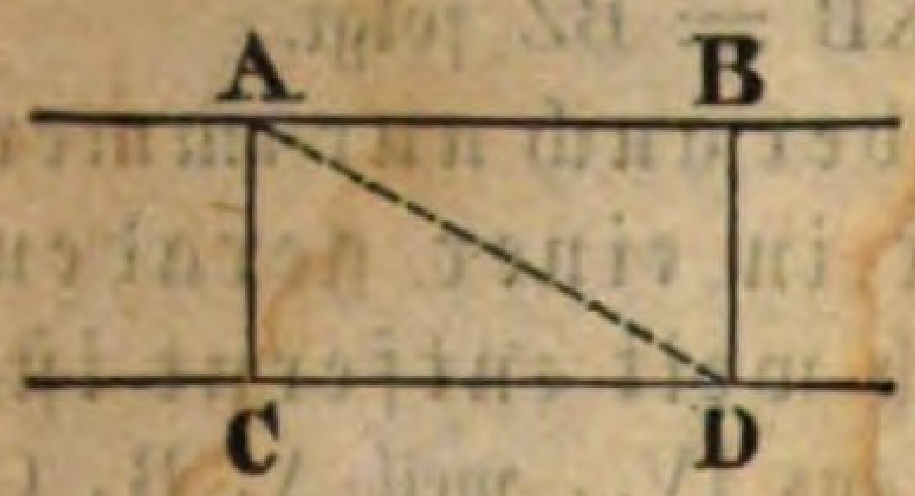
in jedem Falle aus Congruenz der $\Delta\Delta$BCD und CBE. — Im gleichseitigen Dreieck sind daher die drei Höhen einander gleich, welche hier mit den Halbirungslinien der Winkel und den Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten zusammenfallen. (Vergl. Satz I., Nr. 1.)

Das Viereck, im Besonderen das Parallelogramm.

§. 29.

Erklärungen und Gesetze.

Nach §. 13., 3. steht eine Linie, welche eine von zwei Parallelen senkrecht schneidet, auch auf der andern senkrecht.



Ist nun AB ‡ CD, und stehen AC und BD auf diesen Parallelen senkrecht, so sind sie gleich lang; denn verbindet man A mit D, so ist (nach §. 25., III.) ΔABD $\cong$ ΔDCA, woraus BD = CA folgt. Diese Linie AC (oder BD) wird die Entfernung der Parallelen von einander genannt, und man hat daher:

I. Parallelen sind überall gleich weit von einander entfernt.

II. Sind zwei Linien derselben dritten parallel, liegen sie auf derselben Seite dieser dritten Linie und haben sie von ihr gleiche Entfernungen, so fallen sie in eine gerade Linie zusammen.

Beweis leicht indirect mit Hülfe des Lehrsatzes 1. in §. 10.

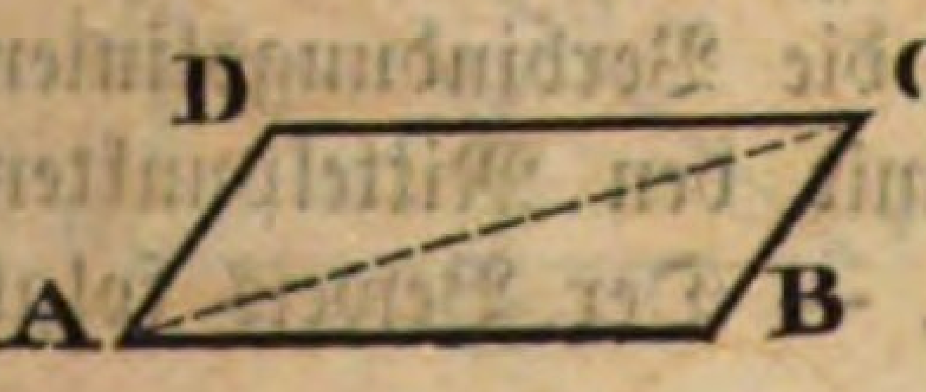
Bei einem Parallelogramm nennt man jede Seite eine Grundlinie desselben und ihre Entfernung von der gegenüberliegenden Seite die zugehörige Höhe. — Bei dem Paralleltrapez heißt die Entfernung der parallelen Seiten von einander die Höhe.

§. 30.

Eigenschaften des Parallelogramms.

Ein Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt; daher sind nicht nur die gegenüberliegenden Winkel (§. 16.), sondern auch die gegenüberliegenden Seiten einander gleich, oder:

Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.



Die Congruenz der Dreiecke ABC und CDA folgt aus AC = CA und aus der Gleichheit der Winkel.

Jedes Parallelogramm hat sonach die drei Eigenschaften:
1) je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel;
2) je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich;
3) je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich.

Im # ABCD hat man also:

I. 1) AB ⫲ DC; 2) AD ⫲ BC;
II. 3) AB = DC; 4) AD = BC;
III. 5) ∡A = ∡C; 6) ∡B = ∡D.

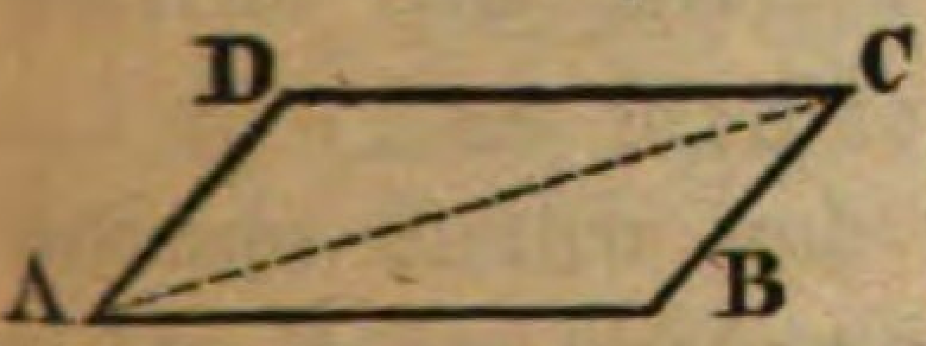
Von diesen sechs Eigenschaften reichen also zwei (Nr. 1. und 2.) hin, um die vier übrigen folgern zu können. Es fragt sich nun, ob je zwei die andern zur Folge haben, d. h. ob aus je zwei dieser Eigenschaften eines Vierecks gefolgert werden kann, daß das Viereck ein Parallelogramm sei. Allgemein ist dies nicht der Fall, da die Voraussetzungen Nr. 1. und 4., und Nr. 3. und 5. nicht diese Folge haben. Das Weitere enthalten die nächsten §§.

§. 31.

Lehrsätze.

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn
1) je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind;
2) je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind;
3) zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind;
4) zwei gegenüberliegende Seiten parallel, und zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind.

Die Beweise.



Zu 1) △ABC ≌ △CDA (3 Seiten). Aus der Gleichheit der Wechselwinkel bei A und C folgt nun die Parallelität der Seiten.

Zu 2) ∡A + ∡B + ∡C + ∡D = 4R, oder 2∡A + 2∡B = 4R; folglich ∡A + ∡B = 2R, u. s. w.

Zu 3) Vor. AB = DC, AB ⫲ DC. Es ist △ABC ≌ △CDA (§. 25., I.). Hieraus folgt ∡BCA = ∡DAC, daher BC ⫲ AD.

Zu 4) Vor. AB ⫲ DC, ∡A = ∡C. Zieht man die gleichen Wechselwinkel CAB und ACD von den nach der Voraussetzung gleichen Winkeln bei A und C ab, so bleibt ∡CAD = ∡ACB, woraus AD ⫲ BC folgt.

§. 32.

Hingegen ist ein Viereck nicht nothwendig ein Parallelogramm, wenn

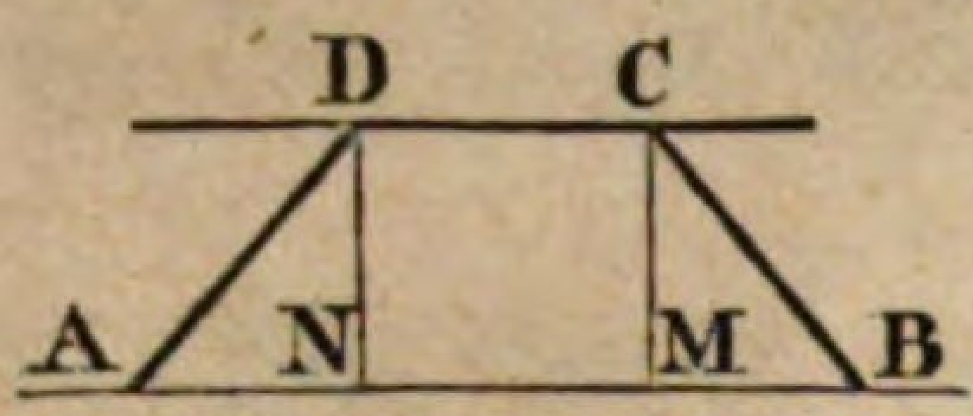
1) zwei gegenüberliegende Seiten parallel und die beiden andern Seiten gleich sind, etwa

AB ⫲ DC und AD = BC;

2) wenn zwei gegenüberliegende Seiten und zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, etwa

$$AD = BC \text{ und } \measuredangle A = \measuredangle C.$$

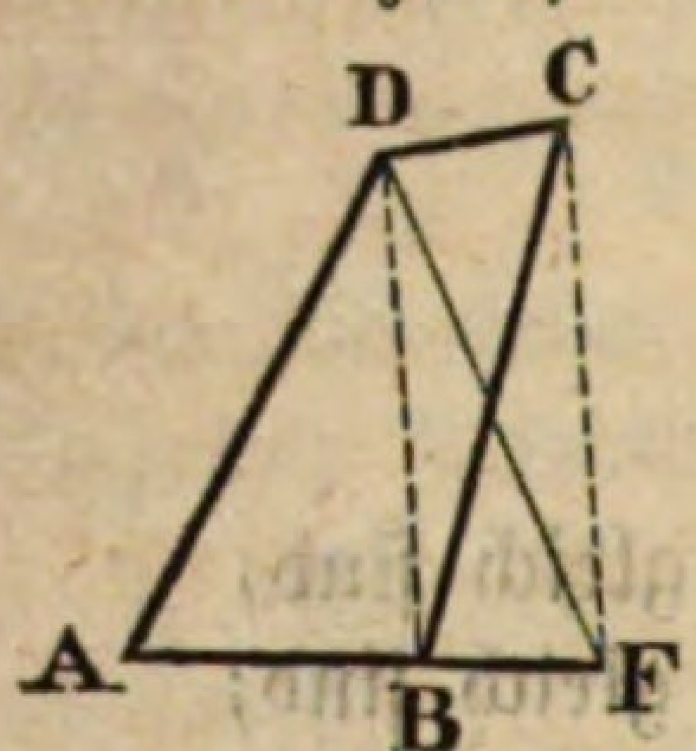
Bew. zu 1) In einer von zwei parallelen Linien wähle man zwei Punkte, D und C, und fälle DN und CM senkrecht auf die andere Parallele. Macht man dann NA = MB und zieht AD und BC, so erfüllt ⏢ ABCD die Bedingungen AB ∦ DC und AD = BC



(△ AND ≅ △ BMC), ist aber kein Parallelogramm, weil die gleichen Winkel bei A und B spitz sind, also AD und BC convergiren.

Man nennt ABCD ein **symmetrisches Paralleltrapez**, zuweilen auch ein gleichschenkliges, weil durch das Verlängern der Seiten AD und BC bis zu ihrem Durchschnittspunkte gleichschenklige Dreiecke erzeugt werden.

Bew. zu 2) Man denke sich ein gleichschenkliges Dreieck DAF, dessen Grundlinie AF kleiner sei, als jeder Schenkel. Ferner denke man sich AF durch den Punkt B in zwei ungleiche Theile zerlegt, DB gezogen, $\measuredangle$ BDC = $\measuredangle$ DBF und DC = BF gemacht. Zieht man nun BC, so erfüllt das Viereck ABCD die Bedingungen AD = BC und $\measuredangle$ A = $\measuredangle$ C (weil △ FBD ≅ △ CDB), ist aber kein Parallelogramm, weil nach der Construction AB > BF, folglich auch AB > DC ist. Um noch zu zeigen, daß $\measuredangle$ ADC kein flacher Winkel ist, hat man aus der Construction AB < AD, folglich:



$$\measuredangle ADB < \measuredangle ABD, \text{ und}$$
$$\measuredangle BDC = \measuredangle DBF, \text{ daher durch Addition:}$$
$$\overline{\measuredangle ADC < 2R.}$$

§. 33.

Die Diagonalen des Parallelogramms. Abhängigkeit ihrer gegenseitigen Größe und Lage von den Seiten und Winkeln.

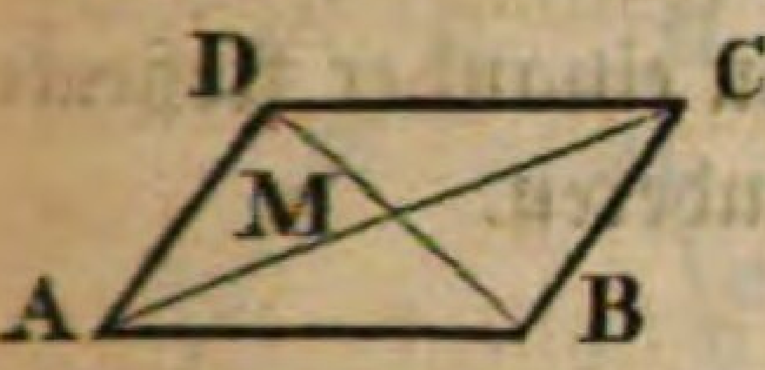
1) In jedem Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen gegenseitig.

2) Jedes Viereck, dessen Diagonalen sich gegenseitig halbiren, ist ein Parallelogramm.

3) Hat ein Parallelogramm lauter gleiche Seiten, so stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel; sind aber neben einander liegende Seiten ungleich, so schneiden sich die Diagonalen unter schiefen Winkeln und halbiren die Umfangs-Winkel nicht.

4) Im rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen einander gleich, im schiefwinkligen nicht.

Die Beweise. Von den vier Dreiecken, in welche die beiden Diagonalen das Parallelogramm zerlegen, sind je zwei gegenüberliegende congruent. Hieraus folgt der Beweis zu No. 1). — Aus der Voraussetzung in No. 2) folgt auch die Congruenz dieser Dreiecke und hieraus die Behauptung. — Um No. 3) zu beweisen, wendet man No. 1) an. Es verbindet im $\triangle$ ADC die Linie DM



eine Ecke mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Ist also AD = DC, so steht nach §. 28., I. 1) DM $\perp$ AC und halbirt den $\measuredangle$ D; ist aber AD ungleich DC, so folgt indirect, daß DM weder auf AC senkrecht stehen, noch den $\measuredangle$ D halbiren kann. — Der Beweis zu 4) ergiebt sich aus der Betrachtung der $\triangle\triangle$ DAB und CBA. Diese Dreiecke haben zwei Paar gleicher Seiten; folglich sind die dritten Seiten, d. h. die Diagonalen, nur dann gleich, wenn DAB und CBA gleiche, also rechte Winkel sind. Sind diese Winkel schiefe, so ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Diagonale größer als die andere (§. 27., I.).

§. 34.

Die besonderen Formen der Parallelogramme.

Die Parallelogramme zerfallen, je nachdem an einander stoßende Seiten gleich oder ungleich, die Winkel aber rechte oder schiefe sind, in vier Gattungen:

1) Das Quadrat hat lauter gleiche Seiten und rechte Winkel. Die Diagonalen sind gleich, stehen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel.

2) Der Rhombus (die Raute) hat lauter gleiche Seiten und schiefe Winkel. Die Diagonalen sind ungleich, stehen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel.

3) Das Rechteck (Oblongum) hat ungleiche an einander stoßende Seiten und rechte Winkel. Die Diagonalen sind einander gleich, stehen nicht auf einander senkrecht und halbiren die Winkel nicht.

4) Das Rhomboid (die längliche Raute) hat ungleiche an einander stoßende Seiten und schiefe Winkel. Die Diagonalen sind ungleich, stehen nicht auf einander senkrecht und halbiren die Winkel nicht.

§. 35.

Gesetze.

Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn zwei an einander stoßende Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen eben so groß sind, als in dem andern.

Bew. Die Parallelogramme lassen sich leicht so auf einander legen, daß sie sich decken, weil alle Seiten und Winkel im einen resp. so groß sind, als im andern.

Hieraus folgt:

1) Zwei Quadrate sind congruent, wenn eine Seite des einen eben so groß ist, als eine Seite des anderen.

2) Zwei Rhomben sind congruent, wenn eine Seite und ein Winkel in dem einen eben so groß sind, als im anderen.

3) Zwei Rechtecke sind congruent, wenn zwei an einander stoßende Seiten in dem einen eben so groß sind, als im anderen.

Aus den vorstehenden Sätzen folgt ferner:

Ein Parallelogramm ist durch zwei an einander stoßende Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmt.

Das Quadrat ist daher durch eine Seite, der Rhombus durch eine Seite und einen Winkel, das Rechteck durch zwei neben einander liegende Seiten bestimmt.

Anmerk. 1. Gleiche Quadrate sind auch immer congruent (leicht indirect durch Aufeinanderlegen zu beweisen); daher pflegt man congruente Quadrate nur gleiche zu nennen. (Vergl. §. 4.)

Anmerk. 2. Aus den vier Dreiecken, in welche ein Parallelogramm durch seine Diagonalen zerlegt wird, erkennt man leicht, daß das Quadrat auch durch eine Diagonale bestimmt ist, der Rhombus durch beide Diagonalen, das Rechteck durch eine Diagonale und den Winkel, den beide Diagonalen bilden, endlich das Rhomboid durch beide Diagonalen und diesen Winkel.

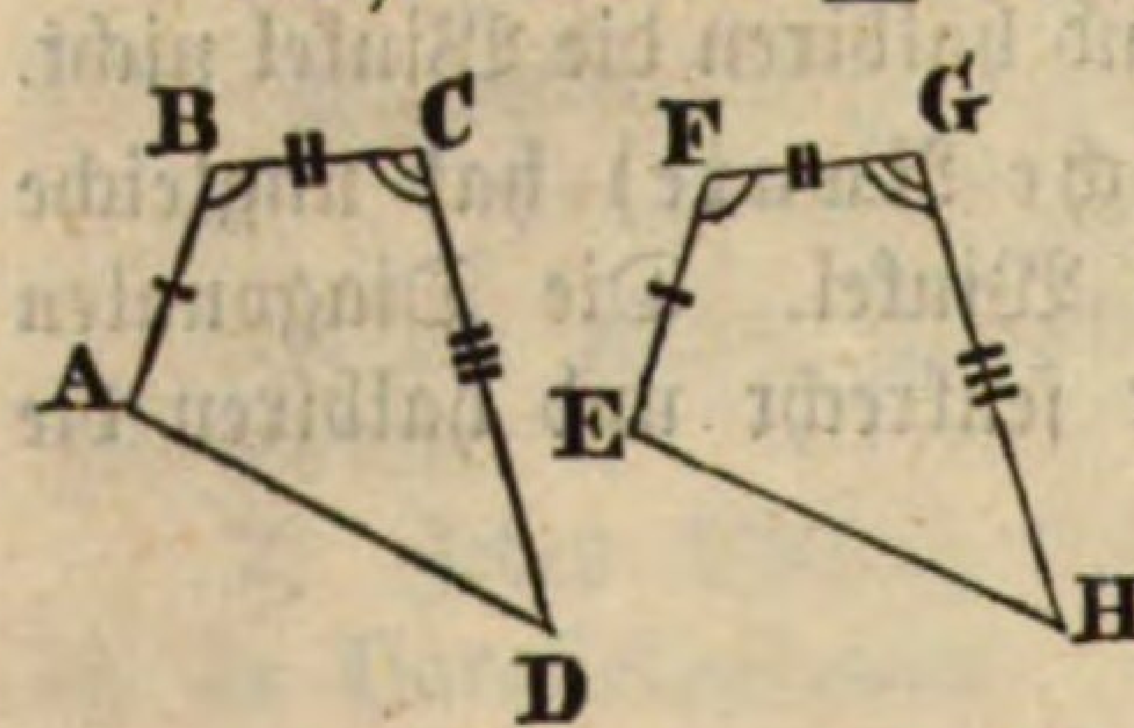
§. 36.

Lehrsatz.

Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die von ihnen eingeschlossenen zwei Winkel in dem einen eben so groß sind, als dieselben Stücke in derselben Ordnung in dem anderen.

Vor. $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$, $\measuredangle B = \measuredangle F$, $\measuredangle C = \measuredangle G$.

Beh. $ABCD \cong EFGH$.

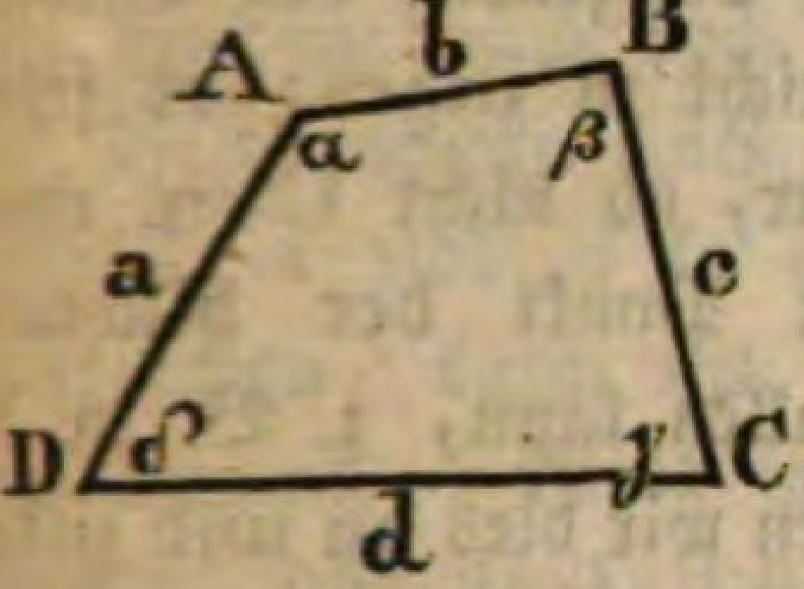


Bew. Legt man ABCD so auf EFGH, daß A in E und AB entlang EF fällt, so muß B in F fallen, dann auch BC entlang FG, C in G, CD entlang GH und D in H (wegen Gleichheit der Seiten und Winkel). Die Vierecke decken sich also, und es ist sonach noch $AD = EH$, $\measuredangle A = \measuredangle E$ und $\measuredangle D = \measuredangle H$.

§. 37.

Der vorstehende Satz lehrt, daß ein Viereck durch drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt ist, also durch fünf Stücke. Es fragt sich, ob beliebige fünf Stücke das Viereck bestimmen. Zunächst wissen wir, daß die Summe der Winkel gleich 4 R ist; folglich zählen die vier Winkel nur als drei bestim-

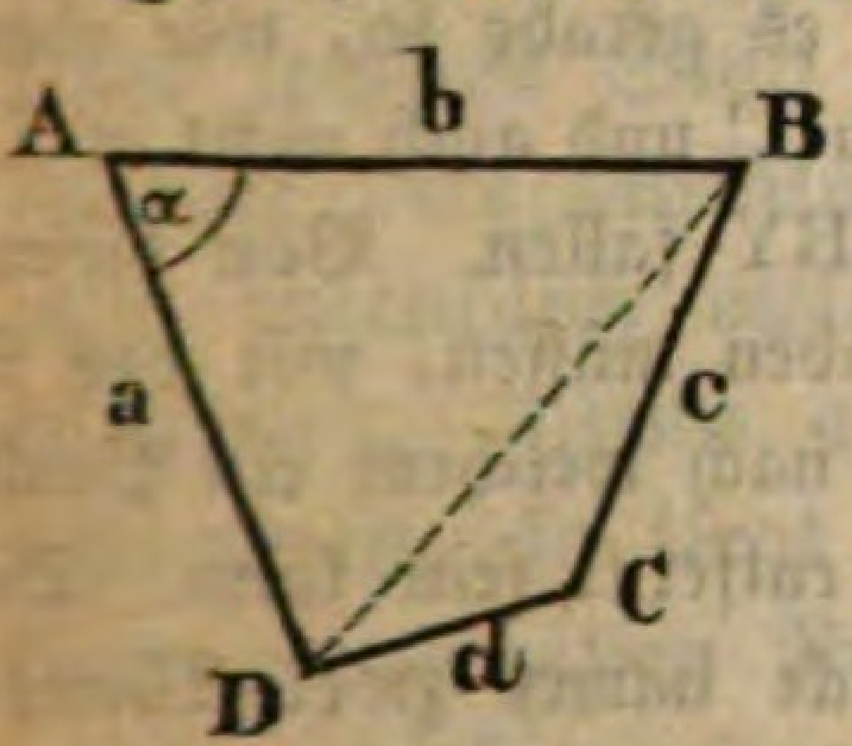
mende Stücke. Dies vorausgeschickt, so können die fünf gegebenen Stücke, in so fern sie verschiedene Fälle geben sollen, folgende sein (wenn a, b, c, d die Seiten, α, β, γ, δ die Winkel bezeichnen):



1) Gegeben a, b, c, d, α.
2) » a, b, c, α, β.
3) » a, b, c, α, γ.
4) » a, b, c, α, δ.
5) » a, b, c, γ, δ.
6) » a, b und drei Winkel.
7) » a, c und drei Winkel.

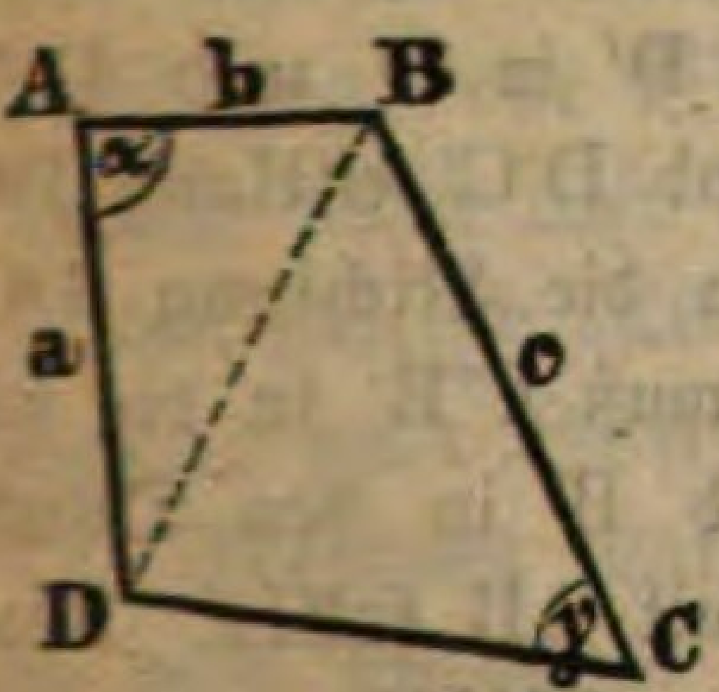
Bei 6) und 7) können natürlich alle vier Winkel als gegeben betrachtet werden.

In allen Fällen geschieht die Beurtheilung, ob das Viereck bestimmt ist, oder nicht, dadurch, daß man sich zwei Vierecke mit den gegebenen Stücken denkt und nun untersucht, ob beide Vierecke congruent sein müssen, oder nicht. Das zweite Viereck, welches dieselben Stücke hat, wie ABCD, wollen wir mit A'B'C'D' bezeichnen. (Der Leser möge es sich hinzu denken.) Die Untersuchung ist dann folgende:



Zu 1) Man kann A'B'C'D' so auf ABCD legen, daß Δ A'B'D' das Δ ABD deckt. Fällt nun auch C' in C? Nicht nothwendig; denn denkt man sich Δ BCD so um BD herum gelegt, daß C links von BD fällt, so entsteht, falls dann nur C noch innerhalb der Ebene des Winkels α liegt (was doch möglich ist), ein Viereck mit einspringender Ecke, welches mit ABCD dieselben gegebenen Stücke hat. Es kann sonach C' dahin fallen, wo C bei der angegebenen veränderten Lage des Δ BCD liegt, und die Vierecke brauchen nicht congruent zu sein. Hieraus folgt: die im Falle 1) gegebenen Stücke bestimmen das Viereck nicht immer.

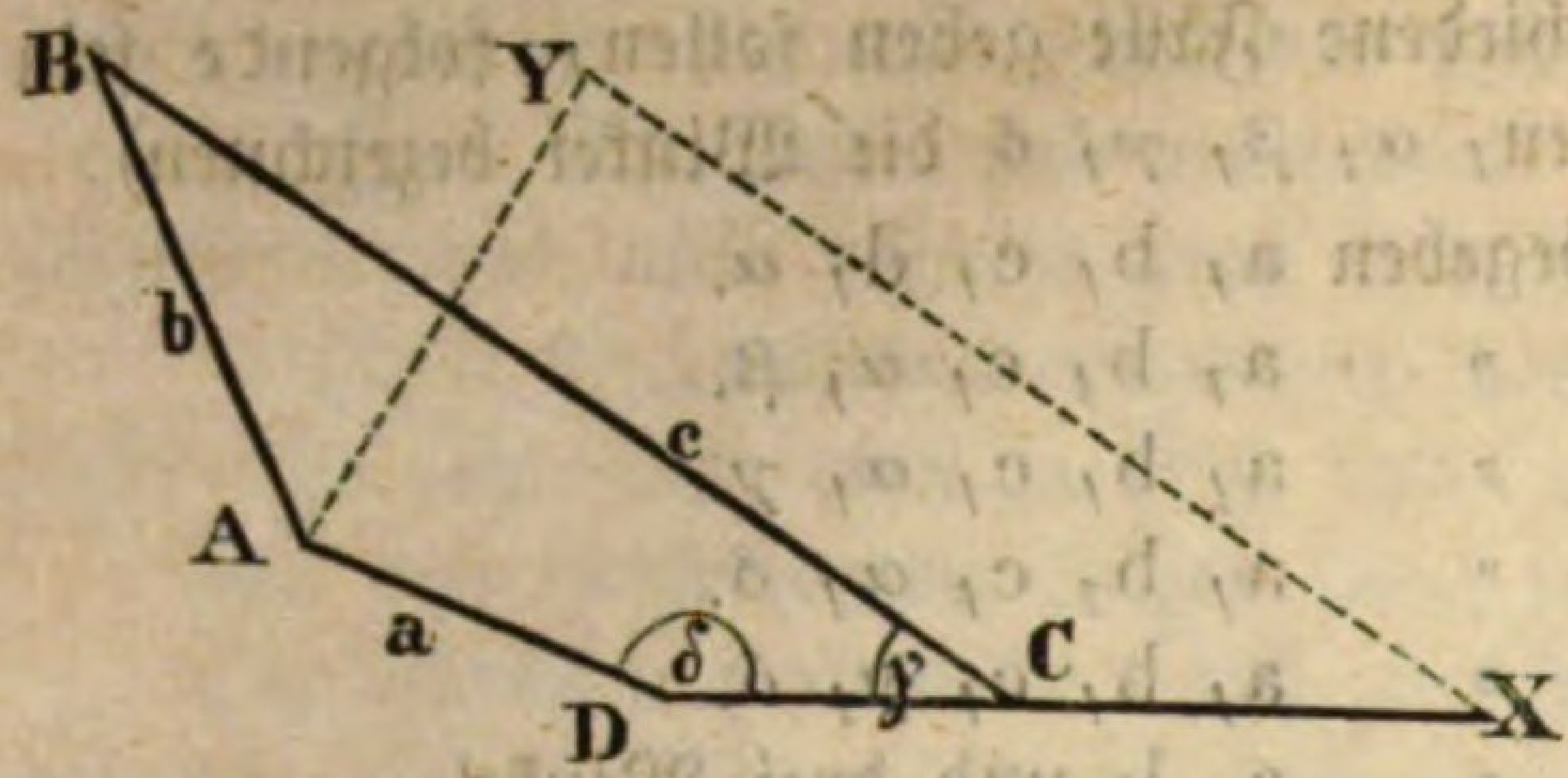
Zu 2) Die Vierecke sind nach §. 36. congruent, folglich bestimmen die gegebenen Stücke das Viereck.



Zu 3) Man kann die Vierecke so auf einander legen, daß Δ A'B'D' das Δ ABD deckt. Die Dreiecke B'C'D' und BCD haben daher zwei Seiten und einen gegenüberliegenden Winkel gleich, sind also nur dann nothwendig congruent, wenn $c \leqq BD$ ist (§. 25. Anm.). Die gegebenen Stücke bestimmen also das Viereck nicht immer.

Zu 4) Die Untersuchung ist eben so, wie in 3) zu führen. Es ergiebt sich, daß die Vierecke nur dann congruent sein müssen, wenn $c \geqq BD$ ist; die gegebenen Stücke bestimmen daher das Viereck nicht immer.

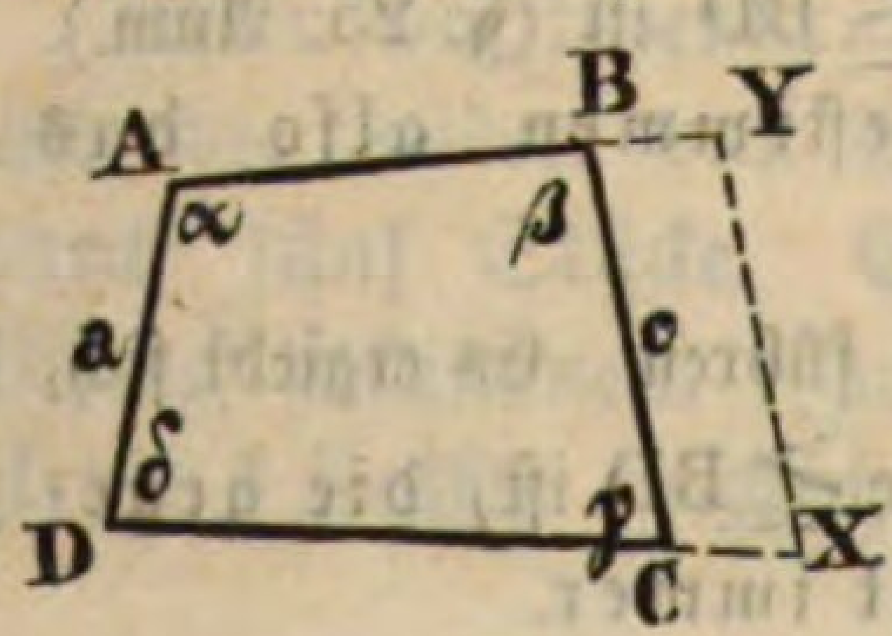
Zu 5) Man lege die Vierecke so auf einander, daß D′ in D und D′A′ entlang DA fällt, so muß A′ in A und D′C′ entlang DC fallen. Fällt nun C′ in C, so ist die Congruenz der Vierecke sehr leicht zu zeigen; es fragt sich nur, ob nicht C′ in einen andern Punkt der Richtung DC fallen kann, z. B. in X.



Nehmen wir dies an und ziehen nun XY $\#$ CB, machen XY = c und ziehen noch AY, so würde A′B′C′D′ $\cong$ AYXD sein müssen (§. 36.). Dann würde auch AY = b, also Δ ABY gleichschenklig sein. Ist nun diese Lage möglich? Sie ist es; denn man kann eine diese Lage darstellende Figur unmittelbar entwerfen. Man denke sich zuerst das gleichschenklige Δ ABY, dann von B und Y ausgehend in beliebiger Lage zwei parallele und gleich lange Linien BC und YX; denke sich ferner XC gezogen und endlich einen beliebigen Punkt D der Verlängerung von XC mit A verbunden: so hat man zwei Vierecke ABCD und AYXD, in welchen drei Seiten und die Winkel an der vierten Seite in derselben Ordnung bezüglich einander gleich sind, während die Vierecke selbst nicht congruent sind. Mehr als zwei verschiedene Vierecke mit diesen fünf Stücken kann es aber nicht geben; denn gäbe es ein drittes Viereck A″B″C″D″, so könnte man es gerade so, wie oben A′B′C′D′, auf ABCD legen, und fiele dann C″ nicht in C und auch nicht in X, so müßte doch C″B″ $\#$ CB und B″ in die Richtung BY fallen. Von diesem Punkte B″ in BY würde also A denselben Abstand haben müssen, wie von B und Y, und dies widerspricht dem Satze §. 23. No. 2., nach welchem ein Punkt von drei Punkten einer geraden Linie nicht gleich weit entfernt sein kann. Die Frage aber, ob bei jeder Größe der gegebenen Stücke immer zwei Vierecke existiren, oder in besonderen Fällen nur eins, wird am zweckmäßigsten bei der Construction dieses Vierecks entschieden und muß einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben (§. 178. Aufg. 15.); genug, daß jetzt schon klar ist: im Falle 5) bestimmen die gegebenen Stücke das Viereck nicht immer.

Zu 6) Die Congruenz der Vierecke ist sehr leicht zu beweisen; es bestimmen die gegebenen Stücke das Viereck.

Zu 7) Man lege A′B′C′D′ so auf ABCD, daß D′ in D und D′A′ entlang DA fällt, so muß A′ in A, A′B′ entlang AB und D′C′ entlang DC fallen. Es fällt also B′ in die Richtung AB und C′ in die Richtung DC. Gesetzt nun, C′ fiele nicht in C, sondern etwa in X, so muß C′B′ in die mit CB parallele Richtung XY und B′ in den Durchschnittspunkt Y dieser Richtung mit AB fallen.



Man erkennt aber auch sogleich, daß dann CXYB ein Parallelogramm sein müßte (§. 31. No. 3.); folglich kann diese Lage nur dann Statt finden, wenn AB $\#$ DC oder $\alpha + \delta = 2\,R$ ist. Entsprechen die gegebenen Winkel

dieser Bedingung nicht, d. h. ist $\alpha + \delta \gtrless 2R$, so sind die Vierecke congruent und die im Falle 7) gegebenen Stücke bestimmen das Viereck. Ist aber $\alpha + \delta = 2R$ gegeben, und man zieht durch B eine Parallele mit AD, welche DC in Z schneiden mag, so sind im ΔBZC nicht nur alle Winkel, sondern auch noch zwei Seiten (a und c) gegeben, also mehr Stücke, als zur Bestimmung eines Dreiecks nöthig sind. Hieraus folgt, daß, wenn die Winkel α und δ so gegeben sind, daß sie der Bedingung $\alpha + \delta = 2R$ entsprechen, dann die übrigen Stücke a, c und γ nicht mehr beliebig gegeben sein können. Giebt man also etwa a und γ (natürlich γ nur innerhalb der Grenze, daß $\alpha + \beta + \gamma < 4R$ ist), so kann c nur eine bestimmte Länge haben; und hat c diese Länge, so giebt es unendlich viele Vierecke mit den gegebenen Stücken (weil jede mit c parallele Linie zwischen den Richtungen AB und DC ein Viereck mit den gegebenen Stücken erzeugt); hat aber c diese Länge nicht, so existirt gar kein Viereck mit den gegebenen Stücken.

§. 38.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, daß fünf Stücke ein Viereck nicht immer vollständig bestimmen; aber eben so klar erkennt man auch, daß — und dies ist besonders hervorzuheben — fünf gegebene Stücke das Viereck niemals so unbestimmt lassen, daß man ein beliebiges sechstes Stück noch den gegebenen hinzufügen könnte, und daß bei nur vier gegebenen Stücken das Viereck noch ganz unbestimmt ist (also unendlich viele verschiedene Vierecke mit denselben vier Stücken existiren). Wenn also fünf Stücke nicht immer das Viereck völlig bestimmen, so liegt der Grund nicht in der Anzahl der Stücke, sondern in gewissen Nebenbedingungen, welche sich auf die Größe der gegebenen (zuweilen auch der nicht gegebenen) Stücke beziehen, und welche man nur hinzuzufügen braucht, um das Viereck völlig zu bestimmen. So z. B. im Falle 3. des vorigen §.: fügt man den Stücken a, b, c, α, γ noch hinzu, daß c kleiner sein soll, als die Diagonale BD, welche unmittelbar durch a, b und α bestimmt ist, so ist auch das Viereck bestimmt. Im Falle 1. hätte man hinzuzufügen, daß der nicht gegebene Winkel C concav (oder auch convex) sein soll, u. s. w. Wenn man also die Nothwendigkeit solcher Nebenbedingungen in einzelnen Fällen als sich von selbst verstehend annimmt, dann kann man sagen: zur Bestimmung eines Vierecks gehören fünf Stücke.

Rechnet man weiter auch die Diagonalen und die Winkel, welche sie mit einander oder mit den Seiten bilden, zu den Stücken eines Vierecks, so wird die Untersuchung: wie viele und welche Stücke das Viereck vollständig bestimmen, noch weitläuftiger und schwieriger; man thut daher wohl, diese Untersuchung bei vorkommenden speciellen

Fällen zu führen, um so mehr, da spätere Gesetze, namentlich die Lehre vom Kreise, hierbei wesentliche Hülfe leisten.

Im Allgemeinen kann man nur feststellen: eine Diagonale zerlegt das Viereck in zwei Dreiecke; zur Bestimmung des einen gehören drei Stücke; durch diese ist jedenfalls die Diagonale gegeben oder mitbestimmt, folglich ein Stück des zweiten Dreiecks; daher braucht man für dieses Dreieck nur noch zwei Stücke, im Ganzen also wieder fünf bestimmende Stücke.

§. 39.
Das Vieleck.

Aehnlich kann man bei einem beliebigen Vieleck schließen. Es sei dasselbe ein n-Eck, so kann man von einer Ecke aus $n-3$ Diagonalen ziehen, welche das Polygon in $n-2$ Dreiecke zerlegen. Zur Bestimmung des ersten Dreiecks gehören 3 Stücke, zu jedem der übrigen noch 2 Stücke, im Ganzen also $3+2(n-3)$ Stücke, d. h.

zur Bestimmung eines n-Ecks gehören $2n-3$ Stücke.

Als die einfachsten hierher gehörigen Congruenz-Sätze, die durch Aufeinanderlegen der Vielecke zu beweisen sind, merke man:

1) Zwei n-Ecke sind congruent, wenn $n-1$ Seiten und die von ihnen eingeschlossenen $n-2$ Winkel in dem einen eben so groß sind, als in derselben Ordnung in dem andern.

2) Zwei n-Ecke sind congruent, wenn $n-1$ Winkel (also auch alle Winkel) und $n-2$ auf einander folgende Seiten in dem einen eben so groß sind, als in derselben Ordnung in dem andern.

Anmerk. Sind zwei Figuren congruent, so müssen die Linien und Winkel der einen Figur denjenigen Linien und Winkeln der andern gleich sein, welche beim Decken auf einander fallen. In congruenten Vielecken sind also gleichliegende (homologe) Seiten und Diagonalen, so wie Winkel, welche von ihnen gebildet werden, einander gleich. In congruenten Dreiecken sind namentlich auch homologe Höhen einander gleich (vergl. §. 13. No. 1.).

§. 40.
Einleitung in die nächsten beiden Kapitel.

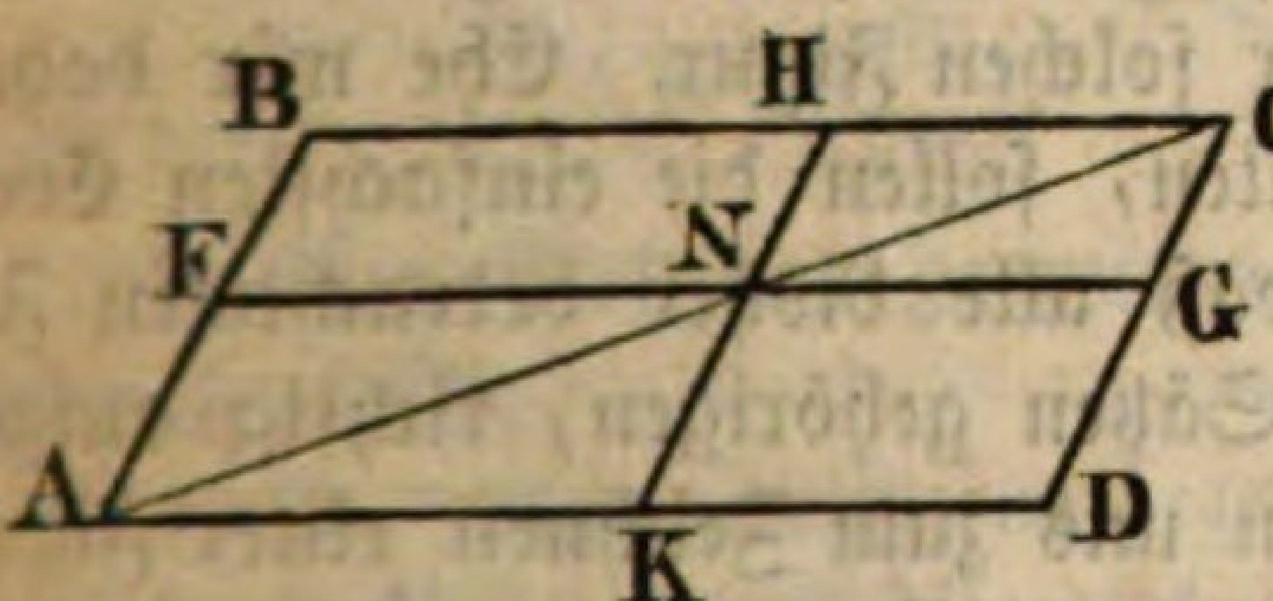
Wenn zwei Figuren congruent sind, also so auf einander gelegt werden können, daß sie sich decken, so nehmen sie gleichen Raum ein und haben gleiche Form. Um den Raum zu bestimmen, den eine Figur einnimmt, muß man anzugeben suchen, wie oft eine als Einheit gewählte begrenzte Ebene in der Figur enthalten ist, d. h. man muß die Figur messen. Die benannte Zahl, welche man so erhält, wird der Inhalt der Figur genannt, und sonach haben congruente Figuren gleichen Inhalt und gleiche Form.

Man kann aber den Inhalt von der Form trennen und bei der Vergleichung zweier Figuren nur allein den Inhalt, oder nur allein die Form berücksichtigen. Folgender Satz kann als Beispiel und Erläuterung hierzu dienen:

Lehrsatz. Legt man durch einen beliebigen Punkt N der Diagonale AC eines Parallelogramms ABCD zwei mit den Seiten parallele Linien FG und HK, so wird durch sie das Parallelogramm in vier Parallelogramme zerlegt, von welchen die beiden, durch welche die Diagonale nicht geht (sie heißen die Ergänzungen an der Diagonale) gleichen Inhalt haben, während die beiden anderen mit dem ganzen Parallelogramm von gleicher Gattung (§. 34.) sind.

Bew. Die ## NFBH und NKDG haben gleichen Inhalt, weil sie als algebraische Summen congruenter Figuren betrachtet werden können. Es ist

$$\# NFBH = \Delta ACB - \Delta ANF - \Delta NCH,$$
$$\# NKDG = \Delta CAD - \Delta NAK - \Delta CNG,$$



und die Dreiecke auf der rechten Seite beider Gleichungen sind in der angegebenen Ordnung einander congruent (§. 30.).

Ferner hat # AFNK mit dem # ABCD gleiche Winkel, und dann hat es auch gleiche, oder ungleiche an einander liegende Seiten, je nachdem im # ABCD an einander liegende Seiten gleich, oder ungleich sind. Denn ist AB = BC, so folgt ∡ BCA = ∡ BAC, und weil ∡ BCA = ∡ FNA (Gegenwinkel) ist, so muß auch ∡ FNA = ∡ FAN sein, folglich auch AF = FN. Ist aber AB $\gtrless$ BC, so muß auch ∡ BCA $\gtrless$ ∡ BAC sein, und weil wieder ∡ BCA = ∡ FNA ist, so folgt ∡ FNA $\gtrless$ ∡ FAN, daher AF $\gtrless$ FN. Hieraus geht aber hervor, daß # AFNK ein Quadrat, Rhombus, Rechteck oder Rhomboid sein muß, je nachdem # ABCD ein solches Parallelogramm ist. Dasselbe gilt von dem # NHCG.

Die ## NFBH und NKDG haben also gleichen Inhalt ohne congruent sein zu müssen; denn congruent sind sie für einen beliebigen Punkt N offenbar nur dann, wenn NH = NG und NF = NK ist, also (wie aus dem zweiten Theile des vorstehenden Beweises folgt) wenn # ABCD ein Quadrat oder Rhombus ist.

Hingegen zeigen die ## AFNK und NHCG eine Uebereinstimmung in ihrer Form, ohne congruent zu sein; denn congruent sind sie nur, wenn N der Mittelpunkt von AC ist.

Zwei Figuren, welche gleichen Raum einnehmen, also denselben Inhalt haben, heißen gleich (§. 4.). Der Begriff der Gleichheit

ist sonach ein vollständig bestimmter, und das Mittel zum Beweise der Gleichheit zweier Figuren besteht vorläufig darin, daß man solche Figuren als Summen oder Differenzen congruenter Figuren darzustellen sucht.

Nicht so ist der Begriff der Uebereinstimmung zweier Figuren in Beziehung auf ihre Form schon ein bestimmter; er wird bei der hierauf zielenden Untersuchung erst näher entwickelt und festgestellt werden müssen und erscheint dann als der Begriff der Aehnlichkeit.

Das dritte Kapitel handelt von der Vergleichung der Figuren in Beziehung auf ihren Inhalt, das vierte aber: in Beziehung auf ihre Form.

Constructionen.

§. 41.

Das richtige Zeichnen einer geometrischen Figur ist — abgesehen von dem practischen Zwecke — ein wichtiges Hülfsmittel zum Erkennen des Zusammenhanges der Stücke einer solchen Figur. Ehe wir daher zu den weiteren Untersuchungen schreiten, sollen die einfachsten Constructionen so weit gelehrt werden, daß alle bisher betrachteten Figuren, so wie die zu den folgenden Sätzen gehörigen, richtig aufgezeichnet werden können. Wir bedienen uns zum Zeichnen einer Figur des Lineals und Zirkels; mit ersterem zeichnen wir gerade Linien, mit dem Zirkel Kreislinien. Vorausgesetzt werden die folgenden Sätze, welche in dem bisher Gelehrten ihre volle Begründung haben.

1) Alle Radien eines Kreises sind einander gleich (§. 2.).

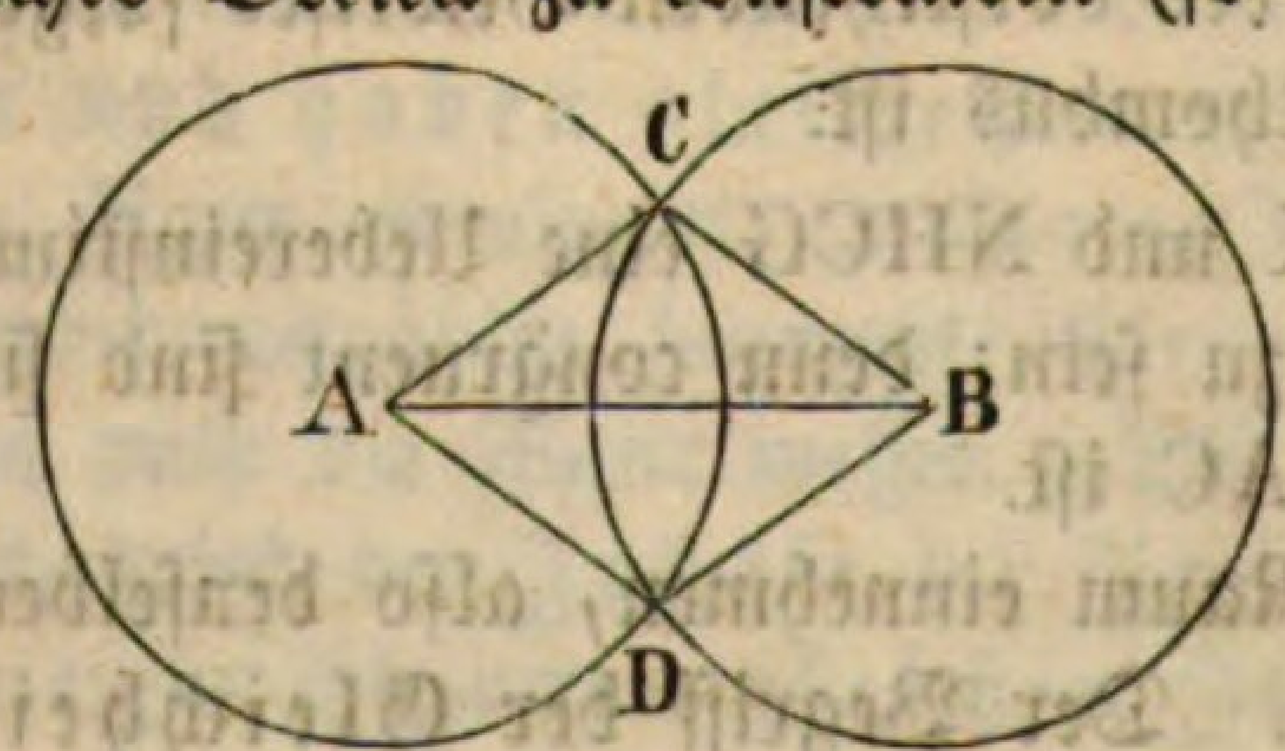
2) Jede Sehne eines Kreises schließt mit den nach ihren Endpunkten gezogenen Radien ein gleichschenkliges Dreieck ein. (Folgt aus 1)).

3) Ein Kreis kann eine gerade Linie nur in zwei Punkten schneiden (§. 23., 2.).

4) Zwei Kreise können sich ebenfalls nur in zwei Punkten schneiden (§. 28., V.).

Hieraus ergiebt sich die folgende Construction, welche wir vorausschicken, weil sie bei den späteren Aufgaben wiederholt vorkommt.

5) Aufgabe. Ueber eine begrenzte Linie AB ein gleichschenkliches Dreieck zu construiren (so daß AB seine Grundlinie wird).



Aufl. Man setze den Zirkel in den einen Endpunkt A ein, öffne ihn so weit, daß er sichtbar über die Mitte von AB hinausreicht (§. 22., 1), und schlage um A einen Kreis. Mit demselben Radius (also

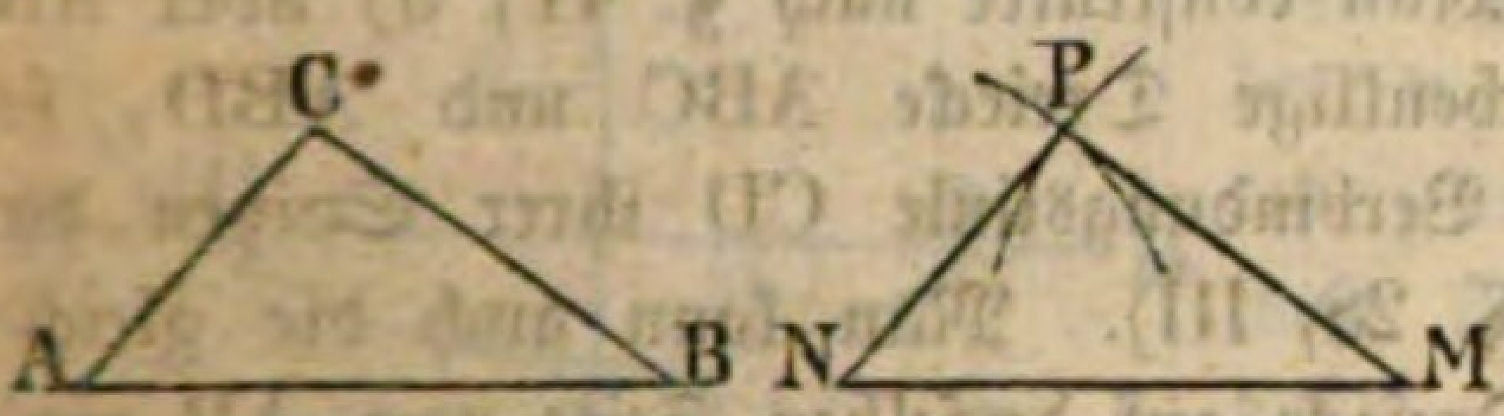
mit derselben Zirkelöffnung) schlage man einen zweiten Kreis um B. Beide Kreislinien schneiden sich in zwei Punkten C und D, welche, mit A und B verbunden, gleichschenkliche Dreiecke (CAB und DAB), wie sie verlangt wurden, geben. Es ist übrigens nicht nöthig, die vollen Kreise zu zeichnen; man braucht nur die Theile der Peripherien, welche die Durchschnittspunkte erkennen lassen. (Aus §. 25., II. folgt indirect, daß C und D auf verschiedenen Seiten der Linie AB liegen müssen.)

§. 42.

Aufgaben.

1) Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Δ ABC congruent ist.

Aufl. Man mache NM = AB, schlage mit AC als Radius um N, mit BC um M einen Kreis und verbinde den einen Durchschnittspunkt P der Peripherien mit N und M, so ist Δ NMP $\cong$ Δ ABC aus Gleichheit der drei Seiten.



2) Ein Polygon zu zeichnen, welches einem gegebenen Polygone congruent ist.

Aufl. Man zerlege das gegebene Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, so ist diese Aufgabe auf 1) zurückgeführt.

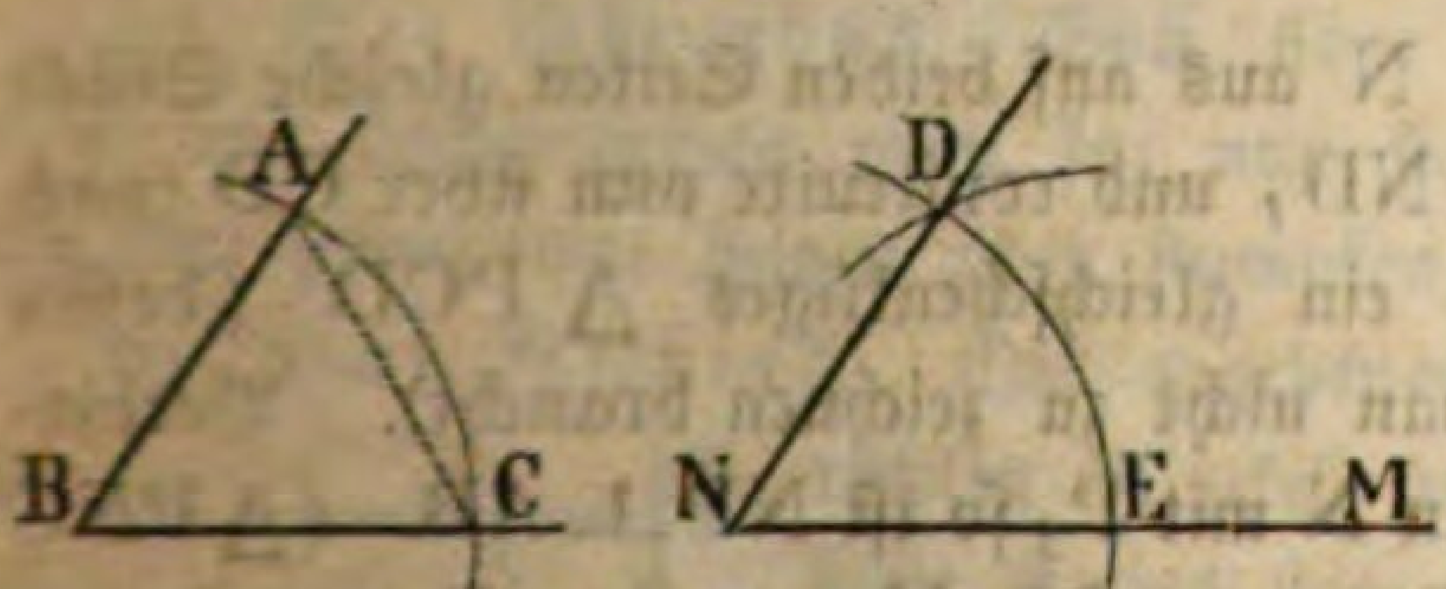
3) Ueber eine gegebene Linie AB ein gleichseitiges Dreieck zu construiren.

Aufl. Man schlage mit AB als Radius sowohl um A, als auch um B einen Kreis und verbinde den einen Durchschnittspunkt beider Peripherien mit A und B.

4) An eine Linie NM in N einen Winkel anzutragen, welcher einem gegebenen Winkel ABC gleich ist.

Aufl. Die Aufgabe ist so zu verstehen, daß N der Scheitel und NM ein Schenkel des Winkels werden soll. Man kann nun die Schenkel des gegebenen Winkels durch eine beliebige Linie schneiden, und das entstandene Dreieck (nach 1.) an NM antragen. Gewöhnlich aber erzeugt man bequemer ein gleichschenkliges Dreieck und erhält die folgende Construction:

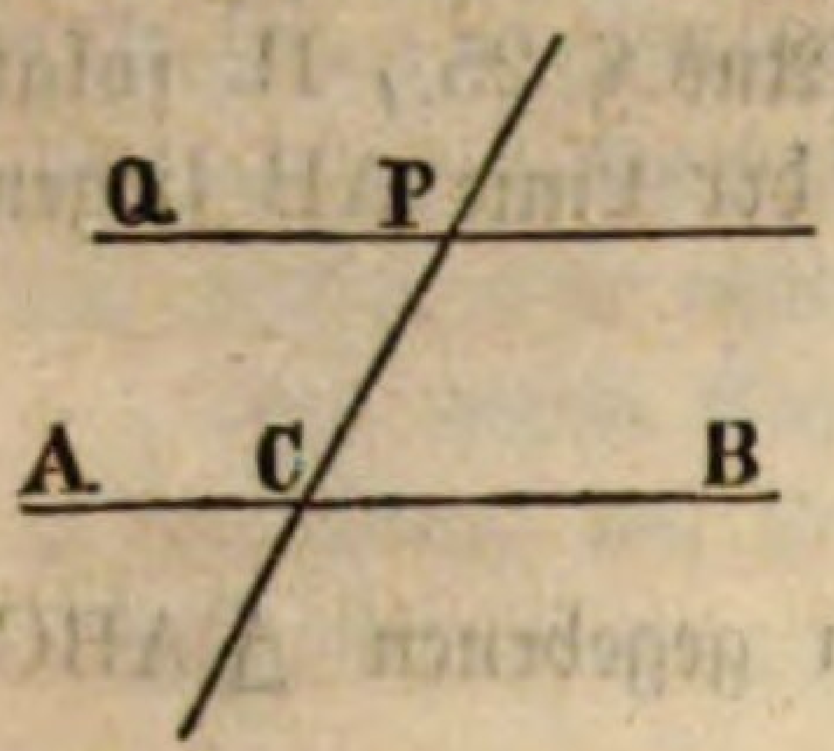
Mit einem beliebigen Radius schlage man um B einen Kreisbogen, welcher die Schenkel des Winkels ABC in A und C schneiden mag. Mit demselben Radius schlage man um N einen Kreisbogen, welcher NM in E schneiden mag. Jetzt nehme man die Sehne AC in den Zirkel (man hat nicht nöthig, sie zu zeichnen), und schlage mit ihr als Radius um E einen Kreisbogen, welcher den Bogen um



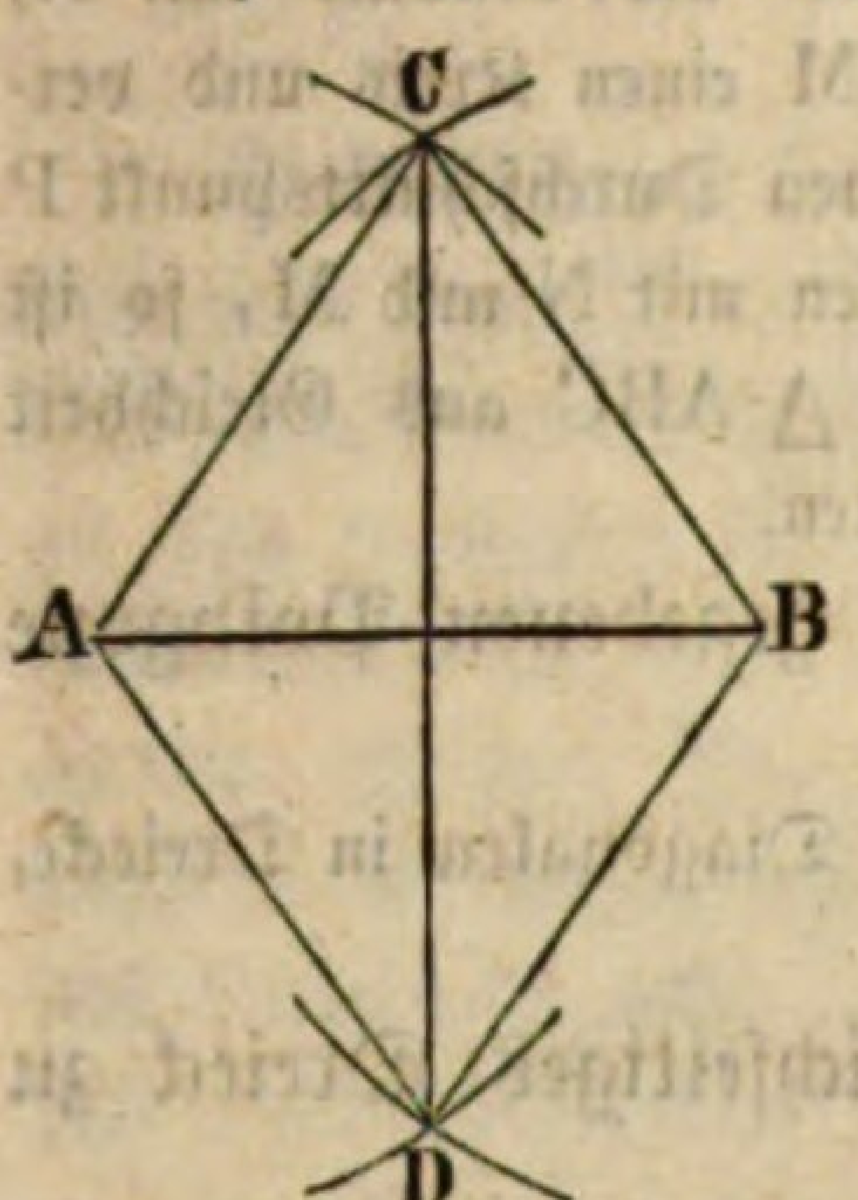
N in D schneiden mag: so ist, wenn man DN zieht, $\measuredangle$ DNE = $\measuredangle$ ABC. Denkt man sich nämlich noch DE gezogen, so ist Δ ABC $\cong$ Δ DNE.

5) Durch einen gegebenen Punkt P mit einer Linie AB eine Parallele zu legen.

Aufl. Man lege durch P eine beliebige Linie, welche AB, etwa in C, schneidet. Trägt man nun den Winkel PCB in P an PC auf der linken Seite an, und ist $\measuredangle$ QPC = $\measuredangle$ PCB, so ist PQ die verlangte Parallele (gleiche Wechselwinkel). Man hätte auch den Winkel PCA in P rechts an PC antragen können; oder man hätte auch, statt gleicher Wechselwinkel, gleiche Gegenwinkel erzeugen können.



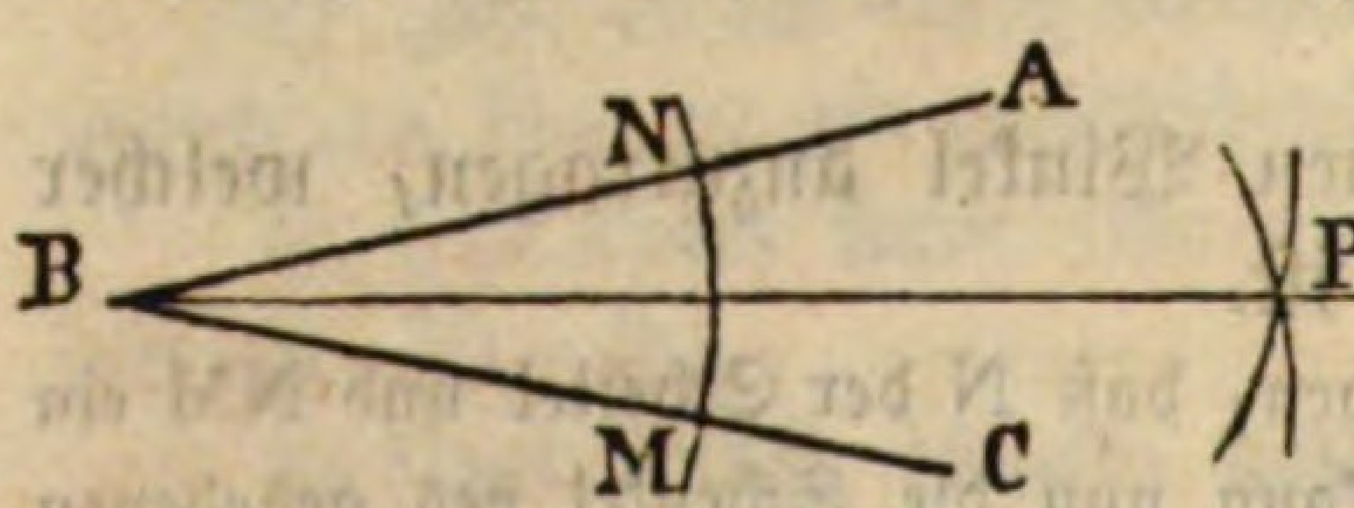
6) Eine Linie AB zu halbiren.



Aufl. Man construire nach §. 41, 5) über AB zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD, so halbirt die Verbindungslinie CD ihrer Spitzen die Linie AB (§. 28, III). Man kann auch die gleichschenkligen Dreiecke auf derselben Seite von AB construiren, hat aber dann den doppelten Nachtheil, daß man die Kreisbogen nicht mit demselben Radius schlagen kann (weil die Dreiecke nicht congruent sein dürfen), und daß die Zeichnung nicht so correct wird, als wenn C und D auf verschiedenen Seiten von AB liegen.

7) Einen Winkel ABC zu halbiren.

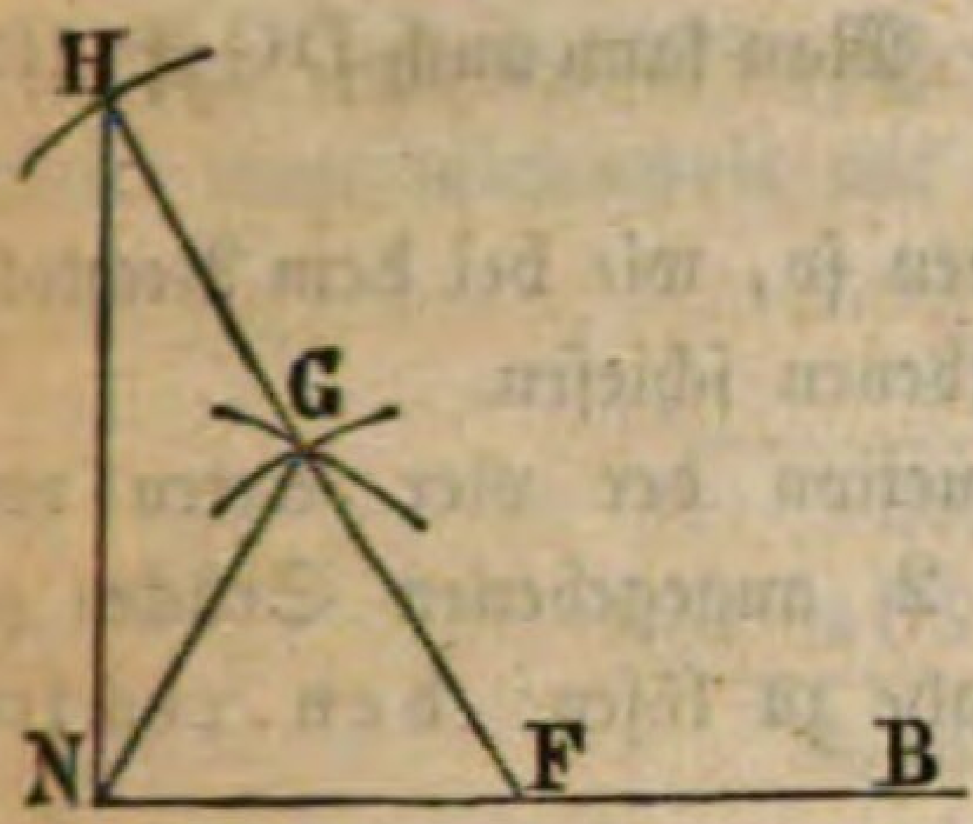
Aufl. Mittelst eines Kreisbogens schneide man von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke ab: BN = BM. Dann schlage man um N und M Kreisbogen mit gleichen Radien (am bequemsten mit demselben Radius, den man eben benutzt hat), welche sich B gegenüber in P schneiden mögen. Zieht man nun BP, so halbirt diese Linie den $\measuredangle$ ABC. Zum Beweise denke man sich NP und MP gezogen, so ist Δ NBP $\cong$ Δ MBP.



8) In einem Punkte N der Linie AB auf AB eine Senkrechte zu errichten.

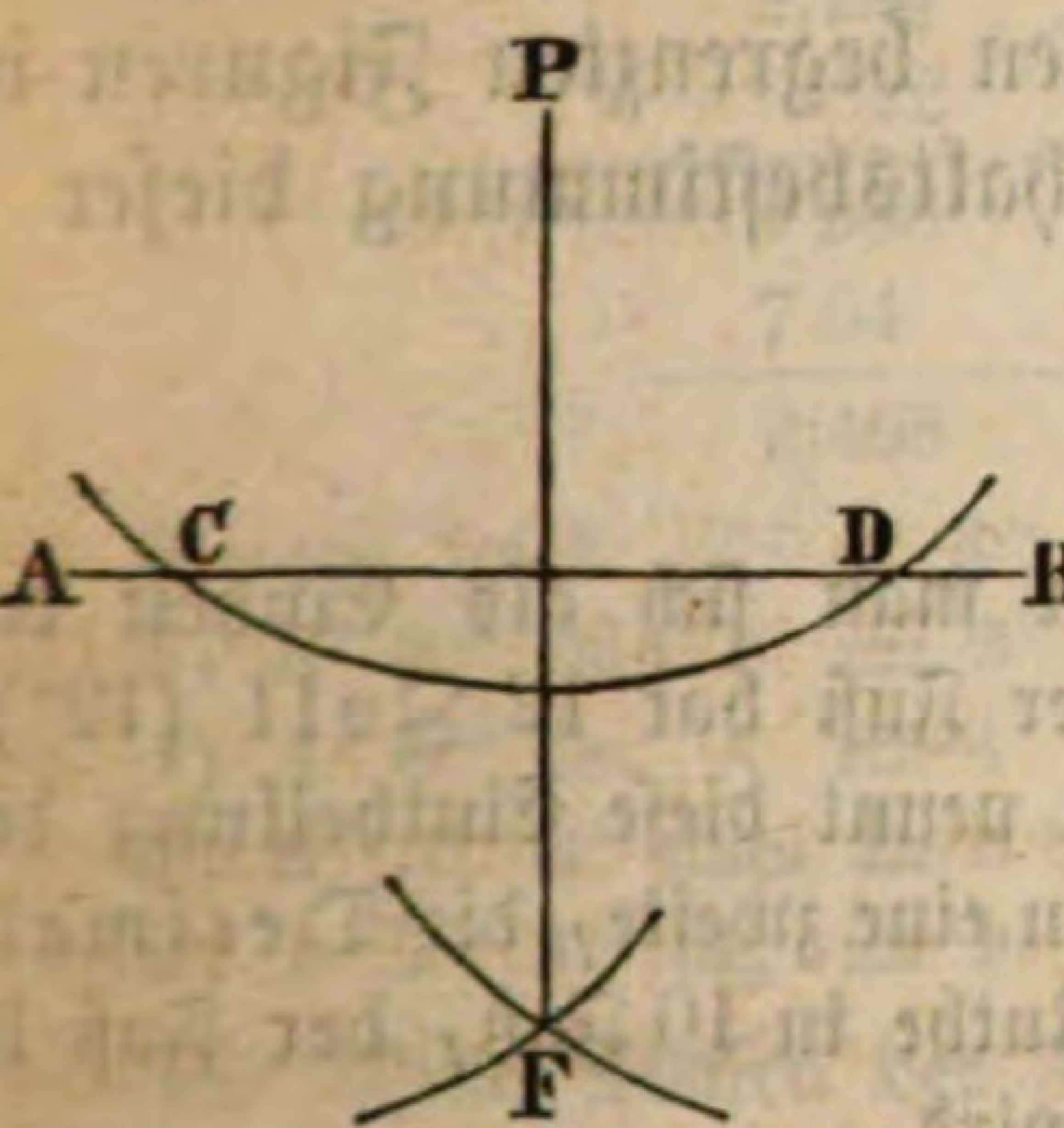
Aufl. Man schneide auf AB von N aus auf beiden Seiten gleiche Stücke ab: NC = ND, und construire nun über CD (nach §. 41, 5) ein gleichschenkliges Δ PCD (dessen Schenkel man nicht zu zeichnen braucht). Verbindet man nun N mit P, so ist NP $\perp$ AB. (Δ PNC $\cong$ Δ PND). — Ist N der eine Endpunkt der Linie AB, und kann AB nicht über N verlängert werden, so ist folgende Construction bequem:





Man construire über einen beliebigen Theil NF der Linie NB ein gleichschenkliges △ GNF, verlängere FG um sich selbst über G (so daß GH = GF = GN wird) und ziehe NH: so ist NH ⊥ NB. Der Grund ist leicht einzusehen. Da die △△ GNF und GNH gleichschenklig sind, so ist ∡ HNF gleich der Summe der spitzen Winkel bei F und H. Mit diesen Winkeln zusammen beträgt er aber 2 R, folglich allein 1 R. — Gewöhnlich construirt man △ GNF gleichseitig.

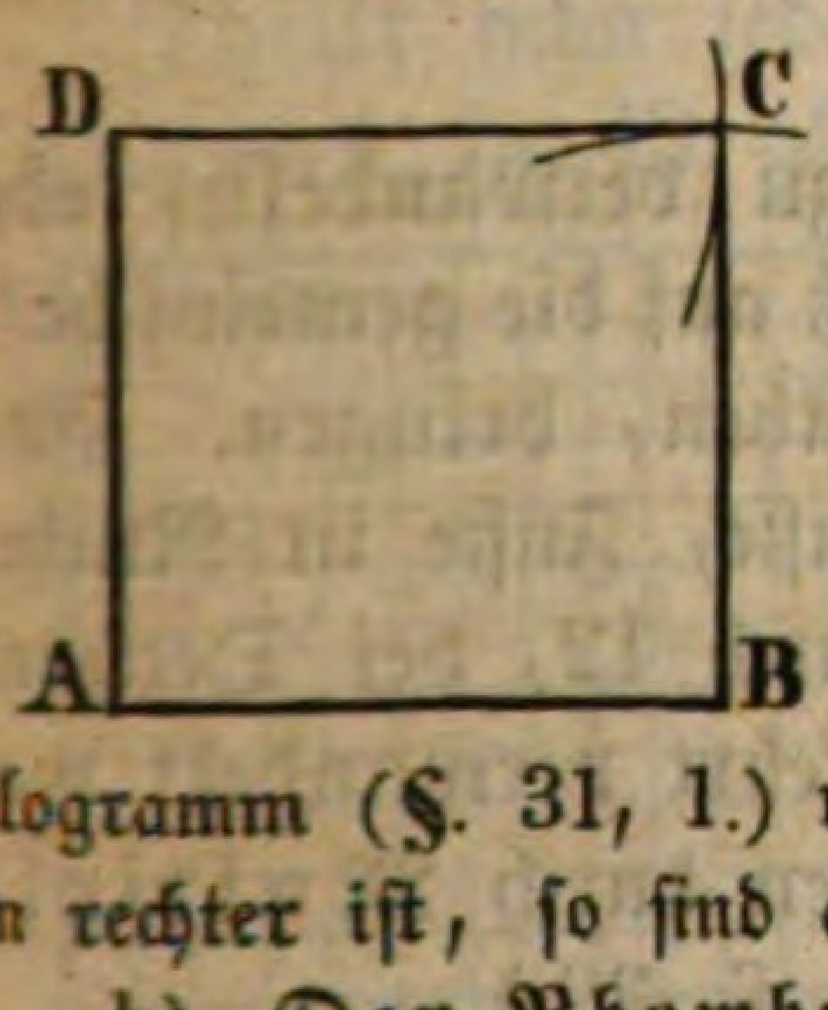
9) Von einem Punkte P auf eine Linie AB eine Senkrechte zu fällen.



Aufl. Man setze den Zirkel in P ein, öffne ihn so weit, bis er über AB hinaus reicht, und schlage nun um P einen Kreis, dessen Peripherie die AB in C und D schneiden mag. Nach §. 41, 2) ist dann PCD ein gleichschenkliges Dreieck, und beschreibt man über CD ein zweites solches Dreieck FCD (am bequemsten auf der anderen Seite von CD und mit demselben Schenkel), so ist, wenn man PF zieht, diese Linie auf AB senkrecht (§. 28, III.). Wie schon erwähnt, halbirt auch PF die CD.

10) Ein Quadrat, einen Rhombus, ein Rechteck und ein Rhomboid aus den nach §. 35. zur Bestimmung nöthigen Seiten und Winkel zu construiren.

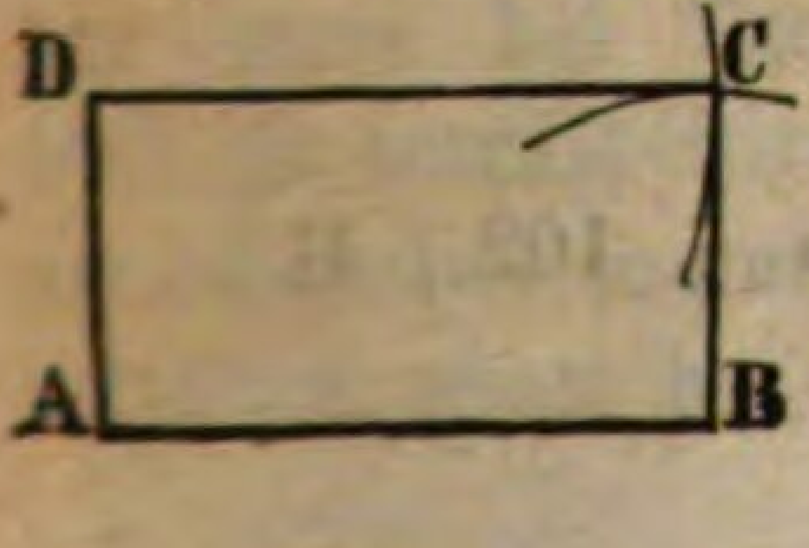
a) Das Quadrat. Soll über AB ein Quadrat construirt werden, so errichte man in A auf AB eine Senkrechte AD, mache AD = AB und schlage um B und um D Kreise mit dem Radius AB. Die Peripherien müssen sich in A schneiden, aber auch in einem zweiten A gegenüberliegenden Punkte C, und zieht man CB und CD: so ist ABCD ein Quadrat.



Bew. ABCD ist gleichseitig, folglich ein Parallelogramm (§. 31, 1.) und zwar ein Quadrat oder Rhombus; weil aber ∡ A ein rechter ist, so sind alle Winkel rechte (§. 16.); folglich ist es ein Quadrat.

b) Der Rhombus. Soll über AB ein Rhombus construirt werden, so ist die Construction eben so; nur statt des rechten Winkels DAB nimmt man den gegebenen spitzen oder stumpfen Winkel des Rhombus.

c) Das Rechteck. Die gegebenen zwei Seiten trägt man unter einem rechten Winkel an einander. Es mögen AB und AD diese Seiten sein. Jetzt schlägt man um B mit AD (als Radius) und um D mit AB Kreisbogen, welche sich in C schneiden mögen. Zieht man dann CB und CD, so ist



ABCD ein Rechteck. (Beweis ähnlich wie bei a). — Man kann auch DC ⧺ AB, BC ⧺ AD ziehen.

d) Das Rhomboid. Die Construction ist eben so, wie bei dem Rechteck; nur nimmt man statt des rechten Winkels den gegebenen schiefen.

Anmerk. Als eine Uebung ist die Construction der vier Arten von Parallelogrammen aus den im §. 35, Anmerk. 2. angegebenen Stücken zu empfehlen. — Durch Nr. 3. und 7. ist die Aufgabe zu lösen: den rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Drittes Kapitel.

Vergleichung der von geraden Linien begrenzten Figuren in Rücksicht auf ihren Inhalt. Inhaltsbestimmung dieser Figuren.

§. 43.

I. Zum Messen der Linien bedient man sich als Einheit der Ruthe (1°); sie hat 12 Fuß (12′); der Fuß hat 12 Zoll (12″); der Zoll hat 12 Linien (12‴). Man nennt diese Eintheilung die Duodecimal-Eintheilung, weil man eine zweite, die Decimal-Eintheilung, hat, nach welcher die Ruthe in 10 Fuß, der Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien zerlegt wird.

Zum Messen größerer Längen dient die Meile; sie enthält 2000 Ruthen, also 24000 Duodecimalfuß oder 20000 Decimalfuß. Auch rechnet man die Meile zu 10000 Schritt (10000 ˣ), so daß 1 Schritt gleich 2 Decimalfuß ist, und 5 Schritt 1 Ruthe oder 12 Duodecimalfuß ausmachen.

Um Duodecimal-Maß in Decimal-Maß zu verwandeln, oder umgekehrt dieses in jenes, muß man solches Maß auf die gemeinschaftliche Einheit beider Eintheilungen, d. h. auf Ruthen, bringen. Hierbei hat man, um Linien in Zolle, Zolle in Fuße, Fuße in Ruthen zu verwandeln, bei Duodecimal-Maß immer durch 12, bei Decimal-Maß immer durch 10 zu dividiren. Umgekehrt verwandelt man Ruthen in Fuße, Fuße in Zolle, Zolle in Linien durch Multiplication mit resp. 12 und 10. (Vergl. Arithm. §. 39.)

Beispiele.

1) $8^\circ\ 3'\ 2''$ ddc. $= \left(8 + \frac{3}{12} + \frac{2}{144}\right)^\circ$.

$$= 8\frac{19}{72}{}^\circ = 8{,}26388^\circ$$

$$= 8^\circ\ 2'\ 6''\ 4''' \text{ dc. (Arithm. §. 102., II.)}$$

2) $2^\circ\ 4'\ 3''\ 6'''$ dc. $= 2{,}436^\circ$.

Um nun 0,436° auf Fuße, Zolle u. s. w. ddc.-M. zu bringen, multiplicirt man wiederholt mit 12 und verfährt practisch so:

$$
\begin{array}{rl}
0{,}436 & \\
12 & \\
\hline
872 & \\
436 & \\
\hline
5{,}232 & \ldots\ldots\ldots\ldots 5' \\
12 & \\
\hline
464 & \\
232 & \\
\hline
2{,}784 & \ldots\ldots\ldots\ldots 2'' \\
12 & \\
\hline
1568 & \\
784 & \\
\hline
9{,}408 & \ldots\ldots\ldots\ldots 9'''
\end{array}
$$

Hieraus folgt: 2° 4′ 3″ 6‴ dc. = 2° 5′ 2″ 9‴ ddc.

3) 3′ 4‴ ddc. = 2′ 5″ $2_{/3}$‴ dc.

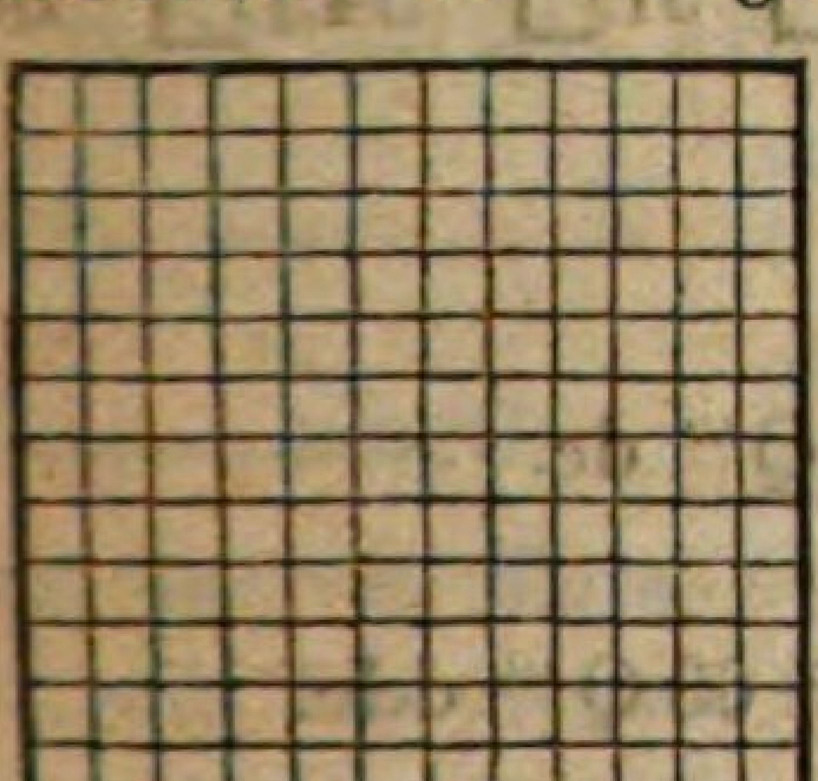
4) 4′ 6‴ dc. = 4′ 10″ $5_{/6}$‴ ddc.

5) 8° 8′ 8″ ddc. = 8° 7′ 2″ 2‴ dc.

6) 7′ 7″ 3‴ dc. = 9′ 3″ $3_{/7}$‴ ddc.

II. Zum Messen der Flächen bedient man sich eines Quadrates. Je nachdem die Seite desselben eine Ruthe, ein Fuß, ein Zoll, eine Linie ist, heißt das Quadrat: eine Quadrat-Ruthe (□° oder Q°), ein Quadrat-Fuß (□′ oder Q′), ein Quadrat-Zoll (□″ oder Q″), eine Quadrat-Linie (□‴ oder Q‴).

Theilt man jede von zwei neben ander liegenden Seiten eines Quadrates in 12 gleiche Theile, und zieht durch jeden Theilpunkt



jeder Seite eine Parallele mit der anderen, so wird das Quadrat in 12 × 12, also 144 Quadrate zerlegt. Ist nun die Seite des großen Quadrats eine Ruthe lang, so ist die Seite jedes kleinen ein Fuß lang. Hieraus folgt: es ist bei der Duodecimal-Eintheilung 1□° = 144□′, 1□′ = 144□″, 1□″ = 144□‴.

Bei der Decimal-Eintheilung erhält man eben so: 1□° = 100□′, 1□′ = 100□″, 1□″ = 100□‴; 180□° geben 1 Preuß. Morgen.

Will man Quadrat-Ruthen in Quadrat-Fuße verwandeln, so hat man bei Duodecimal-Maß mit 144, bei Decimal-Maß mit 100 zu multipliciren; will man Quadrat-Fuße in Quadrat-Ruthen verwandeln, so muß man resp. durch 144 und 100 dividiren. Ebenso verfährt man bei den niederen Einheiten. Um endlich Duodecimal-

Maß in Decimal-Maß zu verwandeln, oder umgekehrt dieses in jenes, bringt man das gegebene Maß auf die gemeinschaftliche Einheit beider Eintheilungen, d. h. auf Quadrat-Ruthen.

Beispiele.

1) $3\square^\circ\ 28\square'\ 72\square''$ ddc. $= \left(3 + \frac{28}{144} + \frac{72}{144^2}\right)\square^\circ$

$= 3\,\frac{57}{288}\,\square^\circ$

$= 3{,}197569\,\square^\circ$

$= 3\square^\circ\ 19\square'\ 75\square''\ 69\square'''$ dc.

2) $3\square^\circ\ 28\square'\ 72\square''$ dc. $= 3{,}2872\,\square^\circ$

```
 0,2872
    144
 ------
  1 1488
 11 488
 28 72
 ------
 41,3568 . . . . . . . . . 41 □'
    144
 ------
  1 4272
 14 272
 35 68
 ------
 51,3792 . . . . . . . . . 51 □''
    144
 ------
  1 5168
 15 168
 37 92
 ------
 54,6048 . . . . . . . . . 54 □'''
```

Es ist also $3\square^\circ\ 28\square'\ 72\square''$ dc. $= 3\square^\circ\ 41\square'\ 51\square''\ 54{,}_{6}\square'''$ ddc.

3) $24\,Q'\ 81\,Q''\ 48\,Q'''$ ddc. $= \frac{2653}{15552}\,Q^\circ.$

$= 0{,}170589\ Q^\circ.$

$= 17\,Q'\ 5\,Q''\ 89\,Q'''$ dc.

4) $90\,Q'\ 8\,Q''\ 70\,Q'''$ dc. $= 0{,}90087\,Q^\circ.$

$= 129\,Q'\ 104\,Q''\ 63\,Q'''$ ddc.

5) $75\square''$ ddc. $= 36\square''\ 17\square'''$ dc.

6) $5\square^\circ\ 70\square'\ 8\square''$ dc. $= 5\square^\circ\ 100\square'\ 131\square''$ ddc.

Anmerk. 1. Man beachte folgende Verhältnisse:

$1'$ dc. : $1'$ ddc. $= 6 : 5.$

$1''$ dc. : $1''$ ddc. $= 36 : 25 = 6^2 : 5^2.$

$1'''$ dc. : $1'''$ ddc. $= 216 : 125 = 6^3 : 5^3.$

$1\square'$ dc. : $1\square'$ ddc. $= 36 : 25.$

$1\square''$ dc. : $1\square''$ ddc. $= 36^2 : 25^2$; u. s. w.

Anmerk. 2. In Frankreich rechnet man nach Metern. Es ist 1 Meter = 3,07844 alte Pariser Fuß. Ferner ist 1 Meter = 3,18620 Preußische Fuß ddc., und 1 Preußischer Fuß = 0,31385 Meter. Der Meter hat 10 Decimeter, dieser 10 Centimeter, dieser 10 Millimeter. Ferner ist 1 Meter = 0,1 Decameter = 0,01 Hectometer = 0,001 Kilometer. 100 Quadr.-Meter sind = 1 Are und 100 Aren = 1 Hectare.

Endlich ist noch 1 Preuß. Fuß = 0,99286 Oesterr. Fuß = 1,07536 Bayer. Fuß = 1,10828 Sächs. Fuß = 1,07449 Hannov. Fuß = 1,09551 Würtemb. Fuß = 1,09984 Braunschw. Fuß = 1,09091 Kurheß. Fuß = 1,04618 Bad. Fuß = 1,02972 Engl. und Ruff. Fuß.

§. 44.

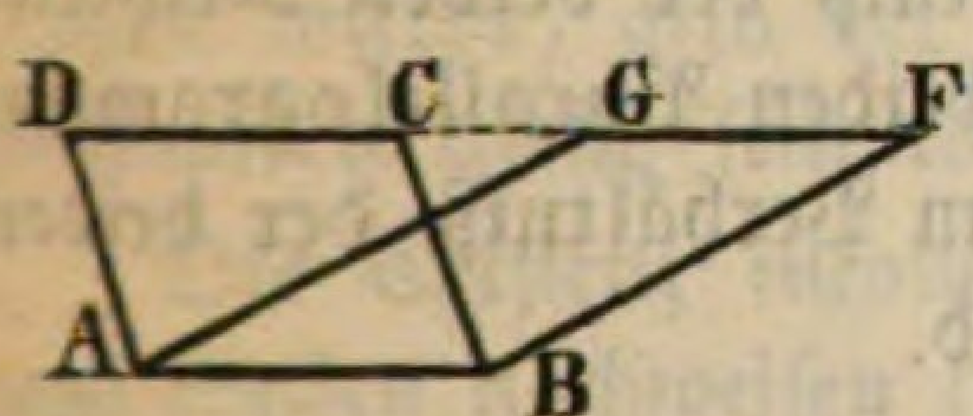
Lehrsätze.

1) Parallelogramme von gleichen Höhen und Grundlinien sind einander gleich.

2) Ein Parallelogramm ist doppelt so groß als ein Dreieck, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

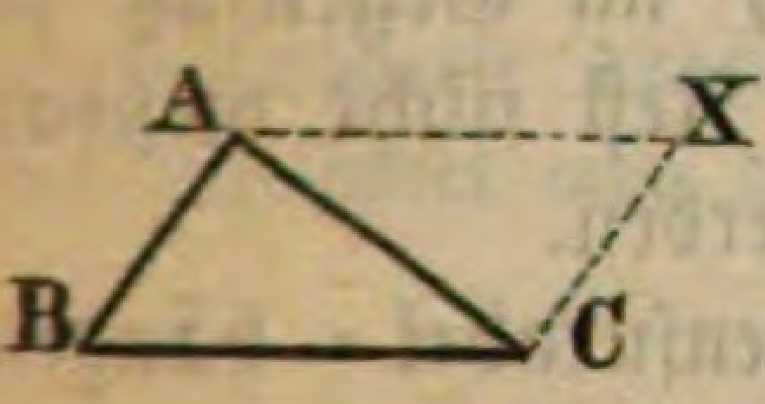
3) Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Bew. zu 1) Man lege die Parallelogramme mit ihren gleichen Grundlinien auf einander. ABCD und ABFG mögen diese Parallelogramme sein, so müssen, weil die Höhen gleich sind, CD und FG in eine Richtung fallen (§. 29., II.). Die Parallelogramme sind nun gleich als Differenzen congruenter Figuren.



Paralleltrapez ABFD ≌ ABFD
$\triangle$ CBF ≌ $\triangle$ DAG, subtrahirt:
\# ABCD = \# ABFG.

Bew. zu 2) ABC sei das Dreieck; man ergänze es zu einem Parallelogramm ABCX, indem man AX ⫲ BC und CX ⫲ BA zieht. Dann hat \# ABCX mit dem $\triangle$ABC gleiche Grundlinie (BC) und Höhe und ist nach §. 30. doppelt so groß als das Dreieck. Nun ist aber \# ABCX jedem anderen Parallelogramm gleich, welches dieselbe Grundlinie und Höhe hat (nach 1.), woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.



Bew. zu 3) Die Dreiecke sind gleich als Hälften gleicher Parallelogramme.

§. 45.

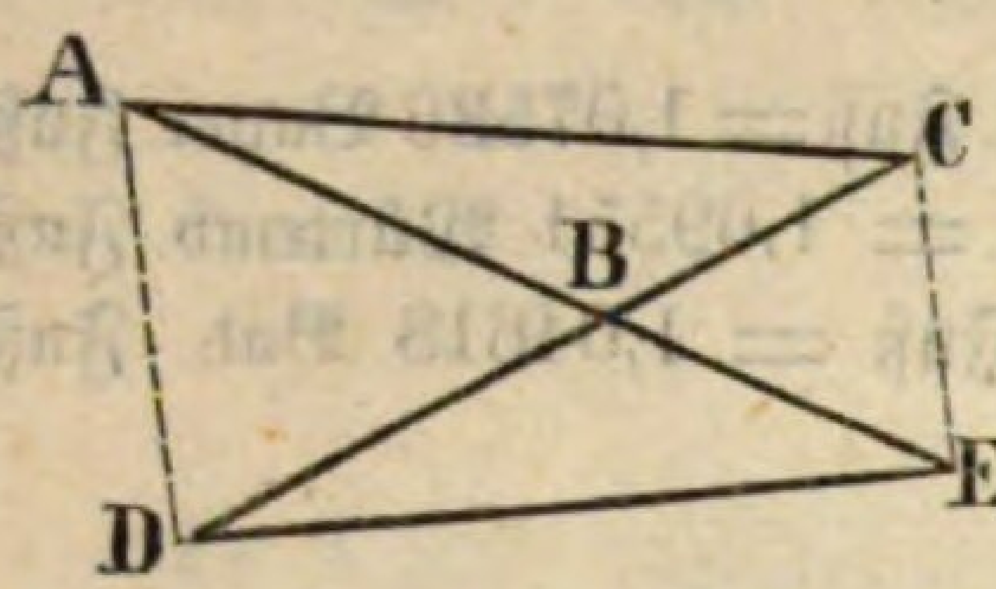
Zusatz.

Die Sätze Nr. 1. und 3. im vorigen §. kommen häufig in folgender Form vor:

1) Zwei Parallelogramme oder Dreiecke sind gleich, wenn sie dieselbe Grundlinie haben und zwischen denselben Parallelen liegen.

Als eine Anwendung dieses Satzes merke man noch:

2) Zwei Scheitel-Dreiecke ABC und DBE, d. h. zwei Dreiecke, welche ein Paar Scheitelwinkel zu Winkeln haben, sind gleich, wenn die Verbindungslinien AD und CE der Ecken, die nicht in der Richtung einer Seite liegen, parallel sind.



Bew. Man ziehe von den nach Nr. 1. gleichen $\triangle\triangle$ ADC und ADE das Dreieck ADB ab.

Anmerk. Von den umgekehrten Sätzen merke man folgenden: Haben zwei gleiche Dreiecke dieselbe Grundlinie, und liegen sie auf derselben Seite dieser Grundlinie: so ist die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Ecken der Grundlinie parallel.

§. 46.

Die Gesetze in §. 44. gestatten die Vergleichung zweier Parallelogramme oder Dreiecke auf die Vergleichung zweier Rechtecke zurückzuführen; denn ein Paralellogramm ist einem Rechtecke gleich, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, d. h. einem Rechteck, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten resp. der Grundlinie und Höhe des Parallelogrammes gleich sind; das Dreieck ist die Hälfte eines solchen Rechteckes. Was dann von dem Verhältniß der beiden Rechtecke wahr ist, gilt auch von dem Verhältniß der beiden Parallelogramme, welche den Rechtecken gleich sind, und von dem Verhältniß der beiden Dreiecke, welche die Hälften der Rechtecke sind.

§. 47.

Erklärung.

Haben zwei Linien einen gemeinschaftlichen aliquoten Theil (Arithm. §. 39.), lassen sie sich also durch dieselbe Einheit messen, ohne daß ein Rest bleibt, so heißen sie commensurabel, im Gegensatz zu solchen Linien, welche durch dieselbe Einheit ohne Rest nicht meßbar sind und incommensurabele Linien genannt werden.

Die Begriffe »commensurabel« und »incommensurabel« hängen eng mit den arithmetischen Begriffen »rational« und »irrational« zusammen.

Zunächst ist klar, daß das Verhältniß zweier Linien, welche commensurabel sind, durch rationale Zahlen ausgedrückt werden kann. Ist z. B. e der gemeinschaftliche aliquote Theil, so muß jede Linie ein Vielfaches von e sein, die eine etwa 7e, die andere 12e, und dann verhalten sich die Linien zu einander, wie 7 : 12.

Umgekehrt sind zwei Linien commensurabel, wenn ihr Verhältniß rational ist. Bezeichnen wir die Linien mit a und b, sind α, β, γ, δ ganze Zahlen und verhält sich

$$a : b = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta},$$

so folgt hieraus $a : b = \alpha\delta : \beta\gamma$ oder

$$\frac{a}{\alpha\delta} = \frac{b}{\beta\gamma};$$

d. h. es ist der $\alpha\delta^{\text{te}}$ Theil von a gleich dem $\beta\gamma^{\text{ten}}$ Theil von b; also sind die Linien commensurabel.

Hieraus ergiebt sich aber indirect, daß das Verhältniß incommensurabeler Linien nicht rational sein kann, und daß Linien, deren Verhältniß irrational ist, incommensurabel sein müssen. Verhält sich z. B.

$$a : b = \sqrt{\alpha} : \beta,$$

und wollte man annehmen, a und b wären commensurabel, so könnte man, wenn γ und δ ganze Zahlen sind,

$$a : b = \gamma : \delta$$

setzen, woraus aber auch

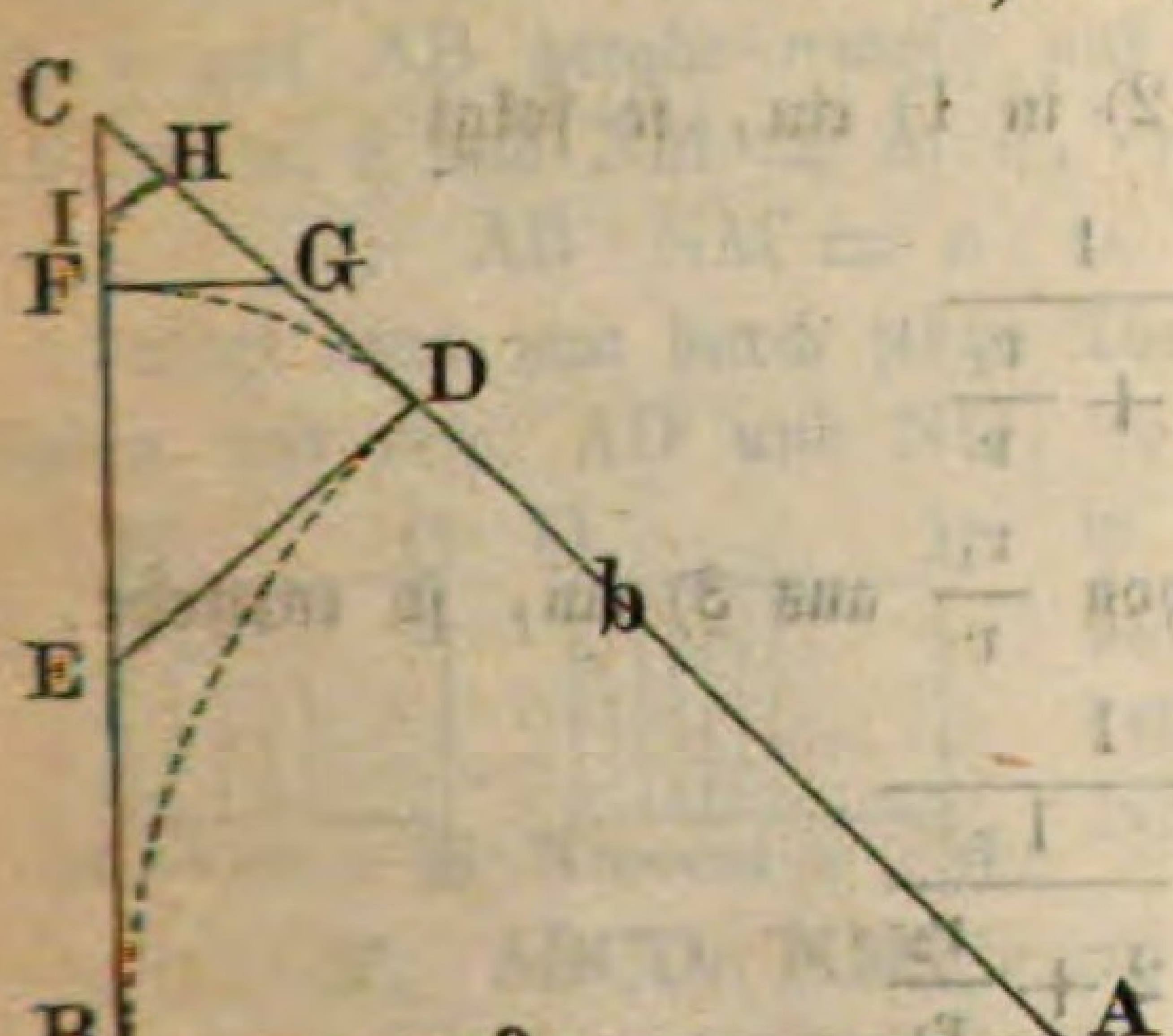
$$\gamma : \delta = \sqrt{\alpha} : \beta \quad \text{oder} \quad \sqrt{\alpha} = \frac{\beta\gamma}{\delta}$$

folgen würde, also der Widerspruch, daß eine irrationale Zahl einer rationalen gleich sein könne.

Die Existenz incommensurabeler Linien steht sonach fest, sobald man Linien nachweisen kann, deren Verhältniß irrational ist. Solche Linien sind z. B. die Diagonale und die Seite desselben Quadrats, welche zu einander das Verhältniß $\sqrt{2} : 1$ haben. Es läßt sich dies schon jetzt auf folgende Weise zeigen:

Es sei ABC ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck, wie solches in jedem Quadrat durch eine Diagonale erzeugt wird; jede Kathete werde durch a, die Hypotenuse durch b bezeichnet. Trägt man AB auf AC ab, gleich AD, und bezeichnet man den Rest DC durch r, so ist

$$1)\quad b = a + r.$$



Errichtet man jetzt DE ⊥ AC, so ist CDE auch ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, weil in demselben $\measuredangle C = \frac{1}{2} R$ ist, daher auch $\measuredangle E = \frac{1}{2} R$ sein muß. Ferner ist auch DE = BE (folgt leicht aus $\triangle ADE \cong \triangle ABE$); folglich ist $CD = DE = EB = r$. Trägt man nun ED auf EC ab, gleich EF, und bezeichnet den Rest FC mit r_1, so ist BC oder

$$2)\quad a = 2r + r_1.$$

Errichtet man ferner $FG \perp EC$, so ist ΔCFG wieder rechtwinklig und gleichschenklig, und auch $FG = DG$ ($\Delta EFG \cong \Delta EDG$), folglich $CF = FG = GD = r_1$. Trägt man also wieder die Kathete GF auf die Hypotenuse GC ab, gleich GH, und bezeichnet den Rest HC durch r_2, so ist DC oder

$$3)\quad r = 2r_1 + r_2.$$

Errichtet man abermals $HI \perp GC$, wodurch das rechtwinklige und gleichschenklige ΔIHC entsteht, trägt wieder die Kathete HI auf IC ab, nennt den Rest r_3 und fährt so fort, immer neue rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke zu erzeugen und immer ihre Katheten auf die Hypotenuse abzutragen — was offenbar ins Unendliche fortgesetzt werden kann — nennt die weiteren Reste r_4, r_5 u. s. w.: so erhält man

$$4)\quad r_1 = 2r_2 + r_3$$

$$5)\quad r_2 = 2r_3 + r_4$$

$$6)\quad r_3 = 2r_4 + r_5$$

u. s. w.

Alle diese Gleichungen kann man durch Division umformen:

$$1)\quad \frac{b}{a} = 1 + \frac{r}{a}$$

$$2)\quad \frac{a}{r} = 2 + \frac{r_1}{r}, \quad \text{folglich} \quad \frac{r}{a} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_1}{r}}$$

$$3)\quad \frac{r}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{»} \quad \frac{r_1}{r} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_2}{r_1}}$$

$$4)\quad \frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}, \quad \text{»} \quad \frac{r_2}{r_1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_3}{r_2}}$$

$$5)\quad \frac{r_2}{r_3} = 2 + \frac{r_4}{r_3}, \quad \text{»} \quad \frac{r_3}{r_2} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_4}{r_3}}$$

$$6)\quad \frac{r_3}{r_4} = 2 + \frac{r_5}{r_4}, \quad \text{»} \quad \frac{r_4}{r_3} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_5}{r_4}} \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man nun den Werth von $\frac{r}{a}$ aus 2) in 1) ein, so folgt:

$$\frac{b}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_1}{r}}.$$

In diese Gleichung setze man den Werth von $\frac{r_1}{r}$ aus 3) ein, so entsteht:

$$\frac{b}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_2}{r_1}}}.$$

In diese Gleichung setze man den Werth von $\frac{r_2}{r_1}$ aus 4) ein und fahre so fort, so erhält man folgende Gleichung mit einem unendlichen periodischen Kettenbruch:

$$\frac{b}{a} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{u. s. w.}}}}}}.$$

Den Werth dieses Kettenbruchs — wir wollen ihn x nennen — erhält man (Arithm. §. 153. Nr. 31.) auf folgendem Wege:

Aus $x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$ folgt:

$$x = \frac{1}{2 + x}; \text{ hieraus:}$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

und, weil x hier nur positiv sein kann, $x = -1 + \sqrt{2}$. Daher ist

$$\frac{b}{a} = 1 - 1 + \sqrt{2} \quad \text{oder}$$

$$b : a = \sqrt{2} : 1.$$

§. 48.

Lehrsatz.

Zwei Rechtecke, welche eine Seite gleich haben, verhalten sich zu einander, wie ihre ungleichen Seiten.

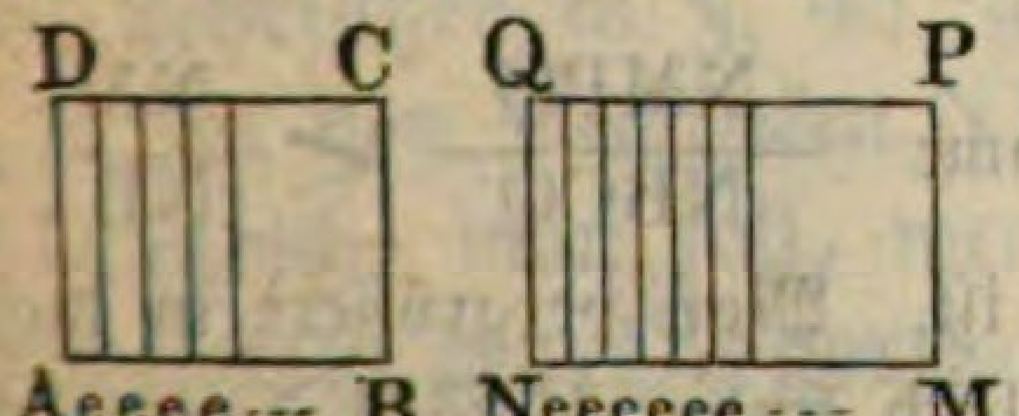
Vor. In den Rechtecken ABCD und NMPQ sei AD = NQ.

Beh. ABCD : NMPQ = AB : NM.

Beweis, wenn die ungleichen Seiten commensurabel sind. Es sei e der gemeinschaftliche aliquote Theil von AB und NM, und es möge sich e auf AB gerade n mal, auf NM aber m mal abtragen lassen, so ist AB = n.e und NM = m.e, woraus folgt:

1) AB : NM = n : m.

Legt man nun durch jeden Theilpunkt der Seiten AB und NM parallele Linien mit resp. AD und NQ, so wird ABCD in n Rechtecke und NMPQ in m Rechtecke zerlegt, und alle diese Rechtecke sind einander congruent. Bezeichnet man jedes derselben mit E, so ist ABCD = n.E und NMPQ = m.E, woraus folgt:

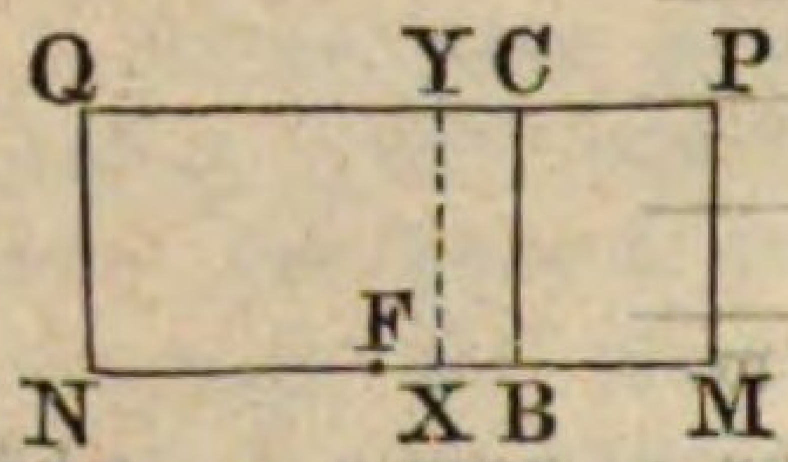


2) ABCD : NMPQ = n : m.

Aus 1) und 2) folgt aber die Richtigkeit der Behauptung.

Beweis, wenn die ungleichen Seiten incommensurabel sind. Man denke sich die Rechtecke mit den gleichen Seiten auf einander gelegt. Es mögen NMPQ und NBCQ die Rechtecke sein, so heißt die Behauptung:

$$\frac{NMPQ}{NBCQ} = \frac{NM}{NB}.$$



Können wir nun beweisen, daß das Verhältniß $\frac{NMPQ}{NBCQ}$ weder größer, noch kleiner sein kann, als $\frac{NM}{NB}$, so ist die Behauptung richtig.

Angenommen nun, es wäre

$$\frac{NMPQ}{NBCQ} > \frac{NM}{NB},$$

so würde man den Quotienten $\frac{NM}{NB}$ um so viel vergrößern können, bis er dem andern Quotienten gleich ist; etwa dadurch, daß man seinen Nenner NB verkleinerte. Da NB stetig verkleinert werden kann, so muß es eine Länge, etwa NF, geben, für welche

$$1)\quad \frac{NMPQ}{NBCQ} = \frac{NM}{NF}$$

ist, und F liegt dann zwischen N und B. Jetzt denke man sich NM halbirt, die Hälften wieder halbirt, und fahre so fort, bis ein Theilpunkt zwischen F und B fällt. Es muß dies möglich sein, weil das wiederholte Halbiren ohne Aufhören geschehen, also so lange fortgesetzt werden kann, bis ein aliquoter Theil von NM kleiner als FB ist. X mag der Theilpunkt sein; man ziehe XY ∦ NQ, so verhält sich, weil NX und NM commensurabel sind:

$$2)\quad \frac{NXYQ}{NMPQ} = \frac{NX}{NM}.$$

Setzt man aber die Proportionen 1) und 2) zusammen (Arithm. §. 142., III.), so folgt:

$$\frac{NXYQ}{NBCQ} = \frac{NX}{NF}.$$

Diese Gleichung zeigt aber den Widerspruch: ein steigendes Verhältniß ist einem fallenden gleich, und weil dies nicht möglich ist, so kann die Annahme

$$\frac{NMPQ}{NBCQ} > \frac{NM}{NB}$$

nicht richtig sein.

Ganz ebenso beweist man, daß die Annahme $\frac{NMPQ}{NBCQ} < \frac{NM}{NB}$ auf denselben Widerspruch führt, also auch unrichtig ist. Man vergrößert in diesem Falle den Nenner NB, bis beide Verhältnisse gleich sind. F fällt dann rechts von B und ebenso XY; X aber fällt wieder zwischen F und B. Im Uebrigen sind alle Schlüsse genau wie vorher. Da man dann bewiesen hat, daß keiner

der Quotienten $\frac{NMPQ}{NBCQ}$ und $\frac{NM}{NB}$ größer als der andere sein kann, so müssen sie einander gleich sein, wodurch der Lehrsatz auch für incommensurabele Linien bewiesen ist.

§. 49.

Es kommen auch weiterhin in der Geometrie noch Sätze vor, bei deren Beweisen man die beiden Fälle »commensurabele« und »incommensurabele Raumgrößen« berücksichtigen muß. Im Falle der Incommensurabilität sind die Beweise im Wesentlichen dem vorstehenden gleich; es sei dem Leser überlassen, sie durch Analogie zu finden. Wir werden in der Folge in diesen Fällen eine andere Beweisart anwenden, welche zwar weniger elementar, aber gleichfalls streng ist und sich durch Kürze und leichte Anwendbarkeit empfiehlt. Die Grundlage bildet der Lehrsatz im nächsten §.

§. 50.

Lehrsatz.

Sind A und B zwei endliche, bestimmte, also unveränderliche Größen oder Zahlen (Verhältnisse), α und β aber zwei veränderliche sehr kleine Größen oder Zahlen, die man beliebig kleiner machen, also auch der Null beliebig nahe bringen kann, und ist

$$A \pm \alpha = B \pm \beta,$$

so muß auch $A = B$ sein.

Bew. Aus der Voraussetzung folgt:

$$A - B = \pm(\beta - \alpha).$$

Wollte man nun annehmen, A wäre nicht gleich B, so müßte $A - B$ eine bestimmte endliche Größe oder Zahl $\pm C$ sein. Die Gleichung

$$\pm C = \pm(\alpha - \beta)$$

zeigt aber dann den Widerspruch, daß die rechte Seite dadurch, daß man α und β immer kleiner und kleiner macht, der Null beliebig nahe gebracht werden kann, während die linke Seite eine bestimmte endliche Größe oder Zahl bleibt. Daher können A und B nicht ungleich sein; folglich muß $A = B$ sein.

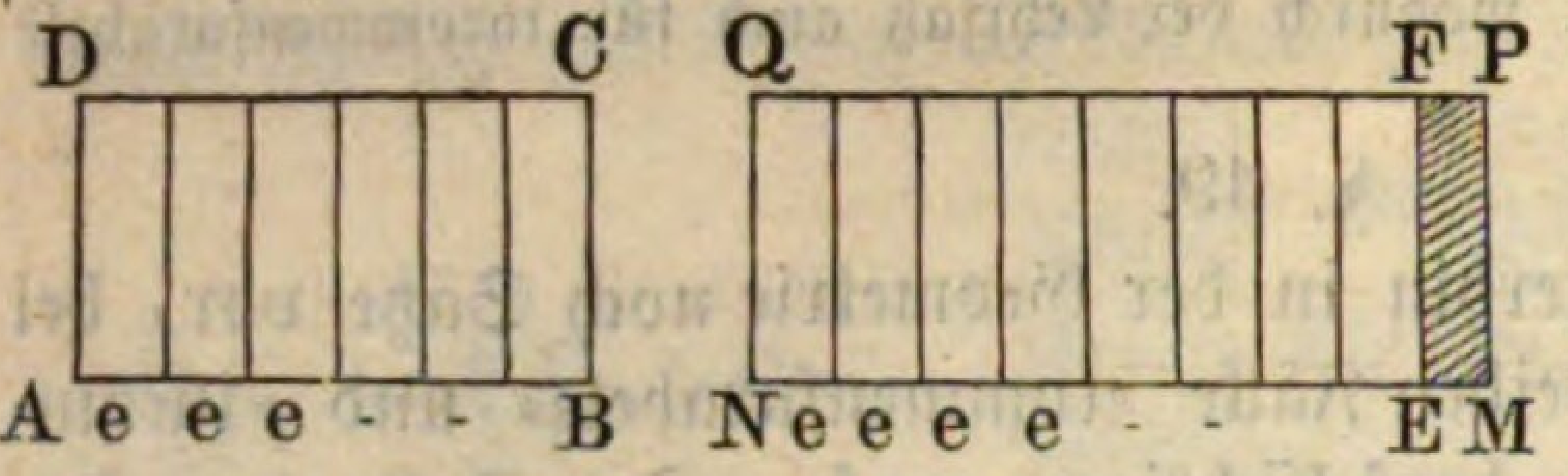
§. 51.

Durch Anwendung des vorstehenden Gesetzes soll jetzt der Beweis des Lehrsatzes in §. 48. geführt werden.

In den Rechtecken NMPQ und ABCD sind die Seiten NQ und AD gleich; man soll, wenn NM und AB incommensurabel sind, die Richtigkeit der Proportion beweisen:

$$\frac{NMPQ}{ABCD} = \frac{NM}{AB}.$$

Bew. Man denke sich AB in n gleiche Theile getheilt, jeder sei = e, und trage nun e so oft wie möglich auf NM ab. Da AB und NM incommensurabel sind, so muß ein Rest EM bleiben, den wir mit x bezeichnen wollen. Die Linien AB und NE sind commensurabel, und zieht man EF ╪ MP, so verhalten sich (§. 48.) die Rechtecke NEFQ und ABCD zu einander, wie NE : AB. Nun ist NE = NM — x, und bezeichnet man das Rechteck EMPF mit y, so ist NEFQ = NMPQ — y; folglich findet die Proportion Statt:



$$\frac{NMPQ - y}{ABCD} = \frac{NM - x}{AB}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{NMPQ}{ABCD} - \frac{y}{ABCD} = \frac{NM}{AB} - \frac{x}{AB}.$$

Nun können aber die Quotienten $\frac{y}{ABCD}$ und $\frac{x}{AB}$ der Null so nahe gebracht werden, als man will; denn x ist kleiner als e, und e ist der nte Theil von AB. Denkt man sich also AB in immer mehr und mehr gleiche Theile getheilt, nimmt man also n immer größer und größer, so wird e immer kleiner und kleiner, muß also einmal kleiner werden, als x anfänglich ist. Dann rückt aber der Punkt E näher an M und x selbst wird kleiner. Da man fortfahren kann, e immer kleiner werden zu lassen, so kann man auch x noch kleiner machen und der Null beliebig nahe bringen; dann wird aber auch y, d. h. das Rechteck über x immer kleiner und nähert sich der Null. Man erkennt hieraus, daß in der vorstehenden Gleichung die Subtrahenden der Null beliebig nahe gebracht werden können (ihre Nenner sind unveränderlich), während die Minuenden bestimmte unveränderliche Zahlen sind. Diese Minuenden müssen daher nach §. 50. einander gleich sein, d. h. es ist $\frac{NMPQ}{ABCD} = \frac{NM}{AB}$, was zu beweisen war.

§. 52.

Lehrsätze.

1) Parallelogramme und Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen.

2) Parallelogramme und Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich zu einander, wie ihre Grundlinien.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 46. und 48.

§. 53.

Lehrsatz.

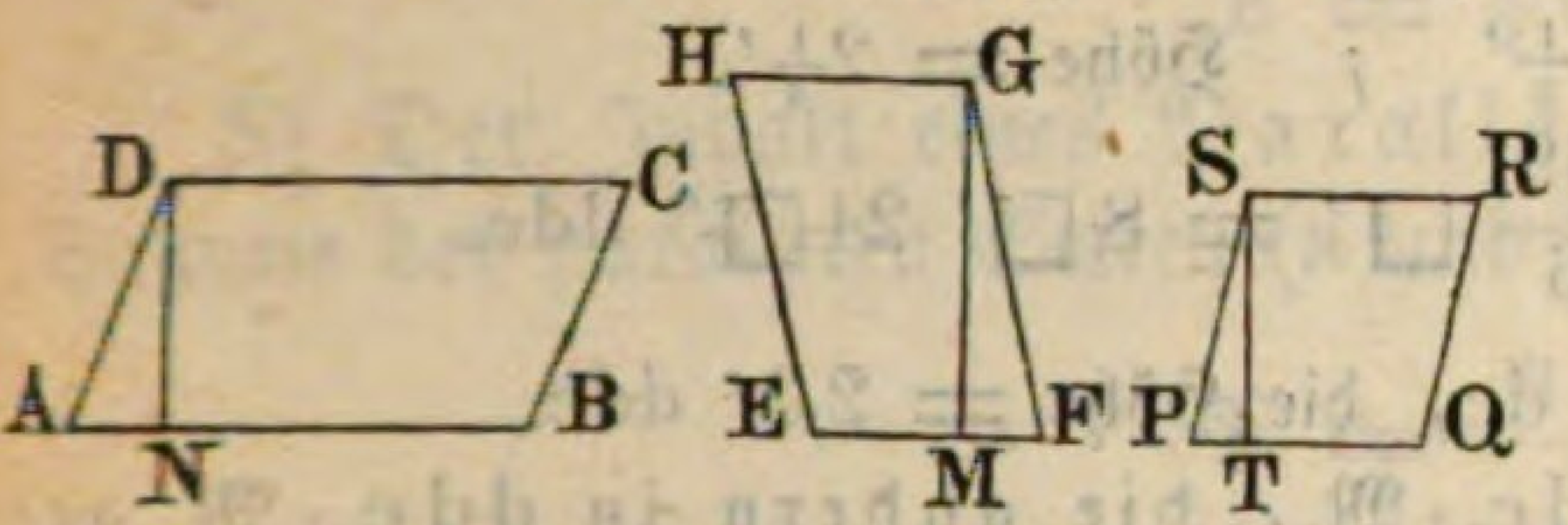
Parallelogramme und Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Bew. Man denke sich die Grundlinien und Höhen der Parallelogramme ABCD und EFGH durch dieselbe Einheit e gemessen. Es sei

die Grundlinie AB = a.e, die Höhe DN = h.e,

die Grundlinie EF = b.e, die Höhe GM = k.e.

Da man die Parallelogramme nicht unmittelbar mit einander vergleichen kann, so denke man sich ein drittes ⧣PQRS construirt, dessen Grundlinie PQ = EF = b.e, und dessen Höhe ST = DN = h.e ist; dann verhält sich:



1) ⧣ABCD : ⧣PQRS = a : b, weil sie gleiche Höhen haben,

2) ⧣PQRS : ⧣EFGH = h : k, weil sie gleiche Grundlinien haben.

Setzt man diese Proportionen zusammen, so folgt (vgl. Arithm. §. 142., III.):

⧣ABCD : ⧣EFGH = ah : bk.

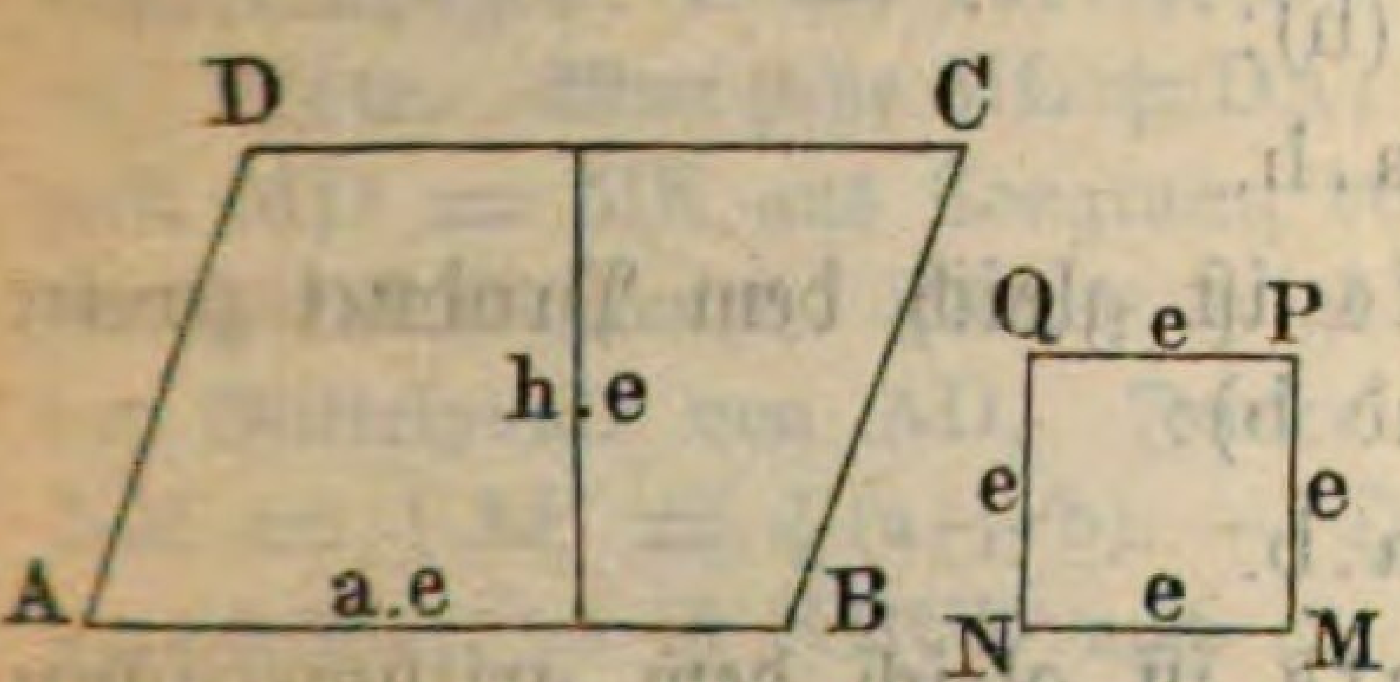
Für Dreiecke ist der Beweis eben so, oder durch §. 44. 2) zu führen.

Aus dem Beweise erhellt, daß der Ausdruck »Product aus Grundlinie und Höhe« so zu verstehen ist: man soll die unbenannten Zahlen multipliciren, welche man erhält, wenn man Grundlinie und Höhe durch dieselbe Einheit mißt. In diesem Sinne ist der Ausdruck »Product zweier Linien« fortan immer zu verstehen.

§. 54.

Der Inhalt des Parallelogramms.

Um den Inhalt eines ⧣ABCD zu bestimmen, construire man über die Längeneinheit NM = e (1° oder 1' oder 1" u. s. w.) das Quadrat NMPQ (1□°, 1□', 1□" u. s. w.) und messe Grundlinie und Höhe des ⧣ABCD durch die Einheit e. Es sei die Grundlinie AB = a.e, die zugehörige Höhe = h.e, und das Quadrat NMPQ werde durch E bezeichnet; dann folgt aus §. 53.:



⧣ABCD : E = a.h : 1.1, folglich ist

⧣ABCD = ah × E.

Hieraus ergiebt sich die Regel: um den Inhalt eines Parallelogrammes zu berechnen, messe man Grundlinie und Höhe durch dieselbe Einheit, multiplicire die unbenannten Zahlen, welche man erhält, mit

einander und gebe dem Product das Quadrat über der gewählten Längeneinheit zur Benennung. In diesem Sinne ist die Regel aufzufassen, wenn man sie kürzer so ausspricht: **der Inhalt eines Parallelogrammes ist gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe.**

Beispiele. 1) Die Grundlinie sei 12′, die Höhe 9′, so ist der Inhalt = 9 × 12 □′ = 108 □′.

2) Die Grundlinie sei = 3′ 6″, die Höhe = 2′ 4″ ddc.

Man muß zunächst beide Linien auf eine Benennung bringen:

$$\text{Grundlinie} = 3\tfrac{1}{2}' \quad ; \quad \text{Höhe} = 2\tfrac{1}{3}'.$$

$$\text{Inhalt} = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{3}\,\square' = \frac{49}{6}\,\square' = 8\,\square'\;24\,\square''\ \text{ddc.}$$

3) Die Grundlinie sei = $3\frac{1}{4}'$ dc, die Höhe = 2,3′ ddc.

Aufl. Ist eine Linie in dc.-M., die andern in ddc.-M. gegeben, so rechnet man am bequemsten in Ruthen, resp. Quadratruthen. Hier ist also der Inhalt

$$= \frac{13}{40}\cdot\frac{2{,}3}{12}\,\square^\circ = \frac{299}{4800}\,\square^\circ$$

$$= \frac{299}{4800}\cdot 144\,\square'\ \text{ddc.} = 8{,}97\,\square'$$

$$= 8\,\square'\;139\,\square''\;98\,\square'''\ \text{ddc.}$$

4) Die Grundlinie sei = 1° 2′ 5″, die Höhe = 8″ dc., so ist der Inhalt = 10 □′ dc.

§. 55.

Inhalte geradliniger Figuren.

Aus der Formel für den Inhalt des Parallelogramms ergeben sich die besondern Formeln für das Quadrat und Rechteck; aus §. 44., 2. folgt dann auch der Inhalt des Dreiecks. In den folgenden Formeln soll F immer den Inhalt der betreffenden Figur bedeuten.

1) Der Inhalt eines **Parallelogramms** ist gleich dem Product aus Grundlinie (a) und Höhe (h):

$$F = a.h.$$

2) Der Inhalt eines **Rechtecks** ist gleich dem Product zweier an einander stoßenden Seiten (a und b):

$$F = a.b.$$

3) Der Inhalt eines **Quadrats** ist gleich dem arithmetischen Quadrat der Seite (a):

$$F = a^2.$$

4) Der Inhalt eines **Dreiecks** ist gleich dem halben Product aus der Grundlinie (a) und Höhe (h):

$$F = \tfrac{1}{2}a.h.$$

5) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Product der Katheten (a und b):

$$F = \frac{1}{2}a.b.$$

6) Der Inhalt eines Quadrats ist auch gleich dem halben arithmetischen Quadrat der Diagonale (d):

$$F = \frac{1}{2}d^2.$$

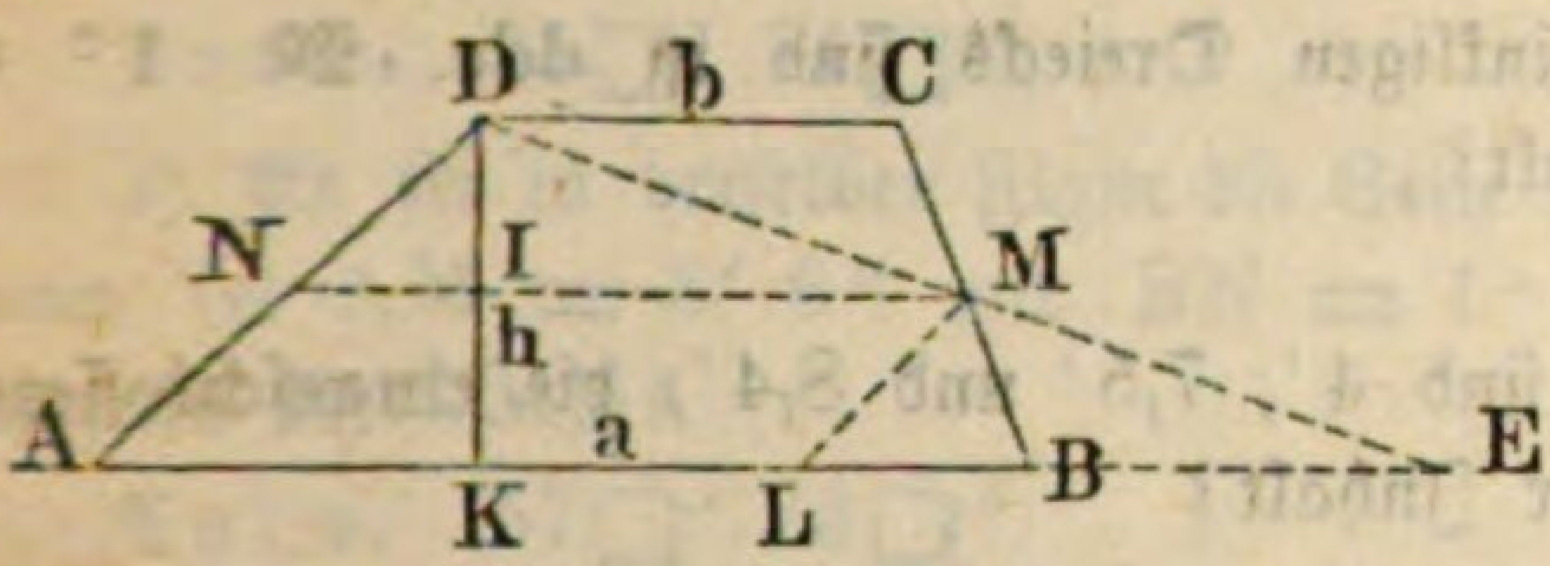
7) Der Inhalt eines Rhombus ist gleich dem halben Product beider Diagonalen (d und e):

$$F = \frac{1}{2}d.e.$$

8) Der Inhalt eines Paralleltrapezes ist gleich der halben Summe der parallelen Seiten (a und b) multiplicirt mit der Höhe (h):

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Bew. Halbirt man die eine (BC) der nicht parallelen Seiten in M, zieht DM und verlängert sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte E mit der verlängerten AB, so ist $\Delta MCD \cong \Delta MBE$ (§. 25., III.); folglich ist BE = CD = b, und das Paralleltrapez ABCD ist gleich dem



$$\Delta ADE = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

§. 56.

Zusatz.

1) Zieht man durch den Mittelpunkt M der Seite BC eine Parallele MN mit den parallelen Seiten, so halbirt diese Linie sowohl die Seite AD (in N), als auch die Höhe DK (in I) und ist gleich $\frac{a+b}{2}$, giebt also, mit der Höhe h multiplicirt, den Inhalt des Paralleltrapezes: $F = MN \times h$.

Bew. Man ziehe ML ‡ DA, so ist $\Delta DNM \cong \Delta MLE$ (aus §. 25., III., weil MD = ME aus Congruenz der $\Delta\Delta MCD$ und MBE), und NMLA ist ein Parallelogramm. Hieraus folgt aber: DN = ML = NA, d. h. N ist der Mittelpunkt von AD. Ferner folgt: NM = LE = AL; folglich ist $NM = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(a+b)$. — Daß MN die Höhe DK halbirt, folgt jetzt unmittelbar: es ist KBCD auch ein Paralleltrapez. Denkt man sich die Höhe an einer andern Stelle (z. B. durch C gelegt), so wird sie doch durch NM halbirt, wie man aus den Rechtecken, die dann entstehen, sofort erkennt.

Weil nun aber durch den Mittelpunkt der Höhe nur eine Parallele mit den parallelen Seiten möglich ist, so ergiebt sich hieraus noch folgender Satz:

2) Zieht man durch den Mittelpunkt der Höhe eines Paralleltrapezes eine mit den parallelen Seiten (a und b) parallele Linie,

welche in den nicht parallelen Seiten endet, so ist sie das arithmetische Mittel der parallelen Seiten (also $\frac{a+b}{2}$) und giebt mit der Höhe multiplicirt den Inhalt des Paralleltrapezes.

Zur Uebung.

1) Die Seite eines Quadrats sei 3′ 4″ ddc., wie groß ist der Inhalt?

Antw. 11□′ 16□″.

2) Die Diagonale eines Quadrats sei 50ˣ lang, wie groß ist der Inhalt des Quadrats?

Antw. 50□°.

3) Die Diagonalen eines Rhombus sind in dc.-M. 3,45′ und 9,7′; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 16□′ 73□″ 25□‴ dc.

4) Eine Seite eines Dreiecks sei 3,2′; die zugehörige Höhe 3,2″ dc.; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 51□″ 20□‴ dc.

5) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind in ddc.-M. 1° 4′ und 5′ 5″; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 43$\frac{1}{3}$ □′.

6) Drei Seiten eines Vierecks sind 4′; 7,5′ und 8,4′; die eingeschlossenen Winkel sind rechte; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 46$\frac{1}{2}$ □′.

7) Jemand hat den Berliner Gensd'armenmarkt (ein Rechteck) abgeschritten und ihn 417ˣ lang und 197ˣ breit gefunden. Wie groß ist hiernach sein Flächenraum zu schätzen?

Antw. 3285$\frac{24}{25}$ □° oder 18$\frac{1}{4}$ Morgen.

8) Wenn man aber den Raum in Abzug bringt, welchen die vier begrenzenden Straßen einnehmen, von denen durchschnittlich jede 22$\frac{1}{2}$ˣ breit ist, wie groß ist dann der Markt?

Antw. Man hat zwei Rechtecke von 417ˣ Länge und 22$\frac{1}{2}$ˣ Breite und zwei Rechtecke von 152ˣ Länge und 22$\frac{1}{2}$ˣ Breite abzuziehen, oder auch ein Rechteck von 569ˣ Länge und 45ˣ Breite. Man erhält den Inhalt = 2261$\frac{19}{25}$□° oder ziemlich genau 12$\frac{9}{16}$ Morgen.

9) Zwei Seiten eines Rechtecks sind gegeben: 3,4′ ddc. und 3$\frac{1}{3}$′ dc.; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 13□′ 86□″ 57,6□‴ ddc. oder 9□′ 44□″ 44□‴ dc.

10) Die parallelen Seiten eines Paralleltrapezes sind in dc.-M. 3° 6′ 9″ und 8° 6″; die Höhe ist 7° 7′ 6″; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 45□° 59□′ dc.

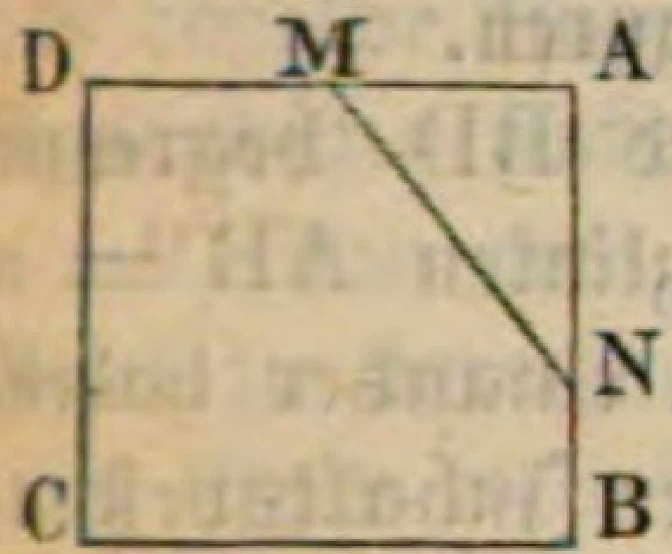
§. 57.

Beliebige Vierecke, Fünfecke, Sechsecke u. s. w., überhaupt Polygone berechnet man, indem man sie durch Diagonale oder andere

zweckmäßig gezogene Linien in Dreiecke, Parallelogramme oder Paralleltrapeze zerlegt.

Beispiele:

1) Es sei ABCD ein Quadrat, AM $= \frac{1}{2}$AD und AN $= \frac{2}{3}$AB; ferner sei AB $= 3^\circ\ 4'\ 6''$ ddc.; wie groß ist der Inhalt des Fünfecks BCDMN?



Aufl. 1. Man zieht △ AMN vom Quadrate ABCD ab und erhält den Inhalt $= (486^2 - \frac{1}{2}.243.324)\square'' = 486(486-81)\square'' = 486.405\square' = 9\square^\circ\ 70\square'\ 126\square''$.

Aufl. 2. Zieht man MB, so ist △ AMN $= \frac{2}{3}$. △ AMB (§. 52., 2.). Eben so leicht findet man, daß △AMB der 4te Theil des Quadrats ist, woraus folgt, daß △AMN der 6te Theil des Quadrats ist, also das gesuchte Fünfeck $= \frac{5}{6} \times 486^2 \square''$, u. s. w.

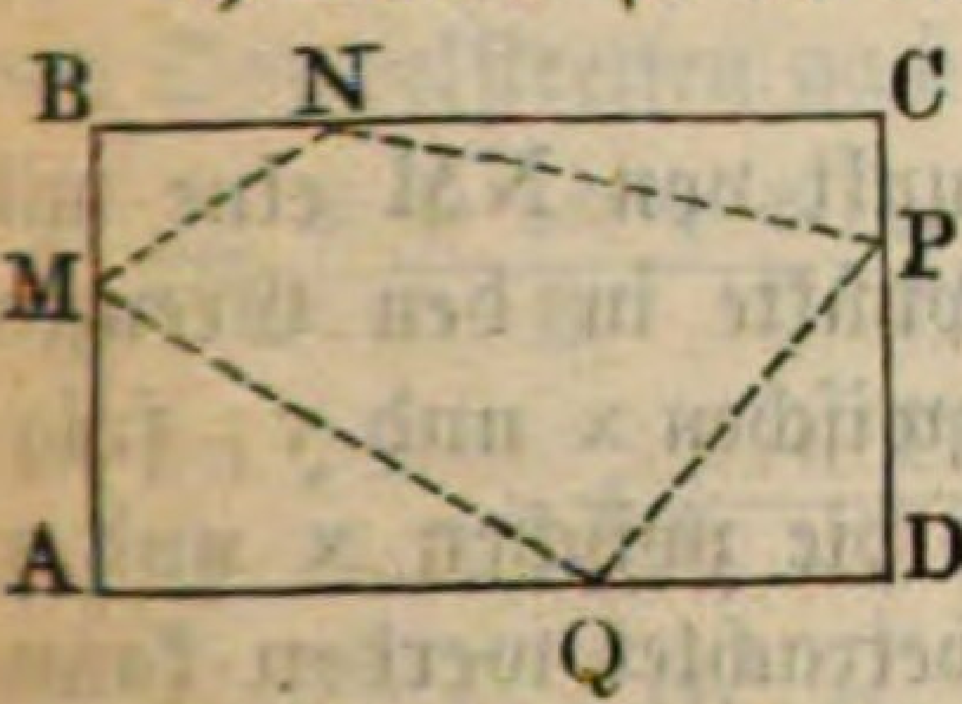
2) Wenn M und N die Mittelpunkte von resp. AD und AB sind (vorige Figur), die Seite des Quadrats aber $= 6'\ 4''$ ddc., wie groß ist dann der Inhalt des Fünfecks BCDMN?

Antw. $35\square'\ 14\square''$.

3) Es sei in derselben Figur die Seite des Quadrats in ddc.-M. $= 8'\ 4''$; ferner sei AM $= 3'\ 6''$ und BN $= 1'\ 6''$; wie groß ist der Inhalt des Fünfecks BCDMN?

Antw. $57\square'\ 70\square''$.

4) ABCD sei ein Rechteck; AB $= 12'$ und BC $= 20'$.



Ferner sei BM $= \frac{1}{3}$BA, BN $= \frac{1}{4}$BC, CP $= \frac{1}{4}$CD und DQ $= \frac{2}{5}$DA; wie groß ist der Inhalt des Vierecks MNPQ?

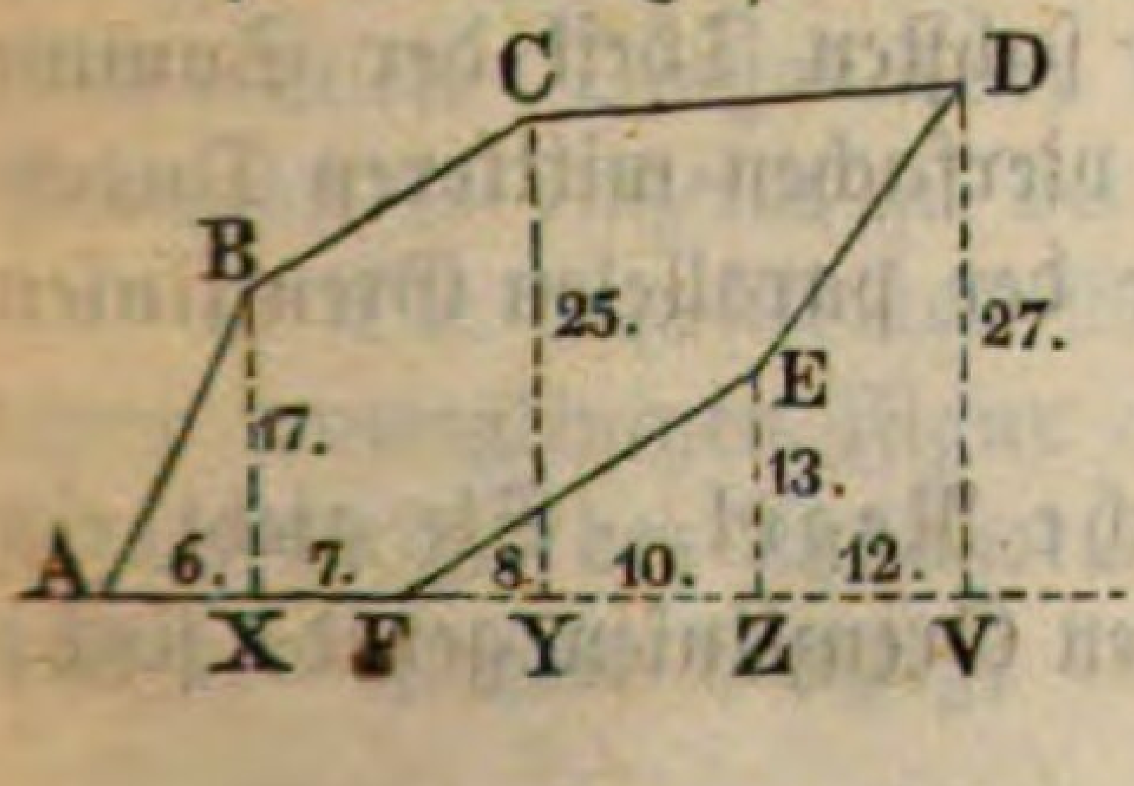
Antw. $123\frac{1}{2}\square'$.

5) Der Inhalt eines Vierecks, dessen Diagonalen a und b sich senkrecht schneiden, ist $= \frac{1}{2}$ab.

6) In einem Viereck ABCD sei die Diagonale AC $=$ a; von dieser Diagonale habe B den Abstand b, und D den Abstand c; wie groß ist der Inhalt des Vierecks?

Antw. $\frac{b+c}{2} \cdot a$, oder $\frac{b-c}{2} \cdot a$ (wenn $b > c$), je nachdem B und D auf verschiedenen Seiten von AC liegen, oder auf derselben Seite.

7) Um den Inhalt des Sechsecks ABCDEF zu berechnen, hat man BX, CY, DV und EZ senkrecht auf die Richtung AF gefällt und folgende Längen gemessen: AX$=6'$, XF$=7'$, FY$=8'$, YZ$=10'$, ZV$=12'$, BX $= 17'$, CY $= 25'$, DV $= 27'$ und EZ $= 13'$; wie groß ist der Inhalt des Sechsecks?

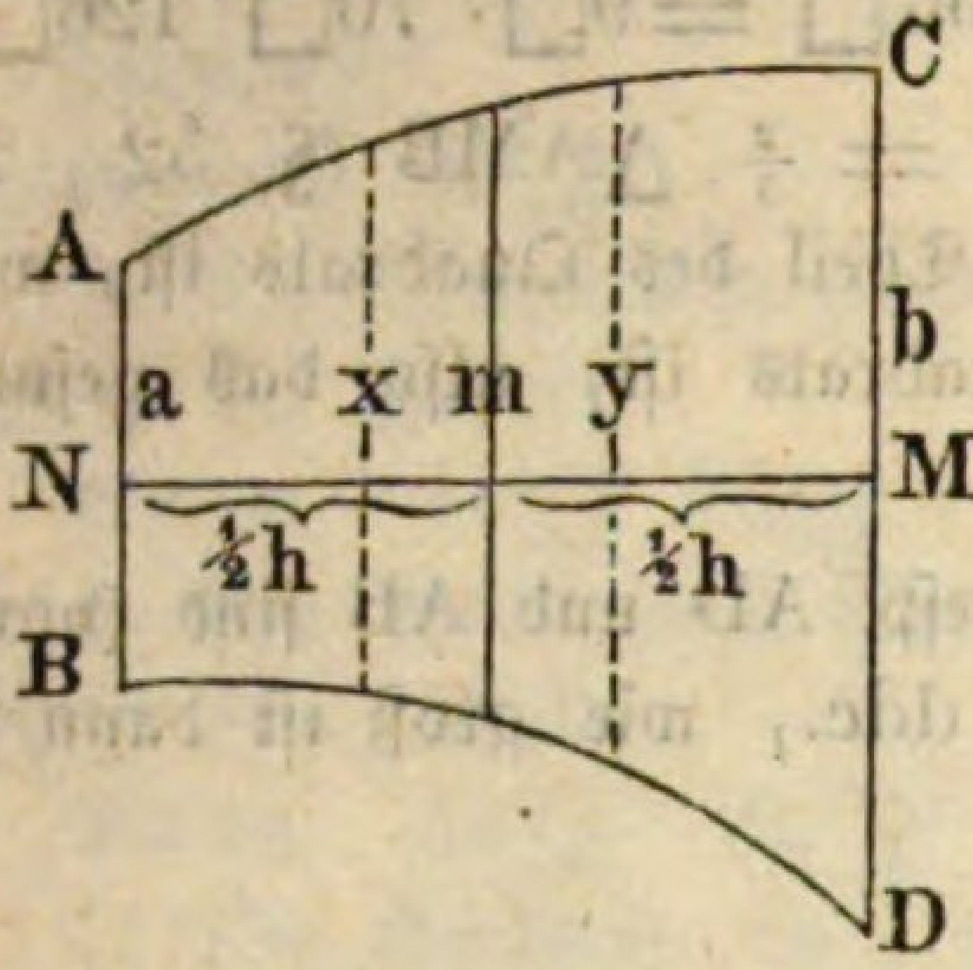


Aufl. Man berechne $\triangle ABX$ und die Paralleltrapeze BCYX und CDVY, und ziehe von der Summe dieser drei Flächen das $\triangle FEZ$ und das Paralleltrapez EDVZ ab. Man erhält 581 □′.

§. 58.

Annähernde Berechnung krummliniger Figuren.

1) Liegt die von den krummen Linien AC und BD begrenzte Ebene ABDC zwischen den parallelen geraden Grenzlinien AB = a und CD = b, welche den Abstand NM = h von einander haben,



so theile man Behufs der Inhaltsbestimmung der Ebene ABDC den Abstand h in 3 gleiche Theile und lege durch die Theilpunkte die mit a und b parallelen Durchschnittslinien x und y, welche auf beiden Seiten bis zur Grenze der Figur reichen. Weichen dann die krummen Grenzen zwischen a und x, x und y, y und b nicht sehr von geraden Linien ab, so kann man den Inhalt F der Ebene ABDC als Summe dreier Paralleltrapeze berechnen und erhält:

$$F = \frac{a+x}{2}\cdot\frac{h}{3} + \frac{x+y}{2}\cdot\frac{h}{3} + \frac{y+b}{2}\cdot\frac{h}{3}; \text{ oder}$$

$$F = \frac{h}{6}[a+2(x+y)+b].$$

Zieht man nun noch durch den Mittelpunkt von NM eine mit a und b parallele Linie m, welche ihre Endpunkte in den Grenzen der Figur hat, so liegt m auch in der Mitte zwischen x und y; folglich ist bei der oben gemachten Annahme, daß die zwischen x und y liegende Ebene annähernd als Paralleltrapez betrachtet werden kann, nach §. 56. Nr. 2.

$$m = \frac{x+y}{2}, \text{ also } 4m = 2(x+y).$$

Setzt man aber 4m statt 2(x + y) in die Gleichung oben ein, so entsteht:

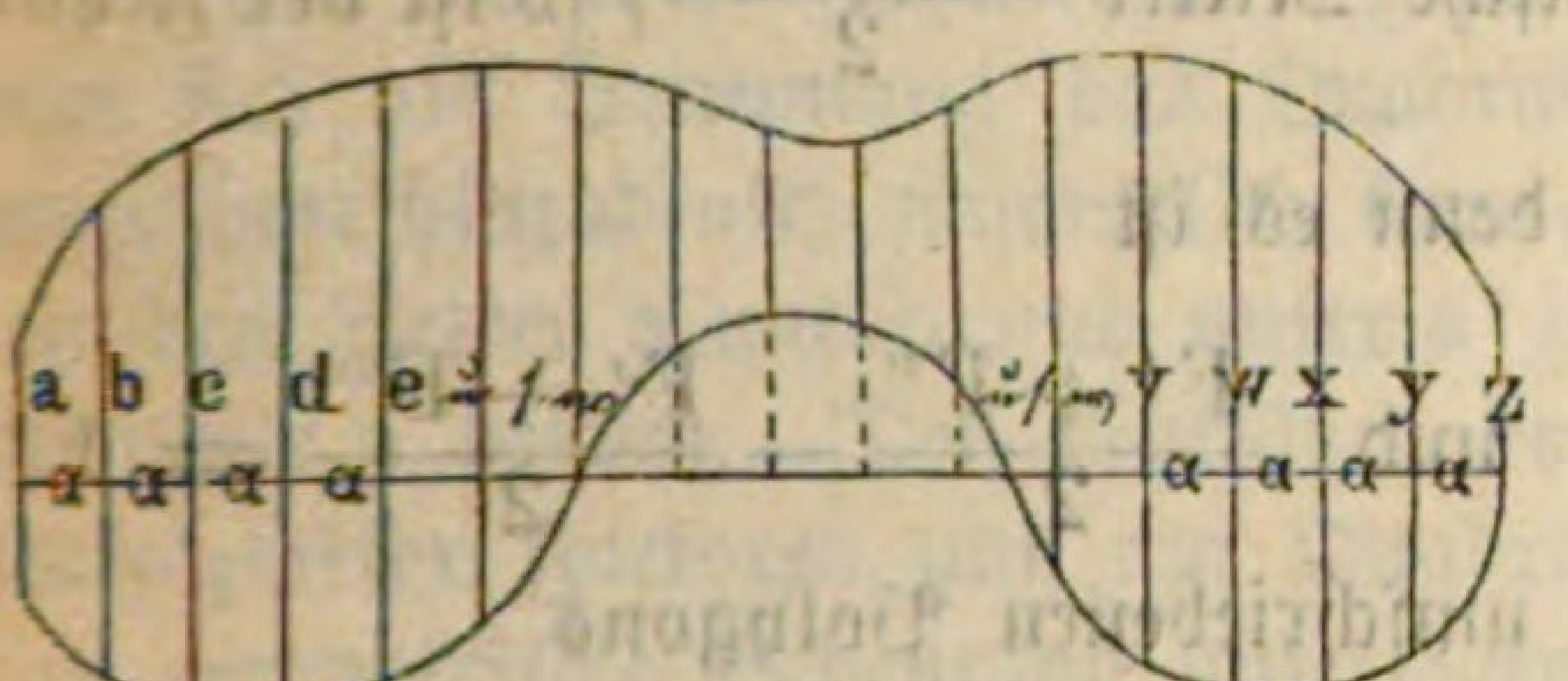
$$F = \frac{a+4m+b}{6}\cdot h;$$

d. h. der Inhalt der Ebene ist gleich dem sechsten Theil der Summe der beiden parallelen Grenzlinien und der vierfachen mittleren Durchschnittslinie multiplicirt mit dem Abstande der parallelen Grenzlinien von einander.

Diese Formel heißt die Simpsonsche Regel. Sie giebt ein genaues Resultat, wenn die nicht parallelen Grenzlinien gerade sind;

sonst aber ein um so genaueres, je weniger diese Grenzlinien von geraden Linien abweichen. — Eine besondere Wichtigkeit erhält diese Regel erst später, wo gezeigt werden wird, daß sie bei vielen von Kurven begrenzten Ebenen ein völlig genaues Resultat giebt, und daß dieselbe Regel bei der Berechnung der Körper eine sehr umfassende Anwendung findet.

2) Um eine größere krummlinige Figur mittelst der Simpsonschen Regel zu berechnen, schneide man die Figur, am besten in der Richtung ihrer weitesten Ausdehnung, durch eine gerade Linie, zerlege den Theil derselben, welcher zwischen den äußersten Grenzen liegt, in eine gerade Anzahl gleicher Theile und lege durch jeden Theilpunkt eine diese Linie senkrecht schneidende Durchschnittslinie, welche ihre Endpunkte in den Grenzen der Figur hat. Auch durch die Endpunkte der Geraden lege man solche Linien, die dann entweder selbst ein Theil der Grenze sind, oder den Werth Null haben. Jeder Theil der Geraden sei $= \alpha$, und die Durchschnittslinien (resp. parallelen Grenzlinien)



mögen, wie die Figur zeigt, die Längen a, b, c, d, ... v, w, x, y, z haben: so kann man den Inhalt F der Figur als eine Summe von Doppelstreifen nach der Simpsonschen Regel berechnen und erhält:

$$F = \frac{a + 4b + c}{6} \cdot 2\alpha + \frac{c + 4d + e}{6} \cdot 2\alpha + \frac{e + 4f + g}{6} \cdot 2\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{v + 4w + x}{6} \cdot 2\alpha + \frac{x + 4y + z}{6} \cdot 2\alpha; \text{ oder}$$

$$F = \frac{\alpha}{3}\,[a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + \ldots + 2v + 4w + 2x + 4y + z].$$

Man erhält den Inhalt der Figur um so genauer, je kleiner α ist, d. h. je näher die parallelen Durchschnittslinien a, b, c, d, ... an einander liegen.

3) Man kann aber auch eine solche Figur wie ein Polygon berechnen, indem man die einzelnen Theile des Umfanges, so weit sie wenig von geraden Linien abweichen, als gerade ansieht. Durch Hülfslinien (Diagonalen, Parallelen u. s. w.) kann man dann das Polygon in einzelne zu berechnende Theile zerlegen.

4) Die angeführten Methoden geben nun allerdings den Inhalt einer krummlinigen Figur annähernd, haben aber den Mangel, daß sie die Größe der Annäherung ungewiß lassen. Die folgende Methode hat den großen Vorzug, daß sie nicht nur angiebt, wie weit der be-

rechnete Inhalt von dem wahren unbekannten Werthe höchstens abweichen kann, sondern auch, daß sie gestattet, diese Abweichung (den Fehler, Rest) nach Belieben zu verringern.

Es bezeichne F den wahren Inhalt der Figur, so lege man um dieselbe ein Polygon, dessen Umfang sich recht nahe an den der Figur anschließt, ohne ihn zu durchschneiden, und berechne den Inhalt F′ dieses Polygons, welcher natürlich größer als F sein muß. Ein zweites Polygon derselben Art lege man in die Figur und berechne auch seinen Inhalt F″, der dann kleiner als F sein muß. In F′ und F″ hat man nun zwei Grenzwerthe, zwischen welchen F liegen muß. Nimmt man also einen dieser Grenzwerthe statt F, so ist der Fehler offenbar kleiner als F′ — F″; nimmt man aber für F das arithmetische Mittel $\frac{F' + F''}{2}$, so ist der Fehler sogar kleiner als $\frac{F' - F''}{2}$; denn es ist

$$\frac{F' + F''}{2} + \frac{F' - F''}{2} = F' \quad \text{und} \quad \frac{F' + F''}{2} - \frac{F' - F''}{2} = F''.$$

Ist z. B. der Inhalt des umschriebenen Polygons
$= 324{,}3\,\square'$ und der des eingeschriebenen
$= 323{,}7\,\square'$, und man setzt $F = \frac{324{,}3 + 323{,}7}{2}$
$= 324\,\square'$, so ist der Fehler kleiner als $0{,}3\,\square'$.

Das Mittel aber, den Fehler beliebig zu verringern, hat man in Händen; man braucht nur statt F′ und F″ Polygone zu zeichnen und zu berechnen, deren Umfänge sich immer näher und näher an den Umfang von F anschließen, um den Fehler der Null beliebig nahe zu bringen. — Gewöhnlich sucht man den Inhalt als Decimalbruch mit einer Genauigkeit von einer bestimmten Anzahl Decimalstellen, z. B. man sucht F auf fünf Decimalstellen genau; dann rückt man die Grenzen, zwischen welchen F liegen muß, so nahe an einander, bis F′ und F″ in den Ganzen und ersten fünf Decimalstellen übereinstimmen; F stimmt dann natürlich so weit mit ihnen überein. Hat man z. B. gefunden:

$$F' = 3{,}1415933\,\square' \text{ und}$$
$$F'' = 3{,}1415914\,\square',$$

so ist auf fünf Decimalstellen genau:

$$F = 3{,}14159\,\square'.$$

Anmerk. Auf ähnliche Weise ist der Umfang einer krummlinigen Figur zu finden; doch muß man sich hierbei hüten, den Schluß »der Umfang von F hat die Umfänge von F′ und F″ zu Grenzwerthen« als einen in allen Fällen

richtigen gelten zu lassen. Denn hat der Umfang von F Uebergänge aus concav in convex oder umgekehrt, so ist dieser Schluß nicht mehr nothwendig richtig. Man kann in solchem Falle die Berechnung nach und nach ausführen, indem man die Theile von Wendepunkt zu Wendepunkt mittelst umschlossener und umschließender gebrochener Linien einzeln berechnet und addirt. (Vergl. §. 22. Nr. 5.)

§. 59.

Die Inhaltsbestimmung der Figuren giebt Veranlassung zu einer **Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie.** Bezeichnen die Buchstaben a, b, c u. s. w. Linien in dem Sinne, daß man sich die gemeinschaftliche Einheit zu den Zahlen a, b, c u. s. w. hinzudenken soll, so sind die Producte zweier Factoren und Quadrate ab, ac, a^2, b^2 u. s. w. Inhalte von Flächen, wieder in dem Sinne, daß man sich als Benennung das Quadrat jener gemeinschaftlichen Längeneinheit hinzudenkt; namentlich kann man sich unter ab ein Rechteck mit den Seiten a und b und unter a^2 das geometrische Quadrat über der Linie a denken. Den Lehrsätzen der Arithmetik, die sich auf Producte zweier Factoren und auf Quadrate beziehen, kann man sonach eine geometrische Bedeutung unterlegen. So ist z. B.

$$a(b+c) = ab + ac;$$

folglich muß nothwendig das Rechteck, welches a und b + c zu Seiten hat, der Summe der Rechtecke gleich sein, von denen das eine a und b, das andere a und c zu Seiten hat.

Es ist dies an sich wahr; man kann aber die Richtigkeit dieses Satzes auch geometrisch beweisen, d. h. man kann durch Construction der Rechtecke a(b + c), ab und ac die geometrische Bedeutung und die Richtigkeit obiger Gleichung zeigen.



Namentlich kommen außer $a(b \pm c) = ab \pm ac$ häufig folgende Gleichungen zur Anwendung:

1) $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$

2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

5) $(2a)^2 = 4a^2$ und $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$

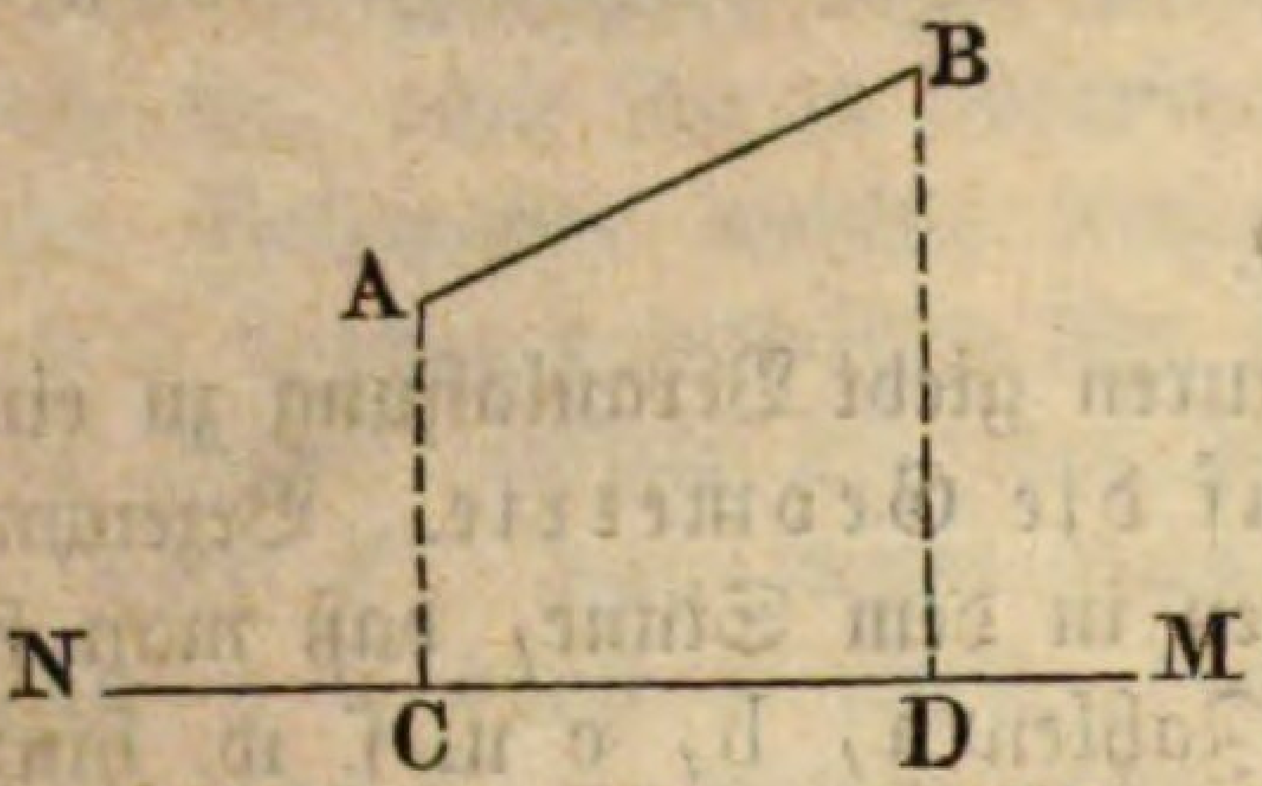
6) $(3a)^2 = 9a^2$ und $\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$, u. s. w.,

deren geometrischer Beweis als eine Uebung zu empfehlen ist.

§. 60.

Erklärung.

Fällt man von jedem Endpunkte A und B einer Linie AB eine Senkrechte auf eine beliebige andere Linie NM in derselben Ebene, so heißt der zwischen diesen Senkrechten liegende Theil der Linie NM die Projection der Linie AB auf die Linie NM. Sind also AC und BD senkrecht auf NM, so ist CD die Projection von AB auf NM. Auch die Punkte C und D nennt man die Projectionen der resp. Punkte A und B auf NM; AC und BD heißen die (diese Punkte) projicirenden Linien.



Ist AB ╪ NM, so folgt CD = AB; steht die Richtung AB auf NM senkrecht, so fallen C und D in einander; die Projektion der AB ist dann ein Punkt, daher als Länge gleich Null. In allen andern Fällen ist CD kleiner als AB. Die Endpunkte der AB können hierbei auch auf verschiedenen Seiten der NM liegen.

Liegt ein Endpunkt der AB, z. B. A, in NM, so ist die A projicirende Linie gleich Null oder A ist seine eigene Projection. Dieser Fall findet Statt, wenn man einen Schenkel eines Winkels begrenzt und ihn dann auf den andern Schenkel projicirt. Aus §. 13. Nr. 6. folgt: ist der Winkel spitz, so ist die Projection des begrenzten Schenkels auf den andern ein Theil dieses andern Schenkels; ist er aber stumpf, so ist die Projection ein Theil der Verlängerung des andern Schenkels über den Scheitelpunkt hinaus.

§. 61.

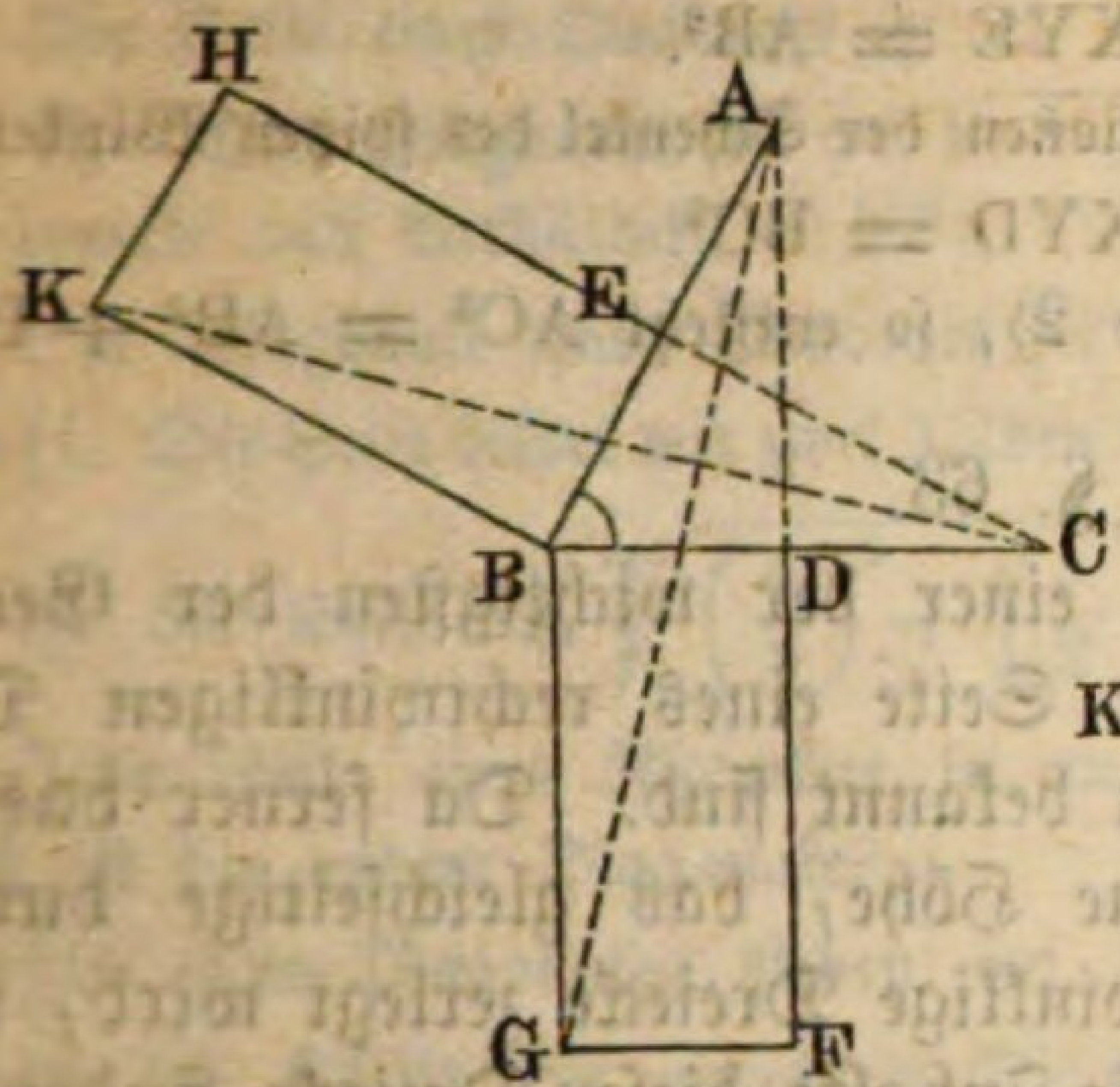
Lehrsatz.

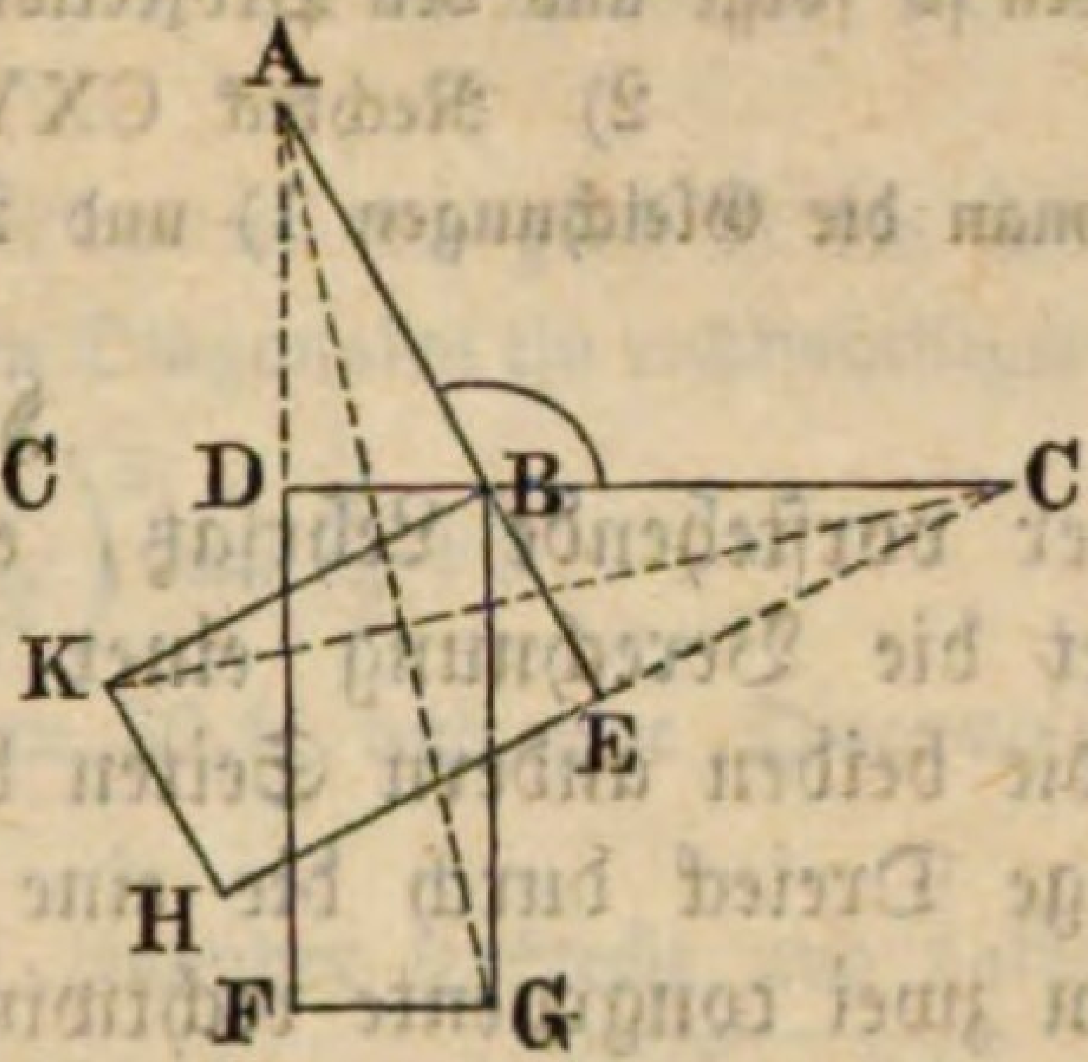
Begrenzt man die Schenkel eines spitzen oder stumpfen Winkels ABC beliebig und bildet die Projection jedes Schenkels auf den anderen, so sind die beiden Rechtecke gleich, welche je einen dieser Schenkel und die Projection des anderen auf ihn zu Seiten haben.

Voraussf. $AD \perp BC$ und $CE \perp BA$.

Behaupt. $BC \times BD = BA \times BE$.

Bew. Um die Rechtecke zu construiren, deren Gleichheit bewiesen werden soll, verlängere man AD über D und mache die Verlängerung DF = BC.





Zieht man nun $BG \# DF$ und $FG \# DB$, so hat das Rechteck BDFG die Seiten BC und BD. Verlängert man ferner CE über E und macht die Verlängerung $EH = BA$, zieht $BK \# EH$ und $HK \# EB$: so hat das Rechteck BEHK die Seiten BA und BE. Die Behauptung kann daher jetzt ausgedrückt werden:

$$\text{Rechteck } BDFG = \text{Rechteck } BEHK.$$

Als Hülfsconstruction ziehe man AG und CK, so ist (§. 25. I.)

$$\triangle BGA \cong \triangle BCK.$$

Nun ist aber $\triangle BGA$ die Hälfte des Rechtecks BGFD und $\triangle BCK$ die Hälfte des Rechtecks BEHK (§. 44. Nr. 2.), und sind die Hälften congruent, so müssen die Ganzen gleich sein, wodurch der Satz bewiesen ist.

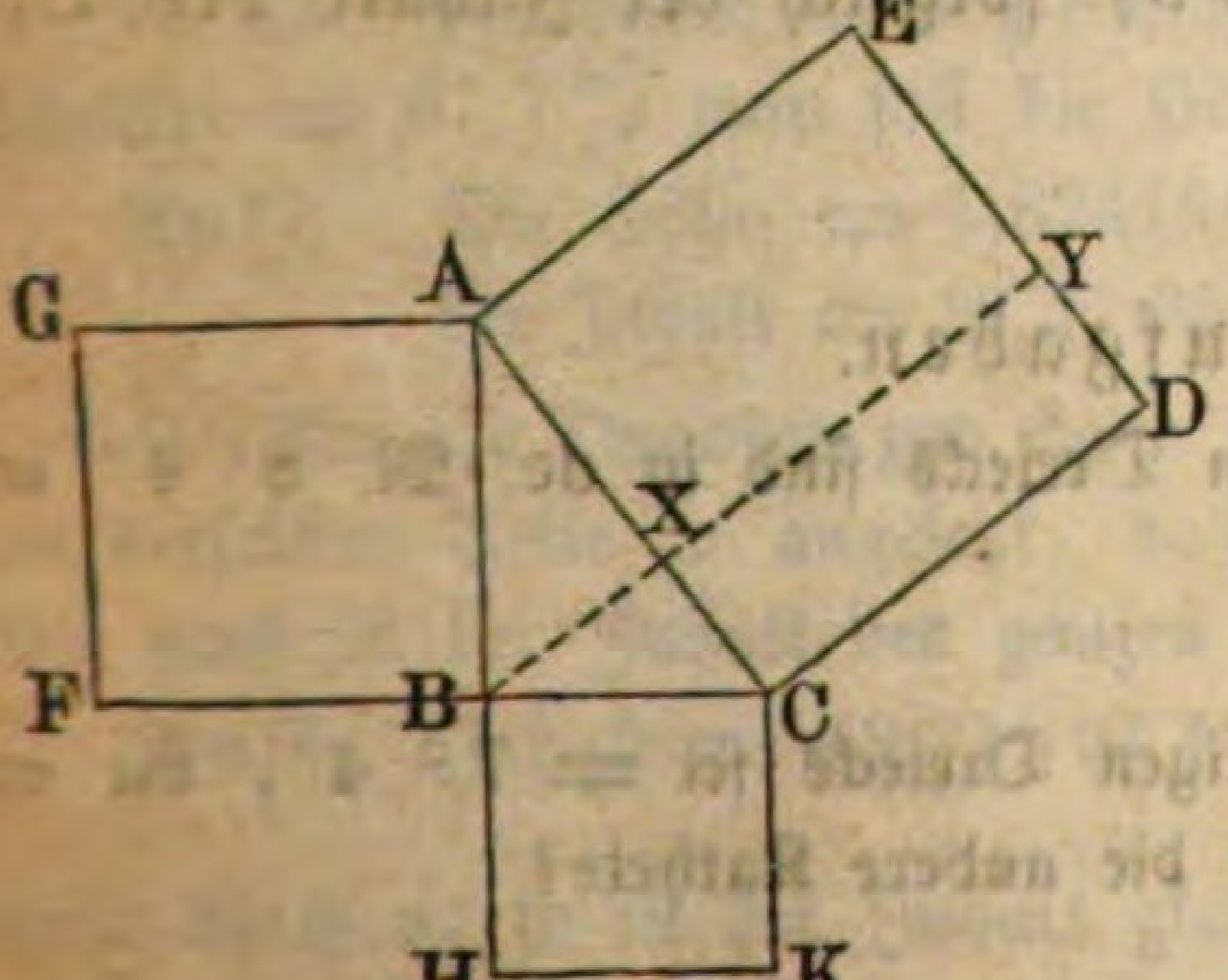
§. 62.
Der Pythagoreische Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Vorauss. $\angle ABC = R.$

Behaupt. $AC^2 = AB^2 + BC^2.$

Bew. Sind ACDE, ABFG und BCKH Quadrate, und man fällt $BY \perp DE$, also auch $\perp AC$, so wird das Quadrat über AC in zwei Rechtecke AXYE und CXYD zerlegt, welche resp. den Quadraten über AB und BC gleich sind. Es folgt dies unmittelbar aus dem vorigen §. Denn betrachtet man den spitzen Winkel bei A, dessen Schenkel AC und AB sind, so ist AX die Projection von AB auf AC, und AB die Projection von AC auf AB; folglich ist $AC \times AX = AB \times AB$, d. h.



1) Rechteck AXYE $= AB^2$.

Ganz eben so folgt aus den Projectionen der Schenkel des spitzen Winkels bei C:

2) Rechteck CXYD $= BC^2$.

Addirt man die Gleichungen 1) und 2), so entsteht $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

§. 63.

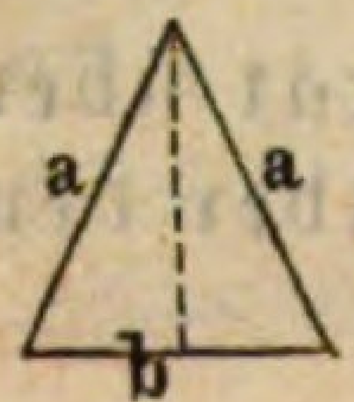
Der vorstehende Lehrsatz, einer der wichtigsten der Geometrie, gestattet die Berechnung einer Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die beiden andern Seiten bekannt sind. Da ferner das gleichschenklige Dreieck durch die eine Höhe, das gleichseitige durch jede Höhe in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, so kann man mit Hülfe dieses Satzes die Inhalte dieser Dreiecke finden. Man merke also zunächst folgende Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes:

1) **Sind a und b die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist das Quadrat der Hypotenuse $= a^2 + b^2$, folglich die Hypotenuse selbst $= \sqrt{a^2 + b^2}$.**

2) **Ist a die Hypotenuse und b eine Kathete, so ist das Quadrat der andern Kathete $= a^2 - b^2$, folglich diese Kathete selbst $= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$.**

Sind daher zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks rationale Zahlen, so ist die dritte Seite mit den gegebenen in der Regel incommensurabel, also dann nur durch eine irrationale Zahl auszudrücken. (Vergl. Arithm. §. 167., I.)

3) Ist jeder Schenkel eines **gleichschenkligen** Dreiecks gleich a,



die Grundlinie gleich b, so ist die Höhe auf b $= \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, folglich der Inhalt des Dreiecks

$$= \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

4) Ist das Dreieck **gleichseitig** und jede Seite $= a$, so ist die Höhe $= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, folglich der Inhalt des Dreiecks $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Uebungsaufgaben.

1) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind in dc.-M. 8′ 4″ und 2° 8′ 8″; wie groß ist die Hypotenuse?

Aufl. 3°.

2) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei $=$ 7° 4′, die eine Kathete $=$ 2° 3′ 4″ dc.; wie groß ist die andere Kathete?

Aufl. 7° 2″.

3) Die Seite eines Quadrats sei $= a$; wie groß ist die Diagonale?

Aufl. Die Diagonale ist $= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; daher hat die Seite zur Diagonale das Verhältniß $1 : \sqrt{2}$.

4) Die Diagonale eines Quadrats sei $= a$; wie groß ist die Seite?

Aufl. Die Seite bildet mit zwei halben Diagonalen ein rechtwinkliges Dreieck; folglich ist die Seite $= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

5) Jede Seite eines Rhombus sei $= 30{,}4'$ und eine Diagonale $= 7'$; wie groß ist die andere Diagonale?

Aufl. Die Diagonalen stehen auf einander senkrecht und halbiren sich; folglich ist die Hälfte der gesuchten Diagonale $= \sqrt{30{,}4^2 - 3{,}5^2}$; also die ganze Diagonale $= 2\sqrt{30{,}4^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{60{,}8^2 - 7^2} = \sqrt{3647{,}64} = 60{,}395'$.

6) Ein Schenkel eines Winkels sei $= 10'\ 7''$ ddc., seine Projection auf den andern Schenkel $= 5'\ 5''$ ddc.; wie groß ist die projicirende Linie?

Aufl. $9'\ 1''\ 1{,}2'''$ ddc.

7) In der Figur zum Pythagoreischen Lehrsatz in §. 62. mögen die Katheten des $\triangle ABC$ gegeben sein, gleich a und b. Denkt man sich nun noch die 3 Linien GE, DK und HF gezogen, wie groß ist dann der Inhalt des Sechsecks GEDKHF?

Aufl. Dem Dreieck ABC ist $\triangle FBH$ congruent, die $\triangle\triangle GAE$ und KCD sind ihm gleich. Man findet dies leicht, wenn man im $\triangle GAE$ Seite GA als Grundlinie ansieht und die zugehörige Höhe construirt, welche der BC gleich wird, während $GA = AB$ ist. Aehnlich verfährt man bei dem $\triangle KCD$. Der Inhalt des Sechsecks wird $= 2(a^2 + ab + b^2)$.

8) Wie groß ist der Umfang dieses Sechsecks?

Aufl. Behufs der Berechnung verlängere man GA über A und fälle von E auf die Verlängerung eine Senkrechte. Ebenso fälle man von D auf die Verlängerung von KC eine Senkrechte. Man erhält so zwei neue Dreiecke in dem Quadrat über AC, welche dem $\triangle ABC$ congruent sind. Der gesuchte Umfang ist gleich

$$a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{4a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

9) Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sei $= 3'\ 4''\ 2'''$, jeder Schenkel $= 6'\ 7'''$; man soll die Höhe und den Inhalt finden.

Aufl. Die Höhe $= 5{,}824156' = 5'\ 8''\ 2'''$ dc.
der Inhalt $= 9\square'\ 95\square''\ 93\square'''$ dc.

10) An ein Quadrat zur Seite $3'\ 6''\ 5'''$ dc. ist ein gleichseitiges Dreieck mit derselben Seite so angesetzt, daß beide Figuren eine Seite gemein haben. Wie groß ist der Inhalt des ganzen Fünfecks?

Aufl. Inhalt $= 19\square'\ 9\square''\ 13\square'''$ dc. Bezeichnet man die gegebene Seite durch a, so ist der Inhalt gleich $\frac{4 + \sqrt{3}}{4} a^2$.

11) Zieht man in einem Viereck ABCD die Diagonale BD, so sei ΔBCD gleichseitig. Gegeben sei die Seite AB = 8′ dc., die Diagonale BD = 14′ ddc. und der Winkel A = 90°; wie groß ist der Inhalt des Vierecks?

Aufl. In Quadrat-Ruthen ist der Inhalt

$$= 0{,}4 \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 - 0{,}8^2} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{0{,}2}{3} \cdot \sqrt{7^2 - 4{,}8^2} + \frac{49}{144} \cdot \sqrt{3};$$

hieraus folgt der Inhalt = 92□′ 90□″ 51□‴ dc.

12) Jede Seite eines Quadrats sei in 3 gleiche Theile getheilt, und die zwei jeder Ecke zunächst liegenden Theilpunkte seien durch gerade Linien verbunden. So entsteht ein Achteck, dessen Inhalt und Umfang gesucht wird, wenn die Seite des Quadrats = a ist.

Aufl. Inhalt $= \frac{7}{9} a^2$; Umfang $= \frac{4}{3} a (1 + \sqrt{2})$.

13) Ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck haben gleichen Umfang = 66,6′; welche beider Figuren hat den größeren Inhalt, und wie viel beträgt der Unterschied?

Aufl. Das Quadrat ist um 63,81652□′ größer als das Dreieck.

14) Jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei in drei gleiche Theile getheilt, und die zwei jeder Ecke zunächst liegenden Theilpunkte seien durch gerade Linien verbunden. So entsteht ein Sechseck, dessen Umfang und Inhalt gesucht wird, wenn die Seite des Dreiecks gleich a ist.

Aufl. (Vergl. §. 21. Nr. 5.) Umfang = 2a, Inhalt $= \frac{a^2}{6} \sqrt{3}$.

§. 64.

Der allgemeine Pythagoreische Lehrsatz (für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke).

In einem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermindert, oder vermehrt um das doppelte Rechteck, welches eine dieser beiden Seiten und die Projection der andern auf sie zu Seiten hat, je nachdem der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel spitz, oder stumpf ist.

Voraussf. Im ΔABC sei $\measuredangle$C spitz, $\measuredangle$B stumpf, und AX $\perp$ CB.

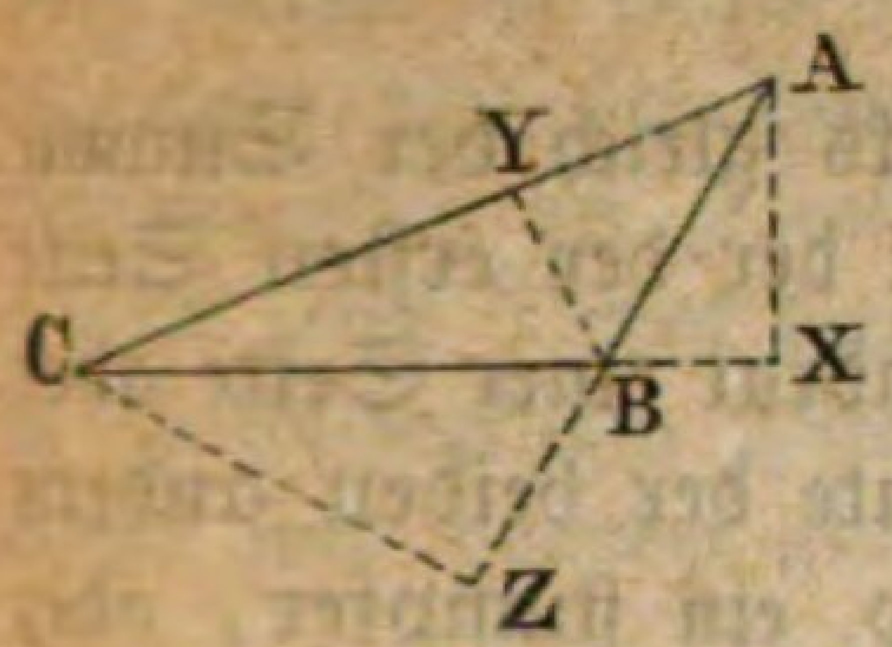
Behaupt. I. $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2.CB.CX$.

II. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2.BC.BX$.

Bew. zu I. Da ΔABX rechtwinklig ist, so folgt

$$AB^2 = AX^2 + BX^2.$$

Nun iſt aber $\triangle ACX$ ebenfalls rechtwinklig; man kann daher $AX^2 = AC^2 - CX^2$



ſetzen; und ſchreibt man noch $CX - BC$ ſtatt BX, ſo folgt aus der erſten Gleichung:

$$AB^2 = AC^2 - CX^2 + (CX - BC)^2.$$

Hieraus ergiebt ſich nach §. 59. Nr. 4.:

$$AB^2 = AC^2 - CX^2 + CX^2 - 2.BC.CX + BC^2$$

oder I. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.CB.CX.$

Wäre der Winkel B auch ſpitz, ſo würde X zwiſchen B und C fallen; dann muß man ſtatt BX ſetzen: $BC - CX$.

Der Bew. zu II. iſt nun ganz übereinſtimmend zu führen. Es iſt

$$AC^2 = AX^2 + CX^2.$$

Setzt man $AB^2 - BX^2$ ſtatt AX^2 und $BC + BX$ ſtatt CX, ſo folgt:

$$AC^2 = AB^2 - BX^2 + (BC + BX)^2;$$

oder $AC^2 = AB^2 - BX^2 + BC^2 + 2.BC.BX + BX^2;$

alſo II. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2.BC.BX.$

Anmerk. Man kann den Beweis auch durch den Lehrſatz von den Projectionen der Schenkel eines Winkels im §. 61. führen, und es iſt dem Leſer zu rathen, nicht nur auch dieſen Beweis zu verfolgen, ſondern auch noch die vorkommenden Figuren, welche im Beweiſe durch ihre Inhalte (Producte und Quadrate) ausgedrückt ſind, wirklich zu conſtruiren. — Fällt man noch $BY \perp AC$ und $CZ \perp AB$, ſo iſt der Beweis des Geſetzes I. folgender: Aus §. 61. folgt in Bezug auf die Schenkel der Winkel bei A und bei B

$$AB.AZ = AC.AY$$

$$BA.BZ = BC.BX; \text{ daher, ſubtrahirt:}$$

$$AB.AZ - BA.BZ = AC.AY - BC.BX.$$

Statt der Differenz der Rechtecke auf der linken Seite dieſer Gleichung kann man das Rechteck $AB.(AZ - BZ)$, alſo das Quadrat AB^2 ſetzen, und wenn man noch rechts $AC - CY$ ſtatt AY und $CX - BC$ ſtatt BX ſetzt, ſo folgt:

$$AB^2 = AC.(AC - CY) - BC.(CX - BC).$$

Jedes der beiden Rechtecke rechts kann in die Differenz eines Quadrats und eines Rechtecks zerlegt werden; folglich iſt

$$AB^2 = AC^2 - AC.CY - (BC.CX - BC^2), \text{ oder}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - AC.CY - BC.CX.$$

Wendet man endlich noch den Lehrſatz in §. 61. auf die Schenkel des Winkels C an, ſo erkennt man die Gleichheit der Rechtecke $AC.CY$ und $BC.CX$; folglich iſt:

I. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.CB.CX.$

Iſt $\triangle ABC$ ſpitzwinklig, alſo $\measuredangle B$ auch ſpitz, ſo fällt X zwiſchen B und C, und Z zwiſchen B und A; dann muß man die beiden zuerſt angegebenen Gleichungen nicht von einander ſubtrahiren, ſondern zu einander addiren.

Dem Leſer bleibe überlaſſen, den Beweis zu II. auf dieſelbe Weiſe zu führen.

§. 65.

Lehrsatz.

Ist das Quadrat einer Seite eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter; ist das Quadrat einer Seite aber größer, oder kleiner als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der gegenüberliegende Winkel resp. ein stumpfer, oder spitzer Winkel.

Beweis folgt unmittelbar indirect aus §. 62. und 64.

§. 66.

Beurtheilung, ob ein Dreieck, dessen Seiten man kennt, recht-, spitz- oder stumpfwinklig ist.

Ist keine Seite größer als jede der beiden andern, so ist das Dreieck immer spitzwinklig.

Ist aber eine Seite größer als jede der beiden andern, so braucht sich die Beurtheilung nur auf den dieser Seite gegenüberliegenden Winkel zu erstrecken; denn die beiden andern Winkel sind immer spitz. Man erhebe jede Seite auf das Quadrat (natürlich gleiche Längeneinheit vorausgesetzt). Ist das Quadrat der größten Seite größer als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist das Dreieck stumpfwinklig, ist es kleiner: spitzwinklig, ist es der Summe gleich: rechtwinklig.

Beisp. Es sind die drei Seiten von acht Dreiecken bekannt, nämlich in dc.-M.:

1) 6'; 9' 1" und 1° 9".
2) 1° 3' 8"; 5° 2' und 5° 3' 6".
3) 4'; 4' 2" und 6'.
4) 5,2'; 4,48' und 2,653'.
5) 2,65°; 0,23° und 2,64°.
6) 9' 5"; 19' 6" und 16' 8".
7) 8' 8"; 9' 7" 9‴ und 4' 2" 9‴.
8) 3'; 3' 3" 8‴ und 1' 6";

man soll angeben, welche von diesen Dreiecken recht-, spitz- und stumpfwinklig sind.

Aufl. Rechtwinklig Nr. 1. 5. und 7.; stumpfwinklig Nr. 3. und 6.; spitzwinklig Nr. 2. 4. und 8.

§. 67.

Erklärung.

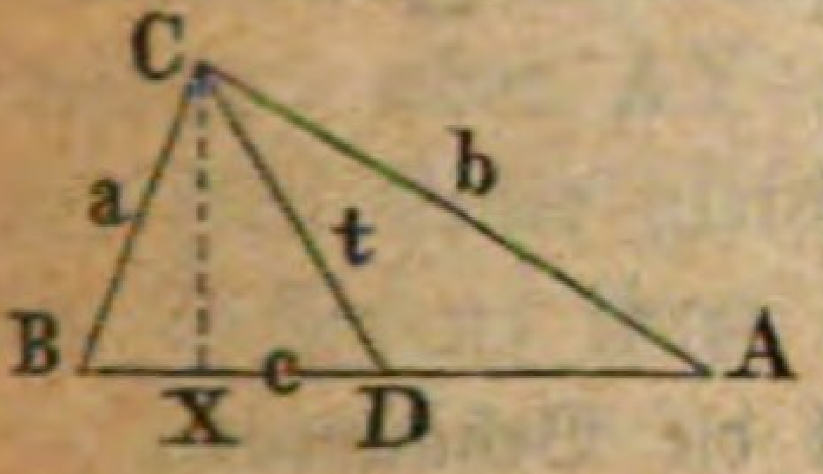
Jede gerade Linie, welche ein System anderer Linien durchschneidet, wird eine Transversale genannt.

In diesem und dem nächsten Kapitel kommen häuptsächlich Transversalen vor, welche die Seiten eines Dreiecks schneiden, und unter diesen finden wieder diejenigen eine besondere Anwendung, welche die Ecke eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden. Solcher Transversalen enthält jedes Dreieck drei, und sie sind im gleichseitigen Dreieck zugleich Höhen; im gleichschenkligen Dreieck ist eine die Höhe auf der Grundlinie, die beiden andern sind einander gleich (vergl. §. 28. X.).

§. 68.
Lehrsätze.

1) In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate zweier Seiten, gleich dem doppelten Quadrat der (zwischen ihnen liegenden) Transversale, welche den Mittelpunkt der dritten Seite mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet, addirt zu dem halben Quadrat der dritten Seite; oder, wenn a, b, c die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten sind, t aber die von C aus gezogene Transversale CD:

$$\text{I.} \qquad a^2 + b^2 = 2t^2 + \tfrac{1}{2}c^2.$$



Bew. Ist $CD \perp AB$, so folgt der Satz aus §. 62. Ist aber CD nicht senkrecht auf AB, und etwa ∢ CDB spitz, so ist nach §. 64., wenn $CX \perp AB$ gefällt wird:

$$a^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - c.DX \quad \text{und}$$

$$b^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + c.DX.$$

Aus der Addition beider Gleichungen folgt die Richtigkeit der Behauptung.

2) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten; oder, wenn p und q die Diagonalen, a und b die Seiten bezeichnen:

$$\text{II.} \qquad p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Bew. In jedem der beiden Dreiecke, in welche das Parallelogramm durch die Diagonale q zerlegt wird, ist $\frac{p}{2}$ eine Transversale von einer Ecke nach dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite; folglich ist nach dem vorhergehenden Lehrsatze

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}q^2.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit 2, so entsteht die Behauptung.

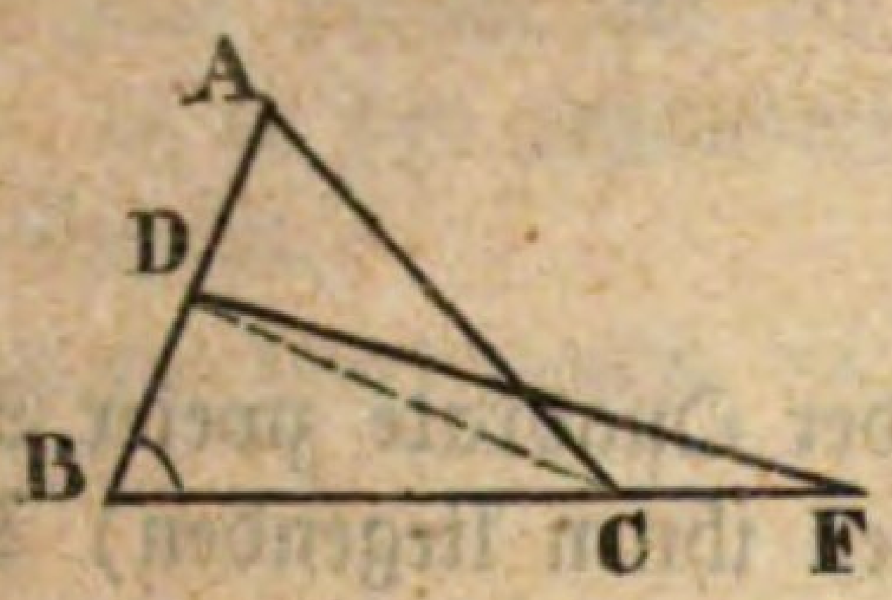
§. 69.
Lehrsatz.

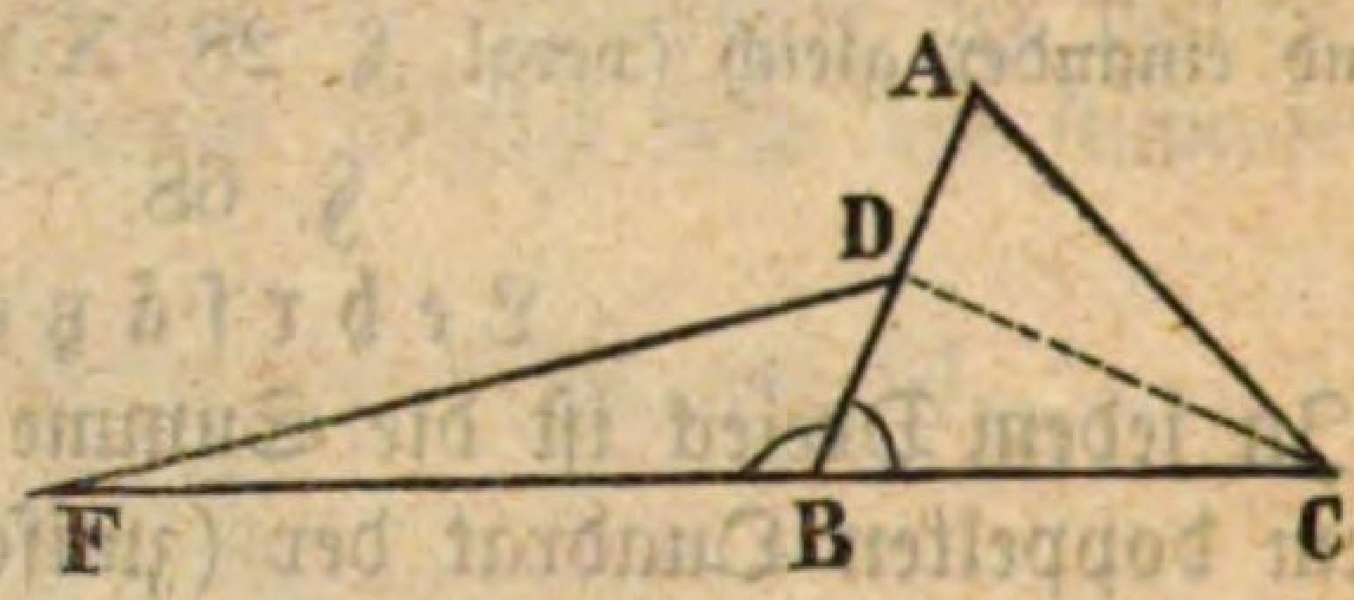
Zwei Dreiecke oder zwei Parallelogramme, in welchen ein Winkel des einen einem Winkel des anderen gleich oder dessen Supplementswinkel ist, verhalten sich zu ein-

ander, wie die Producte der diese Winkel einschließenden Seiten.

Behaupt. $\triangle ABC : \triangle DBF = BA.BC : BD.BF.$

Bew. Man kann die Dreiecke, wenn sie ein Paar gleicher Winkel haben, so auf einander legen, daß diese Winkel sich decken; haben sie aber ein Paar





Supplementswinkel, so kann man sie so an einander legen, daß diese Winkel Nebenwinkel werden. Die Dreiecke ABC und DBF zeigen in den beiden Figuren diese Lagen, und die Behauptung ist sonach:

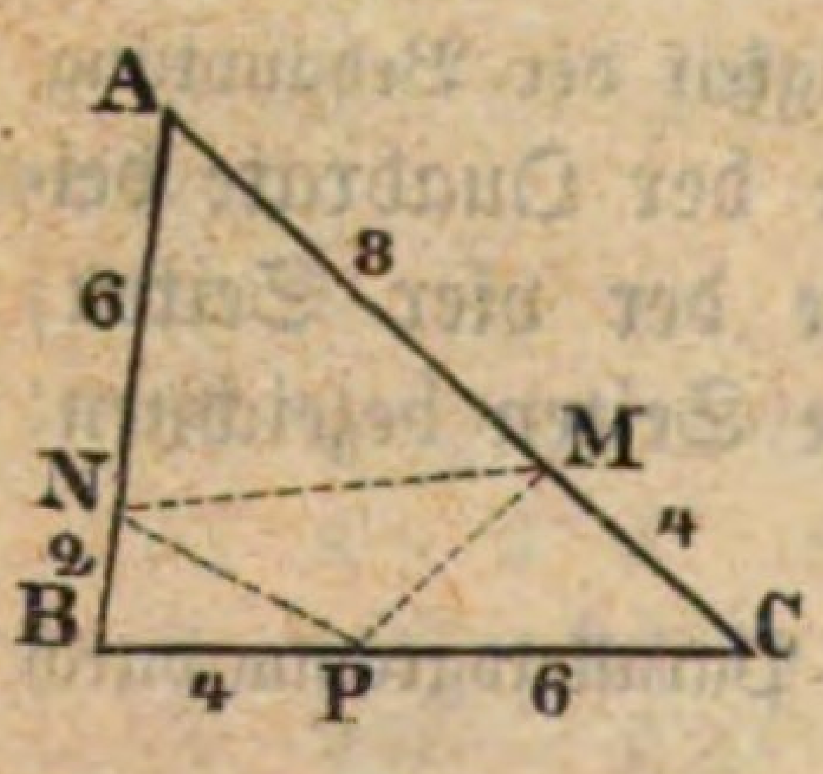
$$\triangle ABC : \triangle DBF = BA.BC : BD.BF.$$

Zieht man DC, so kann man jedes der Dreiecke mit dem $\triangle DBC$ vergleichen und erhält nach §. 52., 2.:

$$\triangle ABC : \triangle DBC = BA : BD$$
$$\triangle DBC : \triangle DBF = BC : BF.$$

Setzt man die Proportionen zusammen, so entsteht die Behauptung. — Für Parallelogramme gilt der Satz, weil er für ihre Hälften, nämlich für die Dreiecke gilt, in welche sie durch die Diagonalen zerlegt werden.

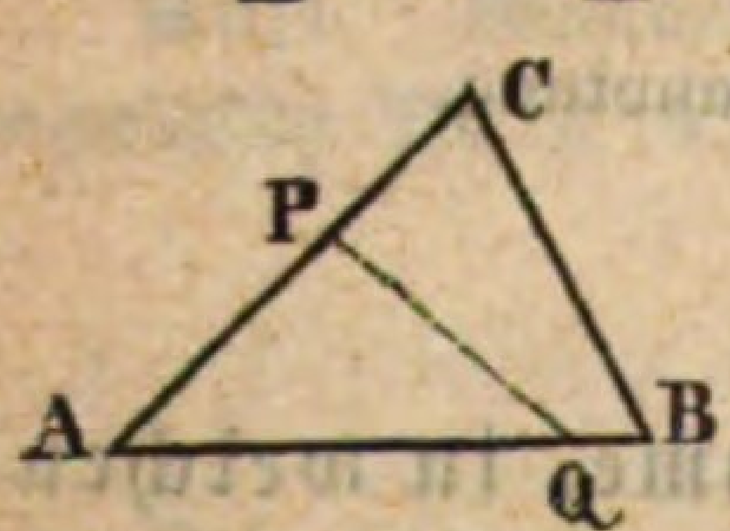
Beispiele. 1) Im $\triangle ABC$ kennt man die Länge der Seiten und in diesen die Punkte N, M, P. Es sei $AN = 6'$, $NB = 2'$, $BP = 4'$, $PC = 6'$, $CM = 4'$ und $MA = 8'$. Wie verhalten sich die vier Dreiecke, in welche $\triangle ABC$ durch die Linien NM, MP und PN zerlegt wird, zu einander und zu dem ganzen Dreieck?



Aufl.
$$\triangle ABC : \triangle ANM = 96 : 48 = 10 : 5$$
$$\triangle ABC : \triangle BNP = 80 : 8 = 10 : 1$$
$$\triangle ABC : \triangle CMP = 120 : 24 = 10 : 2.$$

Die drei kleinen Dreiecke, welche an den Ecken des $\triangle ABC$ liegen, betragen also zusammen $\frac{8}{10}$ vom Inhalt des $\triangle ABC$, so daß also $\triangle NMP$ $\frac{2}{10}$ vom Inhalt des ganzen Dreiecks ist. Daher:

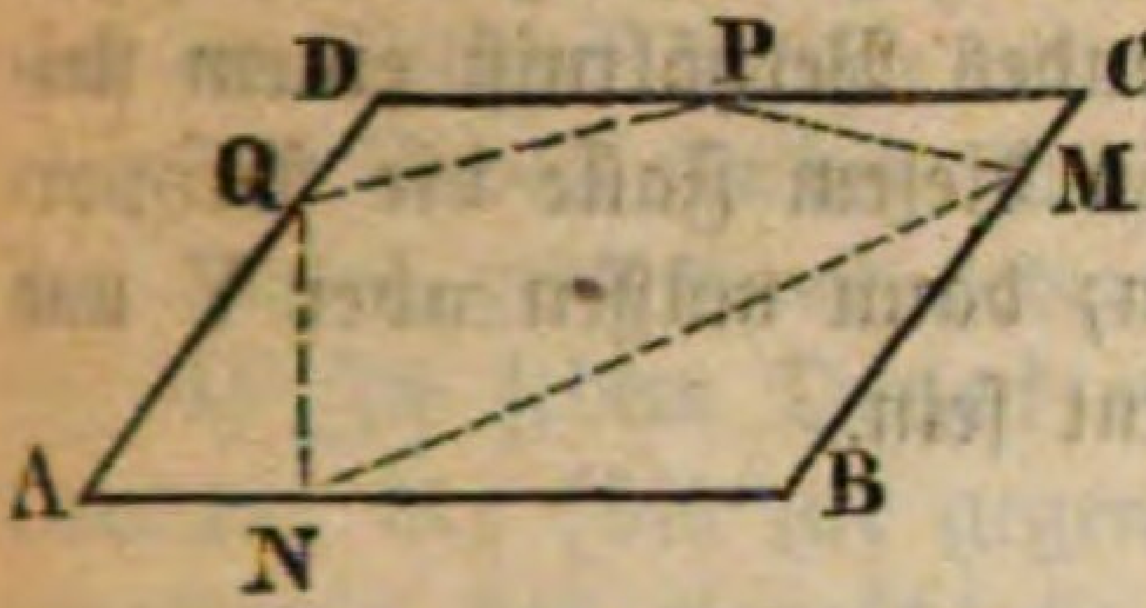
$$\triangle ABC : \triangle ANM : \triangle BNP : \triangle CMP : \triangle NMP = 10 : 5 : 1 : 2 : 2.$$



2) Der Inhalt des $\triangle ABC$ sei $200\,\square'$; ferner sei $AP = \frac{3}{5} AC$ und $AQ = \frac{7}{8} AB$; wie groß ist der Inhalt des Dreiecks APQ?

Aufl. $105\,\square'$.

3) In das Parallelogramm ABCD ist das Viereck NMPQ eingezeichnet. Es sei $AN = 3'$; $NB = 7'$; $BM = 7'$; $MC = 1'$; $CP = 5'$ und



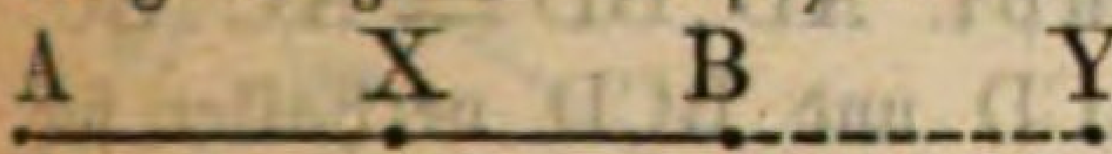
AQ = 6′; wie verhalten sich beide Vierecke zu einander?

Aufl. Wie 80 zu 39. Man kann das Verhältniß jedes Dreiecks, z. B. ANQ, zu dem halben Parallelogramm, nämlich △ABD, bestimmen, also auch sein Verhältniß zu dem ganzen Parallelogramm.

§. 70.

Erklärung.

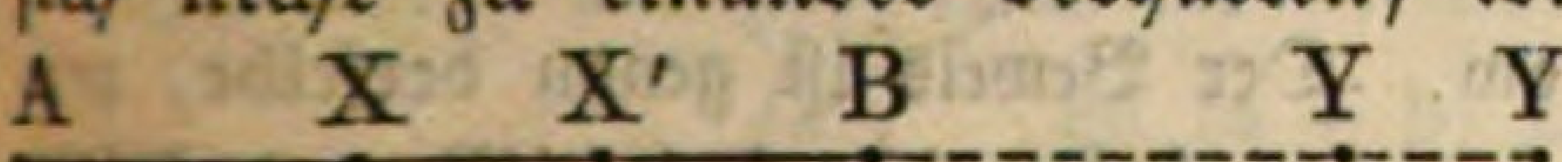
Jede Linie AB wird durch einen Punkt (X oder Y) ihrer Richtung in zwei Abschnitte zerlegt. Diese Abschnitte sind die Entfernungen des Punktes von den Endpunkten der Linie AB und heißen innere Abschnitte, wenn der Punkt (wie X) zwischen A und B liegt, hingegen äußere Abschnitte, wenn er (wie Y) in der Verlängerung der AB liegt. Es sind also AX und BX die inneren, aber AY und BY die äußeren Abschnitte der Linie AB, so daß jede Linie gleich der Summe ihrer inneren Abschnitte und gleich der Differenz ihrer äußeren Abschnitte ist.



§. 71.

Zusatz.

1) Ist eine Linie AB durch zwei Punkte X und X′ in zwei Paar innerer Abschnitte zerlegt, so können die Abschnitte welche X erzeugt, sich nicht zu einander verhalten, wie die gleichliegenden Abschnitte, welche X′ erzeugt, d. h. die Proportion



$$AX : BX = AX' : BX'$$

ist falsch. Denn aus dieser Proportion würde folgen:

$$AX + BX : AX = AX' + BX' : AX', \text{ oder}$$

$$AB : AX = AB : AX',$$

also ein Widerspruch. — Hingegen kann die Proportion AX : BX = BX′ : AX′ richtig sein; X und X′ müssen dann resp. von A und B gleich weit entfernt sein.

2) Derselbe Satz gilt für zwei Paar äußerer Abschnitte, d. h. die Proportion

$$AY : BY = AY' : BY'$$

ist falsch; denn aus ihr würde folgen:

$$AY - BY : AY = AY' - BY' : AY' \text{ oder}$$

$$AB : AY = AB : AY',$$

also ein Widerspruch. — Liegen Y und Y′ in entgegengesetzten Ver-

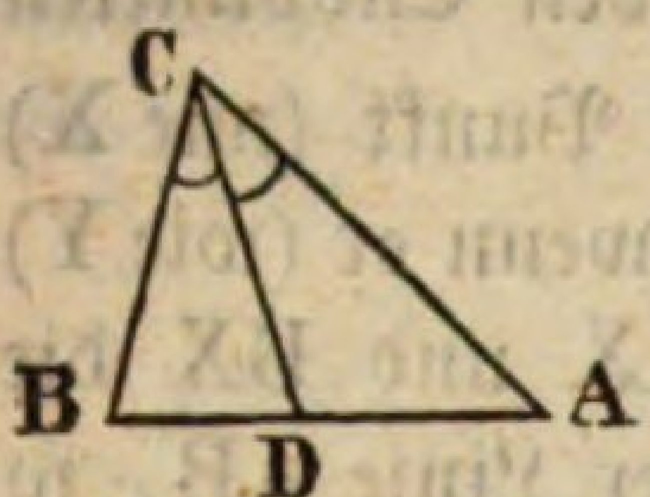
längerungen (links und rechts) der AB, so kann die Proportion schon deswegen nicht richtig sein, weil ein fallendes Verhältniß einem steigenden nie gleich ist. — Hingegen kann in diesem Falle die Proportion AY : BY = BY' : AY' richtig sein; dann müssen aber Y und Y' resp. von A und B gleich weit entfernt sein.

§. 72.

Lehrsätze über die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks.

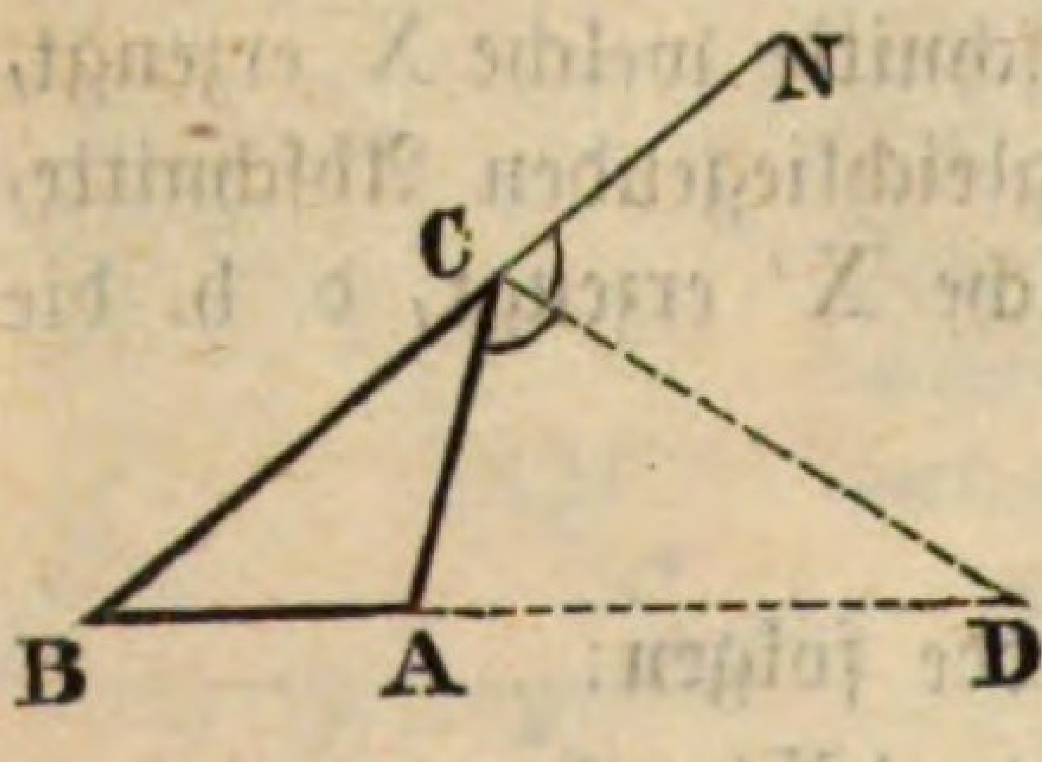
1) In jedem Dreieck theilt die Halbirungslinie eines Winkels die gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte, die sich zu einander wie die ihnen anliegenden Seiten des Dreiecks verhalten.

Vorauss. ∡ACD = ∡BCD. Behaupt. AD:BD = AC:BC.



Bew. Die Dreiecke ACD und BCD verhalten sich nach §. 69. zu einander, wie AC.CD zu BC.CD oder wie AC zu BC. Diese Dreiecke haben aber auch gleiche Höhen, verhalten sich also auch, wie AD zu BD; daher müssen die Verhältnisse AD : BD und AC : BC gleich sein.

2) In jedem Dreieck theilt die Halbirungslinie eines Außenwinkels die gegenüberliegende Seite in zwei äußere Abschnitte, die sich zu einander wie die ihnen anliegenden Seiten des Dreiecks verhalten. — Dieser Satz findet dann keine Anwendung, wenn die nicht getheilten Seiten des Dreiecks einander gleich sind; denn dann ist die Halbirungslinie des Außenwinkels der gegenüberliegenden Seite parallel.

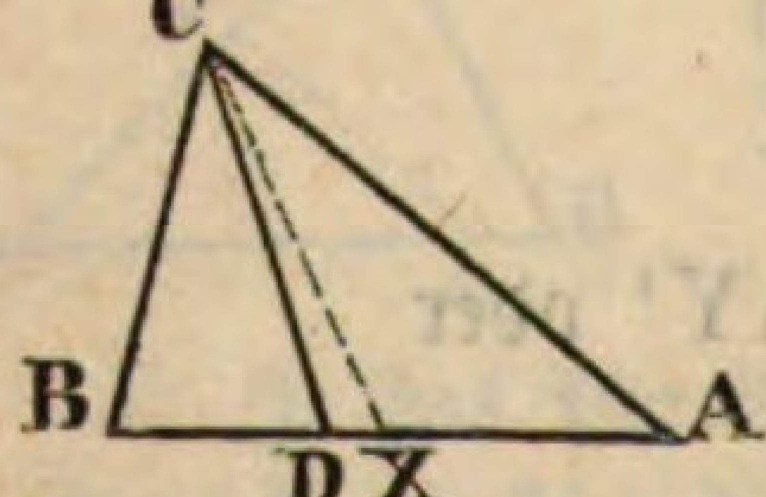


Vorauss. ∡ACD = ∡NCD.
Behaupt. AD : BD = AC : BC.

Bew. Der Beweis ist genau derselbe, wie zu Nr. 1.; nur haben die ΔΔ ACD und BCD nicht ein Paar gleicher Winkel, sondern ein Paar Supplementswinkel; denn mit Hülfe der Voraussetzung ist ∡ACD + ∡BCD = 2R.

3) Zerlegt man eine Seite eines Dreiecks in zwei Abschnitte, die sich zu einander wie die ihnen anliegenden Seiten des Dreiecks verhalten, so halbirt die Verbindungslinie des Theilpunktes mit der gegenüberliegenden Ecke den Winkel an dieser Ecke, oder seinen Nebenwinkel, je nachdem die Abschnitte innere, oder äußere sind.

Vorauss. AD : BD = AC : BC. Beh. ∡ACD = ∡BCD.



Bew. Gesetzt, CD halbirte den ∡ACB nicht, so müßte eine andere Linie, etwa CX, dies thuen. Dann verhält sich nach dem Satze 1)
AX : BX = AC : BC, und nach der Voraussetzung
AD : BD = AC : BC, woraus folgt:
AX : BX = AD : BD.

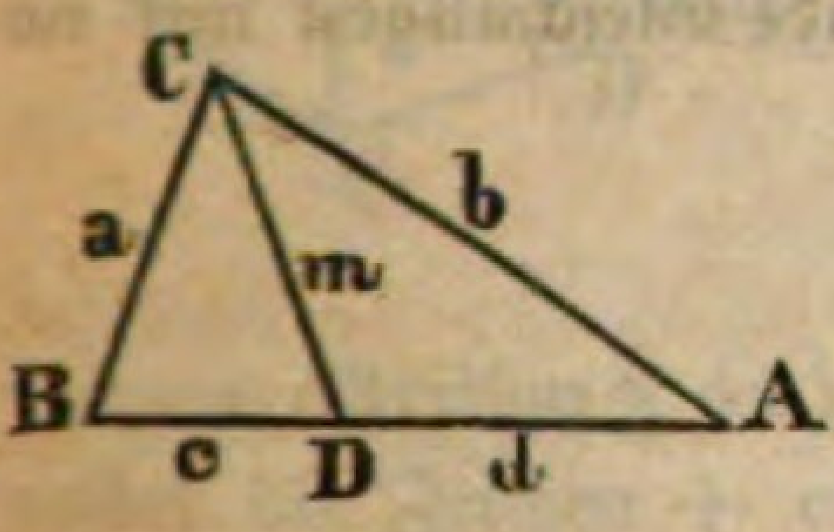
Diese Proportion zeigt einen Widerspruch, den man sofort erkennt, wenn man die mittleren Glieder vertauscht; folglich muß CD den $\measuredangle ACB$ halbiren.

Der Beweis für den Fall, daß AB in äußere Abschnitte zerlegt ist, kann ganz analog geführt und daher dem Leser überlassen werden.

4) In jedem Dreieck ist das Product zweier Seiten gleich dem Quadrat der (bis zur gegenüberliegenden Seite verlängerten) Halbirungslinie des eingeschlossenen Winkels addirt zu dem Product der beiden Abschnitte der dritten Seite.

Voraussf. $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$.

Behaupt. $a.b = m^2 + c.d$.



Bew. Bei der in der Figur angegebenen Bezeichnung folgt aus dem Satze 1) dieses §.

$$a : b = c : d, \text{ folglich}$$

$$c = \frac{ad}{b} \text{ und } d = \frac{bc}{a}, \text{ daher auch}$$

$$(1.) \quad c^2 = \frac{acd}{b} \text{ und } d^2 = \frac{bcd}{a}.$$

Wendet man nun auf die ΔBDC und ADC den Lehrsatz §. 64. an und bezeichnet die Projection von m auf a durch x, so daß nach der Voraussetzung die Projection von m auf b auch gleich x ist, so erhält man mit Hülfe von (1.):

$$\frac{acd}{b} = a^2 + m^2 - 2ax$$

$$\frac{bcd}{a} = b^2 + m^2 - 2bx.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit b und a, um die Nenner fortzuschaffen, und zieht dann die Gleichungen von einander ab, so folgt:

$$(2.) \quad cd.(a - b) = ab(a - b) - m^2(a - b).$$

Ist nun $a = b$, d. h. ΔABC gleichschenklig, so ist diese Gleichung richtig, aber zu weiteren Folgerungen unbrauchbar; ist aber a ungleich b, so kann man durch $a - b$ heben und erhält:

$$cd = ab - m^2 \text{ oder } ab = m^2 + cd,$$

was zu beweisen war.

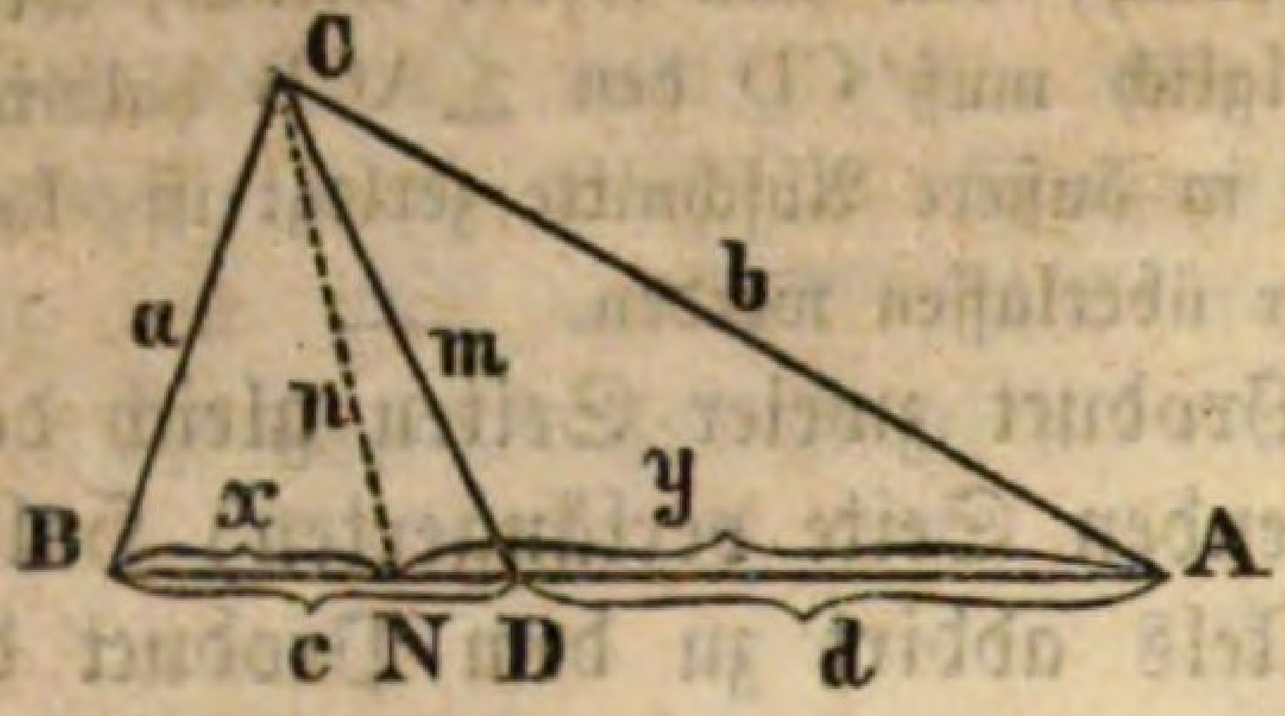
Daß der vorstehende Lehrsatz für den Fall, daß $a = b$ ist, auch wahr ist, erkennt man sehr leicht; denn dann muß $CD \perp AB$ sein, und $c = d$, und die Behauptung heißt $a^2 = m^2 + c^2$ und ist nach §. 62. richtig.

Anmerk. Einen kürzeren Beweis dieses Satzes mit Hülfe der Kreislehre findet man in §. 167. Nr. 12.

§. 73.

Zusatz.

Es soll noch untersucht und entschieden werden, ob der Satz 4) im vorigen §. auch umgekehrt wahr ist, d. h. ob aus der Voraussetzung $a.b = m^2 + c.d$ folgt, daß die Linie m den $\measuredangle ACB$ halbirt.



Nehmen wir an, m halbirte diesen Winkel nicht, so müßte es eine andere Linie thuen, z. B. CN, und bezeichnen wir CN mit n, BN mit x und AN mit y: so folgt aus dieser Annahme (nach §. 72. Nr. 4.) und aus der Voraussetzung, daß gleichzeitig folgende zwei Gleichungen Statt finden müssen:

1) $a.b = n^2 + x.y$ und

2) $a.b = m^2 + c.d.$

Es fragt sich also: ist dies möglich, oder stehen beide Gleichungen mit einander im Widerspruch?

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$n^2 + xy = m^2 + cd \quad \text{oder}$$

3) $n^2 - m^2 = cd - xy.$

Bezeichnet nun z die Projection von a auf BA, so ist, je nachdem $\measuredangle$B spitz oder stumpf ist:

$$n^2 = a^2 + x^2 \mp 2xz \quad \text{und}$$
$$m^2 = a^2 + c^2 \mp 2cz, \quad \text{folglich subtrahirt:}$$

4) $n^2 - m^2 = x^2 - c^2 \pm 2z(c - x).$

Aus 3) und 4) folgt aber:

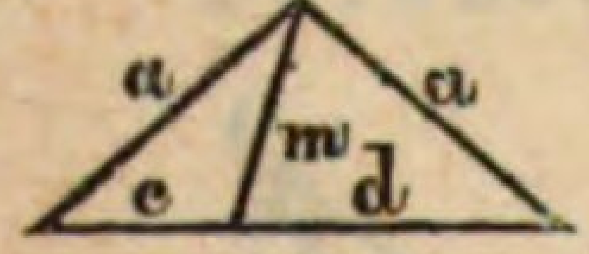
$$cd - xy = x^2 - c^2 \pm 2z(c - x) \quad \text{oder}$$
$$c(c + d) - x(x + y) = \pm 2z(c - x).$$

Es ist aber $c + d = x + y = AB$, folglich

5) $(c - x)AB = \pm 2z(c - x).$

Nach unserer Annahme sollten aber x und c ungleich sein, und in diesem Falle zeigt die Gleichung 5) immer einen Widerspruch, mit der einzigen Ausnahme, wenn $AB = 2z$ ist und rechts nur das Zeichen + gilt, d. h. wenn $BC = AC$, also ΔCBA gleichschenklig ist.

Sind also BC und AC ungleich, so führt die Annahme, m halbirt den $\measuredangle$ACB nicht, immer zu einem Widerspruch; folglich muß m den Winkel halbiren, und der Satz ist umgekehrt richtig. Ist hingegen ΔCBA gleichschenklig, und AB die Grundlinie, so ist die Gleichung 5) eine identische Gleichung, woraus folgt, daß bei diesem Dreieck die Gleichung $ab = m^2 + cd$ für jede Linie m wahr ist, welche die Spitze mit einem Punkte der Grundlinie verbindet. — Man kann dies unmittelbar so beweisen: Bezeichnet p die Projection von m auf d



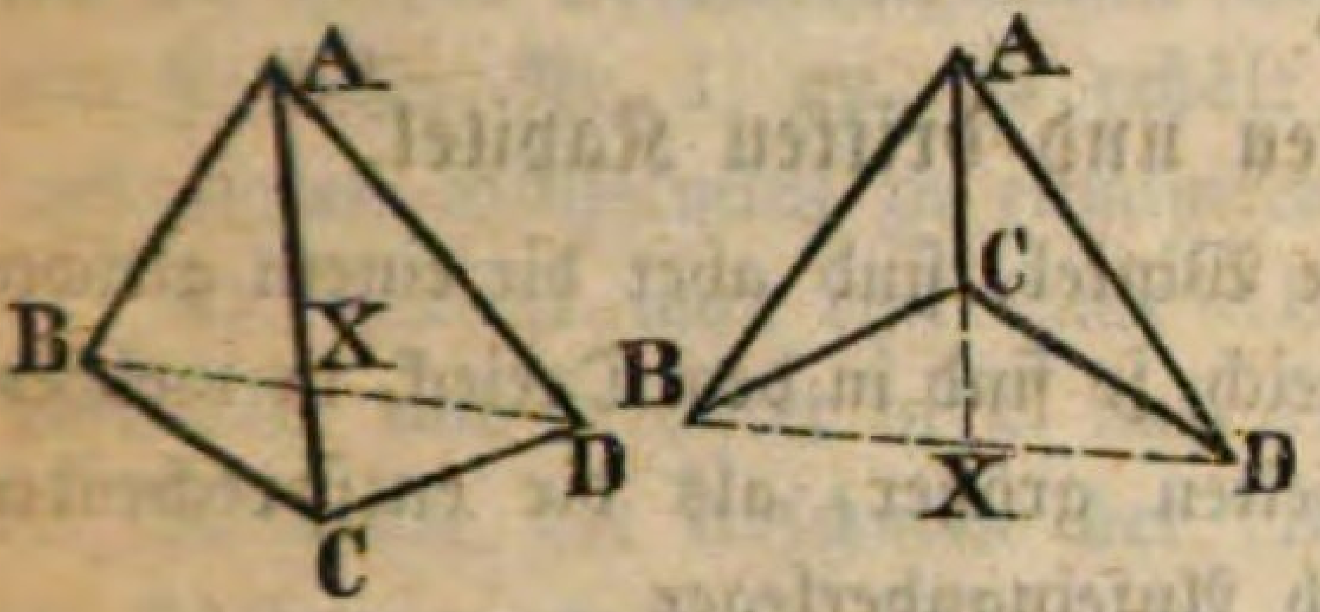
(oder c), so ist $p = \frac{c + d}{2} - c = \frac{d - c}{2}$, wenn $d > c$, also der Winkel, den m und c bilden, stumpf angenommen wird. Nach §. 64. ist daher

$$a^2 = m^2 + c^2 + 2c \cdot \frac{d - c}{2}, \quad \text{oder}$$
$$a.a = m^2 + cd.$$

§. 74.
Lehrsätze.

1) Jedes Viereck wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, die sich zu einander wie die Abschnitte verhalten, in welche diese Diagonale die andere Diagonale zerlegt.

Behaupt. $\triangle ABC : \triangle ADC = BX : DX$.



Bew. Die $\triangle\triangle ABX$ und ADX haben gleiche Höhen, verhalten sich also wie ihre Grundlinien. Dasselbe gilt von den $\triangle\triangle CBX$ und CDX; man hat also:

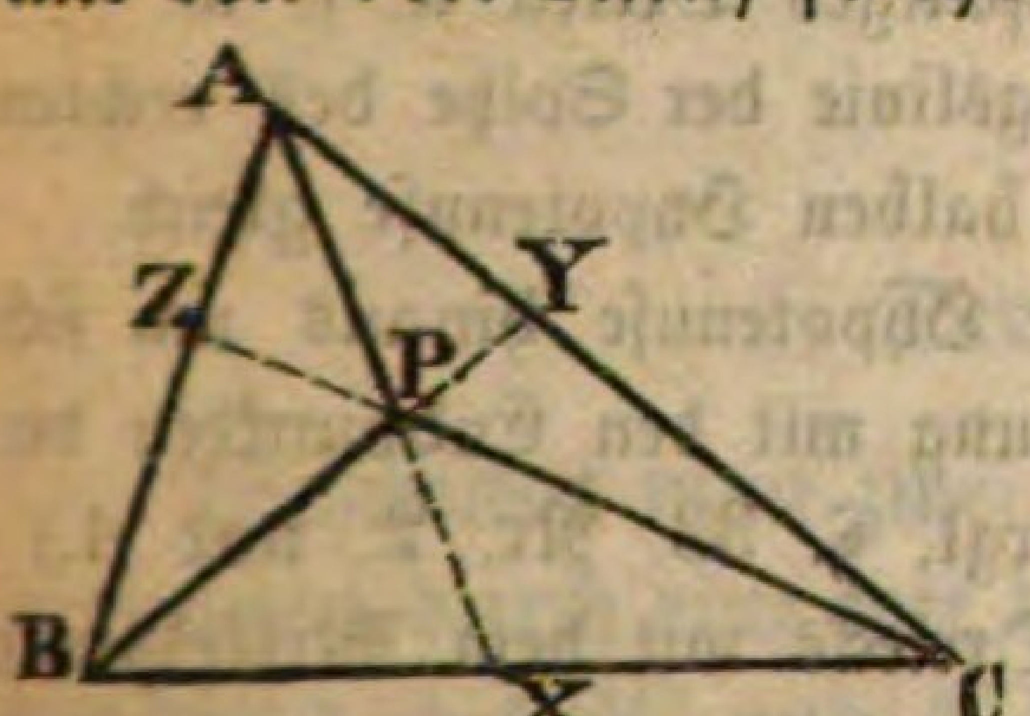
$$\triangle ABX : \triangle ADX = BX : DX$$
$$\triangle CBX : \triangle CDX = BX : DX.$$

Hieraus (Arithm. §. 44.) $\triangle ABX \pm \triangle CBX : \triangle ADX \pm \triangle CDX = BX : DX$, wobei die Zeichen + oder — gelten, je nachdem der Winkel BCD concav oder convex ist; folglich $\triangle ABC : \triangle ADC = BX : DX$.

Eben so beweist man noch (und zwar für beide Figuren)

$$\triangle ABD : \triangle CBD = AX : CX.$$

2) Verbindet man einen Punkt P innerhalb eines Dreiecks ABC mit den drei Ecken, so theilen diese Linien das Dreieck in drei Theile, von



denen je zwei sich zu einander verhalten, wie die beiden Abschnitte, in welche die von der gemeinschaftlichen Ecke beider nach P gezogene Linie gehörig verlängert die gegenüberliegende Seite zerlegt; d. h. es verhält sich:

$$\triangle ABP : \triangle ACP = BX : CX$$
$$\triangle ACP : \triangle BCP = AZ : BZ$$
$$\triangle BCP : \triangle ABP = CY : AY.$$

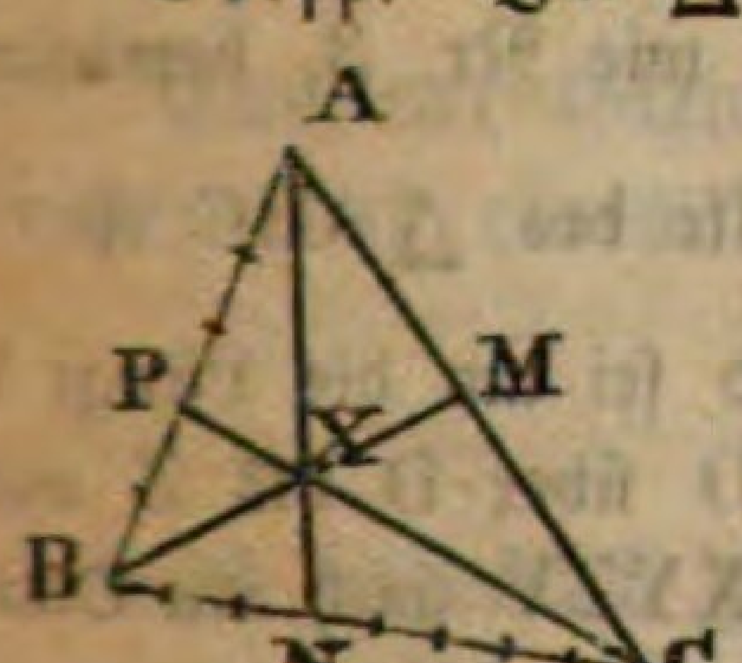
Der Beweis folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze, von welchem sich dieser nur in der Form unterscheidet.

Anmerk. Setzt man vorstehende drei Proportionen zusammen, so erhält man das Gesetz:

$$BX . AZ . CY = CX . BZ . AY,$$

auf welches wir später zurückkommen werden.

Beisp. Im $\triangle ABC$ ist AB in 5 gleiche Theile zerlegt, und der dritte Theilpunkt P von A aus ist mit C verbunden; BC ist in 8 gleiche Theile zerlegt, und der dritte Theilpunkt N von B aus ist mit A verbunden. Von B aus ist durch den Durchschnittspunkt X der AN und CP eine Linie gezogen und bis zum Durchschnittspunkte M mit AC verlängert: wie verhält sich AM zu MC?



Aufl. $\Delta XAB : \Delta XBC = AM : MC$

$\Delta XBC : \Delta XAC = 2 : 3$

$\Delta XAC : \Delta XAB = 5 : 3$

Hieraus folgt durch Zusammensetzen der Proportionen:

$10 . AM = 9 . MC$; oder

$AM : MC = 9 : 10$.

§. 75.

Uebungsaufgaben zum zweiten und dritten Kapitel.

1) Haben zwei Dreiecke bezüglich gleiche Winkel, sind aber die einem gleichen Winkelpaare gegenüberliegenden Seiten ungleich, so sind in dem Dreieck, in welchem die größere Seite ist, auch die andern Seiten größer, als die entsprechenden Seiten im andern Dreieck. Beweis durch Aufeinanderlegen.

2) Legt man durch jede Ecke eines Vierecks eine Parallele mit der der Ecke gegenüberliegenden Diagonale, so bilden diese vier Linien ein Parallelogramm, dessen Inhalt doppelt so groß ist, als der des Vierecks.

3) In jedem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse doppelt so groß ist, als eine Kathete, sind die spitzen Winkel resp. 60° und 30°.

Bew. Verlängert man die Kathete über die Spitze des rechten Winkels um sich selbst und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit der der Kathete gegenüberliegenden Ecke, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck u. s. w.

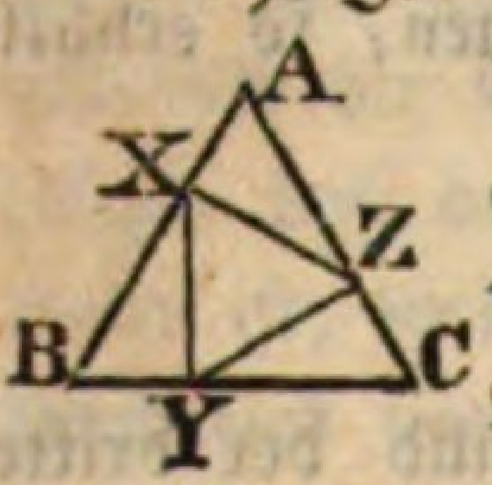
4) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Verbindungslinie der Spitze des rechten Winkels mit dem Mittelpunkt der Hypotenuse der halben Hypotenuse gleich.

Bew. Verlängert man diese Linie über die Hypotenuse hinaus um sich selbst und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit den Endpunkten der Hypotenuse, so entsteht ein Rechteck u. s. w. (Vergl. §. 33. Nr. 2. und 4.)

5) Ist die Verbindungslinie der Ecke eines Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite der Hälfte dieser Seite gleich, so ist das Dreieck rechtwinklig und diese Seite die Hypotenuse.

Bew. Es entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke, und bezeichnet man in dem einen jeden Winkel an der Grundlinie durch α, im andern durch β, so ist $2\alpha + 2\beta = 2R$, folglich $\alpha + \beta = R$.

6) Im gleichseitigen ΔABC sei $AX = BY = CZ$ gleich dem dritten Theile der Seite des Dreiecks. Man soll beweisen, daß ΔXYZ auch gleichseitig ist, seine Seiten auf den Seiten des ΔABC senkrecht stehen und sein Inhalt der dritte Theil vom Inhalt dieses Dreiecks ist.



Bew. Daß ΔBXY rechtwinklig ist, wird ähnlich wie Nr. 3. bewiesen, und aus §. 69. folgt, daß dieses Dreieck $\frac{2}{9}$ vom Inhalte des ΔABC ist.

7) Jede Seite des Quadrats ABCD sei $= a$ und sei um die Länge b verlängert: AB über B bis X, BC über C bis Y, CD über D bis Z und DA über A bis V; man soll beweisen, daß das Viereck XYZV auch ein Quadrat ist und den Inhalt $a^2 + 2ab + 2b^2$ hat.

8) In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate aller vier Seiten (a, b, c, d) gleich der Summe der Quadrate beider Diagonalen (p und q) addirt zu dem vierfachen Quadrat der Verbindungslinie (n) ihrer Mittelpunkte; oder

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4n^2.$$

Bew. Man verbinde einen Endpunkt von n mit den beiden gegenüberliegenden Ecken des Vierecks, so erhält man drei Dreiecke, in welchen resp. n und die beiden Verbindungslinien Transversalen sind. Auf diese Dreiecke wende man §. 68., Nr. 1. an, so erhält man 3 Gleichungen, aus welchen man die construirten Hülfslinien zu eliminiren hat.

9) Zerlegt man eine Linie AB im Punkte C in zwei innere oder äußere Abschnitte und errichtet in C auf AB eine Senkrechte CX, so ist die Differenz der Quadrate der Abschnitte der Linie AB gleich der Differenz der Quadrate der Entfernungen ihrer Endpunkte von einem beliebigen Punkte der Senkrechten CX. (§. 63. Nr. 2.)

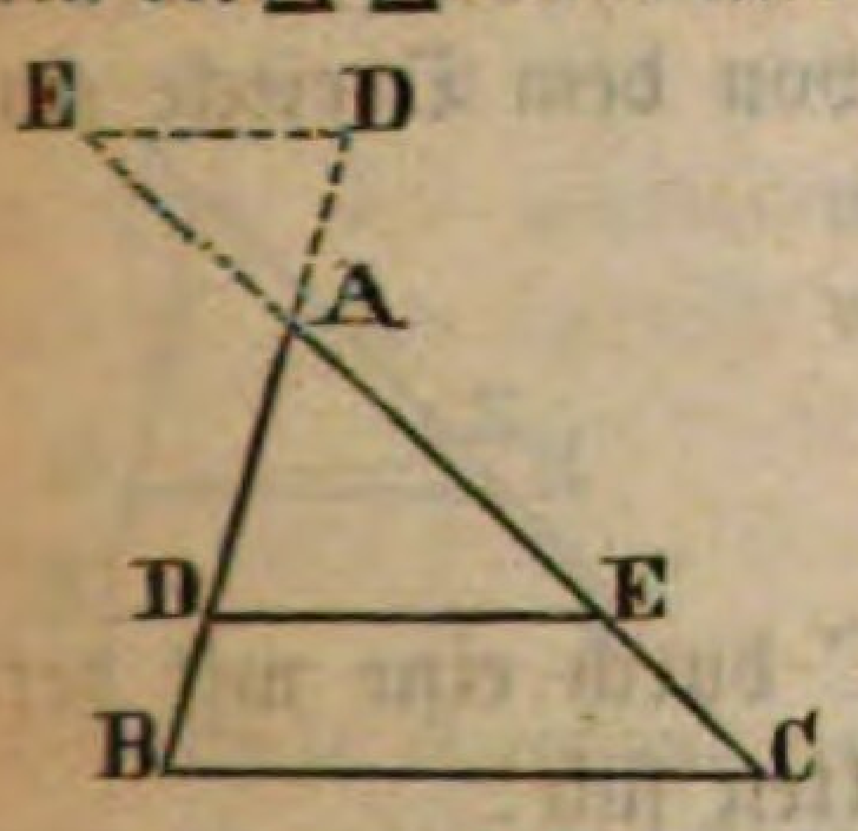
Viertes Kapitel.

Vergleichung der Figuren in Rücksicht auf ihre Form. Aehnlichkeit der Figuren. Proportionalität der Linien.

§. 76.

Der Begriff der Aehnlichkeit.

Schneidet man zwei Seiten eines Dreiecks ABC oder ihre Verlängerungen durch eine mit der dritten Seite BC parallele Linie DE, so haben die $\Delta\,\Delta$ ABC und ADE bezüglich gleiche Winkel, verhalten sich also zu einander, wie die Producte der die gleichen Winkel einschließenden Seiten. Da diese Dreiecke aber drei gleiche Winkelpaare haben, so kann man das Verhältniß $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF}$ auf drei verschiedene Arten ausdrücken und erhält so die gleichen Quotienten:



$$\frac{AB.AC}{AD.AE} = \frac{BC.AC}{DE.AE} = \frac{AB.BC}{AD.DE}.$$

Aus der Gleichheit der ersten beiden Quotienten, und dann des dritten und eines der ersten beiden, entsteht, wenn man hebt:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}.$$

Sonach haben die $\Delta\,\Delta$ ABC und ADE sowohl drei gleiche Winkelpaare, als auch drei gleiche Seitenverhältnisse, und hierin

erkennen wir fortan die Uebereinstimmung zweier Dreiecke in Bezug auf ihre Form (vergl. den Schluß des §. 40.)

Aus den drei gleichen Seitenverhältnissen ergiebt sich die laufende Proportion:

$$AB : BC : CA = AD : DE : EA.$$

Homologe Glieder beider Seiten dieser Proportion nennen wir homologe Seiten der Dreiecke, z. B. BC und DE, und sehen zugleich, daß diejenigen Seiten in beiden Dreiecken homologe sind, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen. Daß zwei Dreiecke gleiche Seitenverhältnisse haben, werden wir dadurch ausdrücken, daß wir sagen: die Dreiecke haben proportionale Seiten.

Die $\triangle\triangle ABC$ und ADE erfüllen also die zwei Bedingungen:

1) die Seiten des einen Dreiecks verhalten sich zu einander, wie die Seiten des andern, und

2) die von homologen Seiten eingeschlossenen Winkel beider Dreiecke sind einander gleich.

Wir nennen solche Dreiecke ähnliche und schreiben $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Diese Erklärung dehnen wir auf Polygone aus:

Zwei Vielecke von gleicher Seitenzahl heißen ähnlich, wenn die Seiten des einen sich zu einander verhalten, wie in derselben Ordnung die Seiten des andern und wenn die von homologen Seiten eingeschlossenen Winkel beider Vielecke einander gleich sind.

§. 77.

Lehrsatz.

Schneidet man zwei Seiten eines Dreiecks durch eine mit der dritten Seite parallele Linie, so wird durch sie von dem Dreiecke ein ihm ähnliches abgeschnitten.

Der Beweis ist im vorigen §. enthalten.

§. 78.

Lehrsätze.

I. Schneidet man zwei Seiten eines $\triangle ABC$ durch eine mit der dritten Seite BC parallele Linie DE, so verhalten sich:

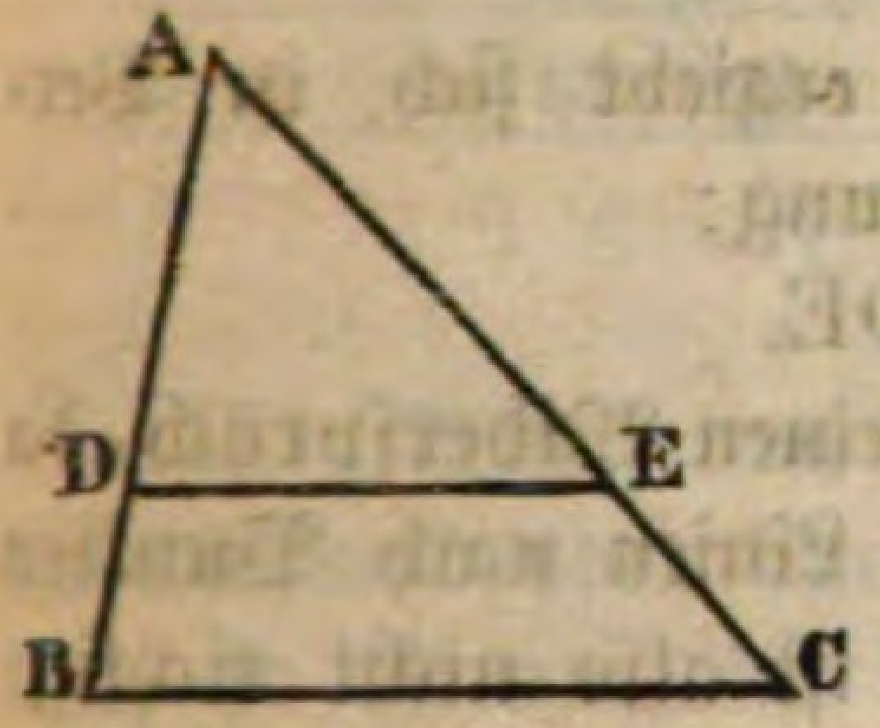
1) die geschnittenen Seiten zu einander, wie zwei gleichliegende Abschnitte derselben;

2) die Abschnitte der einen Seite verhalten sich zu einander, wie die gleichliegenden Abschnitte der andern Seite;

3) die schneidende Linie (DE) und die mit ihr parallele Seite des Dreiecks verhalten sich zu einander, wie die Entfernungen gleichliegender Endpunkte beider Linien von der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks.

Behaupt. 1) AB : AC = AD : AE = DB : EC.
2) AD : DB = AE : EC.
3) DE : BC = DA : BA = EA : CA.

Bew. Es ist $\triangle$ADE $\sim$ $\triangle$ABC, woraus sich unmittelbar diejenigen Proportionen ergeben, in welchen DB und EC nicht vorkommen. Die letzteren Proportionen erhält man durch arithmetische Umformung. Aus



AB : AC = AD : AE folgt
AB : AD = AC : AE; folglich
AB : AB − AD = AC : AC − AE oder
AB : DB = AC : EC, daher auch
AB : AC = DB : EC.

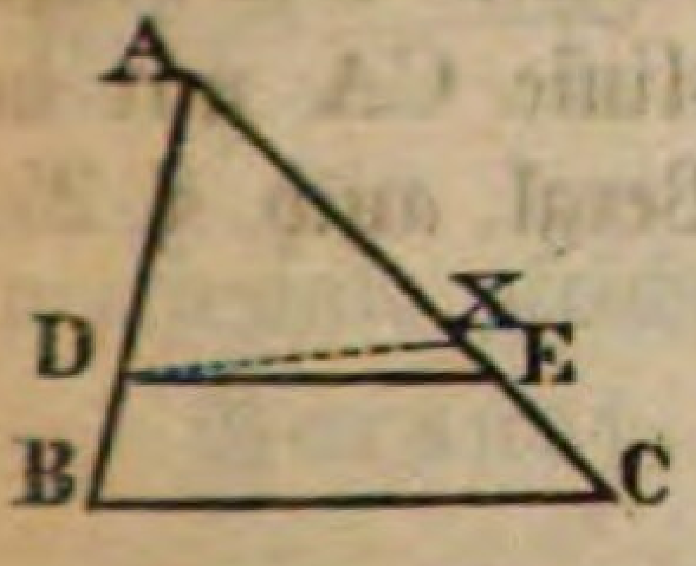
Die Proportion 2) folgt unmittelbar aus 1).

II. Eine Linie ist immer einer Seite eines Dreiecks parallel, wenn sie die beiden andern Seiten proportional theilt, d. h. so theilt, daß sich entweder die Abschnitte der einen Seite zu einander verhalten, wie die gleichliegenden Abschnitte der andern, oder so, daß sich diese Seiten selbst zu einander verhalten, wie ein Paar gleichliegender Abschnitte derselben.

Von den Proportionen, welche in diesem Satze die Voraussetzung bilden, kann man eine beliebige auswählen und aus ihr die Behauptung folgern, weil die übrigen durch arithmetische Umformung aus der einen sich bilden lassen, wie dies aus dem Beweise des vorhergehenden Satzes hervorgeht. Es sei

Voraussf. AD : DB = AE : EC, so ist
Behaupt. DE ∦ BC.

Bew. Gesetzt, DE wäre nicht parallel BC, so ziehe man DX ∦ BC. Dann müßte sich nach dem Satze I. verhalten:



AD : DB = AX : XC.

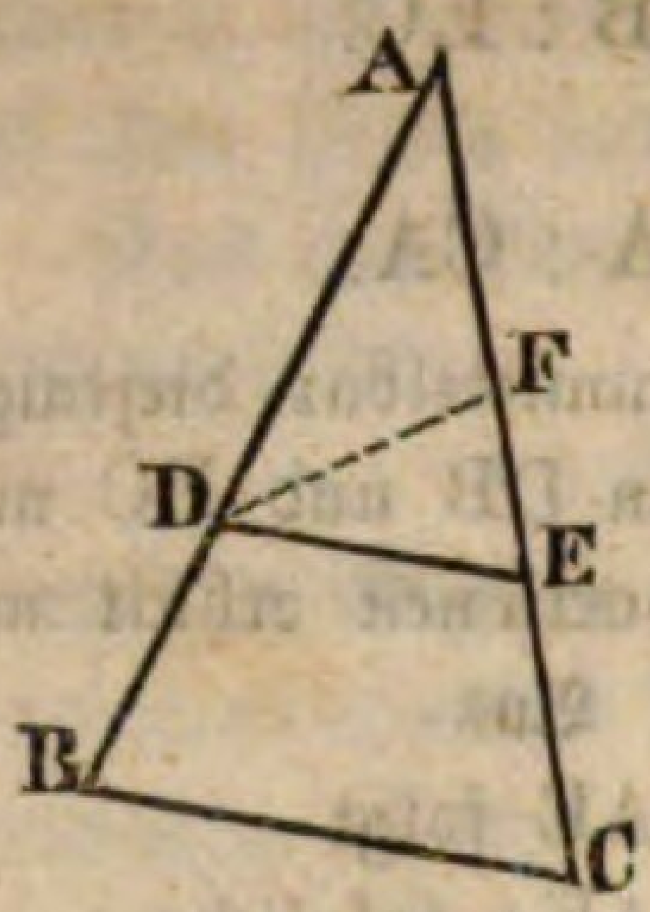
Hieraus, in Verbindung mit der Voraussetzung, folgt:
AX : XC = AE : EC.

Diese Gleichung zeigt einen Widerspruch, den man sofort erkennt, wenn man die mittleren Glieder vertauscht (§. 71.). Es muß also DE ∦ BC sein.

§. 79.
Zusatz.

Es soll noch untersucht werden, ob der Lehrsatz I. Nr. 3. im vorigen §. umgekehrt wahr ist, d. h. ob aus

der **Voraussetzung** DE : BC = DA : BA
die **Behauptung** DE ∦ BC



folgt. — Nehmen wir an, DE wäre nicht parallel BC, so könnte man von D aus eine andere Linie, etwa DF $\parallel$ BC ziehen. Es würde sich dann verhalten

$$DF : BC = DA : BA$$

und aus dieser Proportion ergiebt sich in Verbindung mit der Voraussetzung:

$$DF = DE.$$

Diese Gleichung zeigt aber keinen Widerspruch, da man von D aus sehr wohl zwei gleich lange Linien nach Punkten der Seite AC ziehen kann. Der umgekehrte Satz ist also nicht richtig; es ergiebt sich vielmehr aus dieser Untersuchung, wie man unmittelbar ein ΔABC construiren kann, in welchem zwei von D ausgehende gleich lange Linien zu BC das Verhältniß DA : BA haben. Man construirt ein gleichschenkliges ΔDEF, verlängert EF beliebig bis A, zieht AD und verlängert AD über D beliebig bis B; endlich zieht man BC parallel mit einer der beiden Linien DE oder DF und verlängert diese Linie bis zu ihrem Durchschnittspunkte C mit der Verlängerung der FE über E hinaus. Beide Linien DE und DF entsprechen dann der oben gemachten Voraussetzung, während blos eine von ihnen parallel BC sein kann. Weil aber von D aus nur zwei gleich lange Linien nach Punkten der graden Linie AC gezogen werden können, so folgt, daß nur zwei Linien die Voraussetzung erfüllen können und daß eine von ihnen parallel BC ist, die andere nicht. Die Punkte E und F sind die Durchschnittspunkte einer um D beschriebenen Kreislinie mit der Richtung AC.

Tritt zu der Voraussetzung noch die Bedingung DE > DA hinzu dann muß DE $\parallel$ BC sein, weil dann jene Kreislinie CA nur in ihrer Verlängerung über A hinaus schneiden kann. (Vergl. auch. §. 25. Anmerk.)

§. 80.

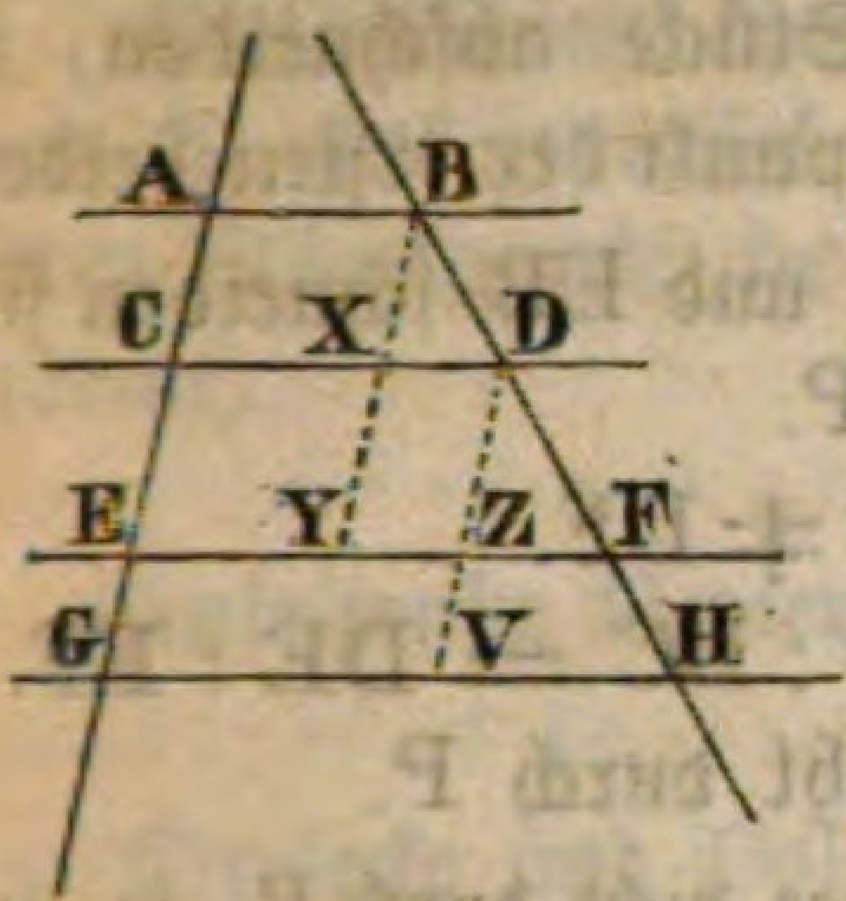
Lehrsätze.

Die vorstehenden Gesetze gestatten eine Erweiterung, wenn man entweder Linien durch mehrere Parallelen, oder parallele Linien durch mehrere von einem Punkt ausgehende Linien schneidet. Diese Sätze mit ihren Umkehrungen sind folgende:

I. Parallele Linien schneiden von sie durchschneidenden Linien proportionale Stücke ab.

Voraussſ. $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$.

Behaupt. $AC : CE : EG = BD : DF : FH$.



Bew. Man ziehe BY und DV parallel AG, so folgt:

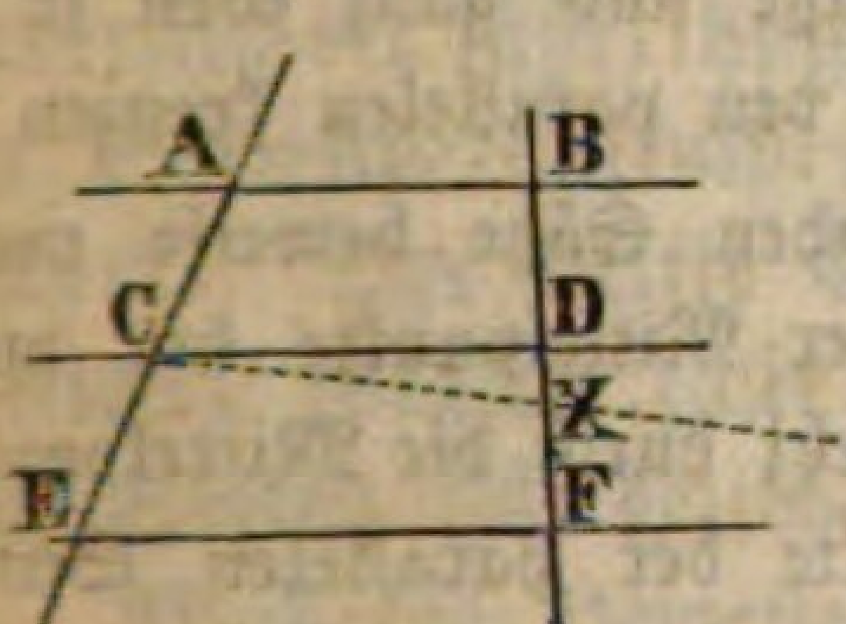
$$BX : XY = BD : DF$$
$$DZ : ZV = DF : FH.$$

Da nun $XY = DZ$ ist, so kann man beide Proportionen als eine laufende Proportion schreiben, und setzt man $BX = AC$, $XY = DZ = CE$, $ZV = EG$, so entsteht die Behauptung.

II. Wenn drei Linien, von welchen zwei parallel sind, von sie durchschneidenden Linien proportionale gleichliegende Stücke abschneiden, so ist auch die dritte Linie den beiden andern parallel.

Vorauss. $AB \parallel EF$ und $AC : CE = BD : DF$.

Behaupt. $CD \parallel AB$.

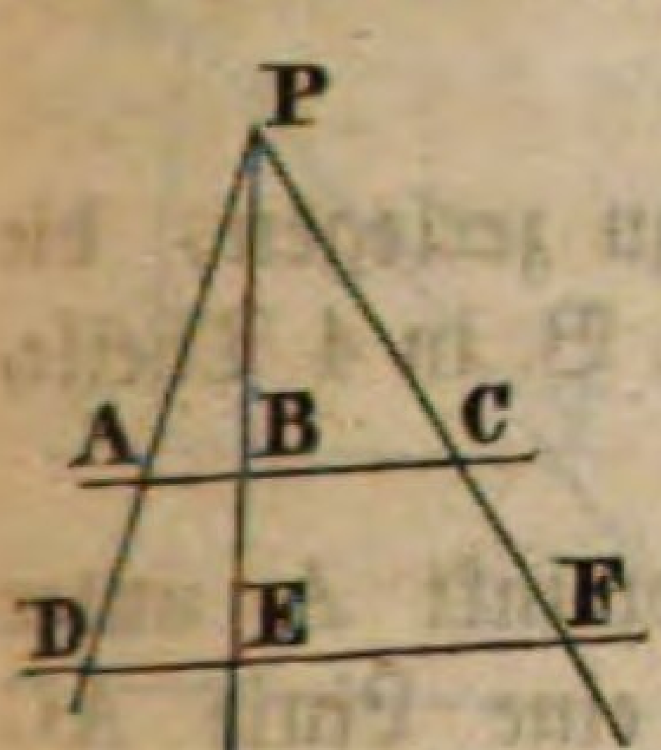


Bew. Gesetzt, CD wäre nicht parallel AB, so ziehe man $CX \parallel AB$. Dann verhält sich $AC : CE = BX : XF$, woraus durch Verbindung mit der Voraussetzung folgt:

$$BX : XF = BD : DF,$$

und diese Proportion zeigt einen Widerspruch (§. 71.).

III. Drei (oder mehr) von einem Punkt ausgehende Linien schneiden von parallelen Linien proportionale Stücke ab.



Vorauss. DA, EB, FC schneiden sich in einem Punkt, und $AC \parallel DF$.

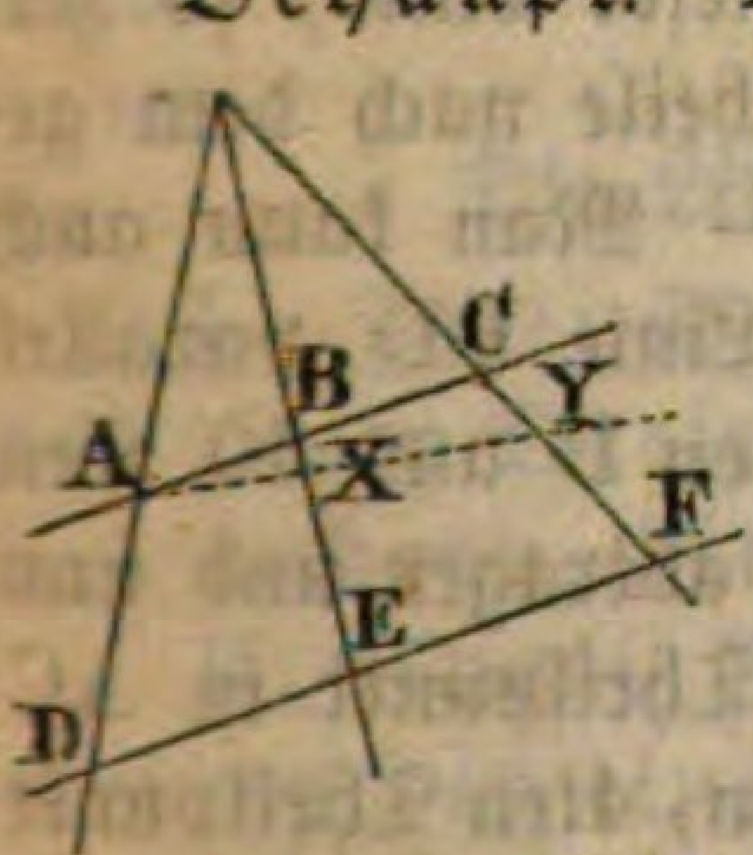
Behaupt. $AB : BC = DE : EF$.

Bew. Die Verhältnisse $AB : DE$ und $BC : EF$ sind einander gleich, weil jedes dem Verhältniß $BP : EP$ gleich ist.

IV. Schneiden drei von einem Punkt ausgehende Linien von sie durchschneidenden Linien proportionale gleichliegende Stücke ab, so sind diese Linien parallel.

Vorauss. DA, EB, FC schneiden sich in einem Punkt, und
$$AB : BC = DE : EF.$$

Behaupt. $AC \parallel DF$.



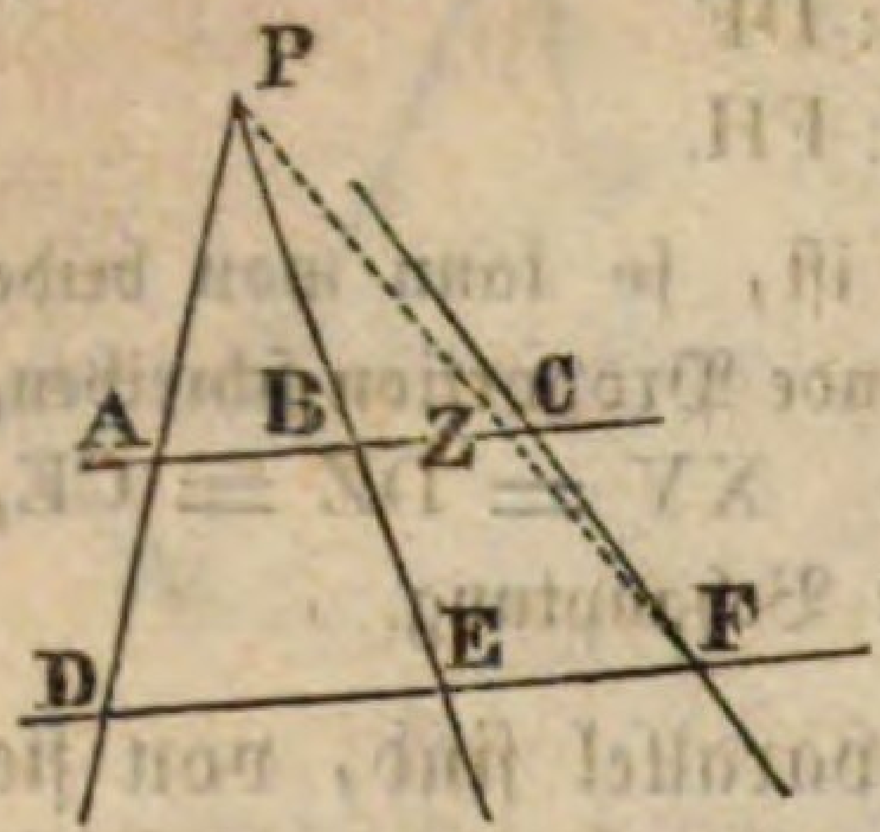
Bew. Gesetzt, es wäre AC nicht parallel DF, so könnte man durch A eine mit DF parallele Linie AY legen. Dann verhält sich (nach III.) $AX : XY = DE : EF$. Hieraus und aus der Voraussetzung folgt aber:

$$AX : XY = AB : BC;$$

daher müßte $BX \parallel CY$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

V. Wenn drei Linien, von welchen zwei sich schneiden, von

parallelen Linien proportionale gleichliegende Stücke abschneiden, so geht die dritte Linie auch durch den Durchschnittspunkt der ersten beiden.



Voraussſ. 1) DA und EB schneiden sich in P.
2) AC $\nparallel$ DF.
3) AB : BC = DE : EF.

Behaupt. FC geht durch P.

Bew. Gesetzt, FC ginge nicht durch P, so ziehe man FP; dann verhält sich:

AB : BZ = DE : EF; nach der Voraussetzung aber
AB : BC = DE : EF;

folglich müßte BZ = BC sein, was nicht möglich ist.

Anmerk. 1. Die Beweise der vorstehenden Sätze sind ganz eben so zu führen, wenn die nicht parallelen Linien sich zwischen den parallelen kreuzen.

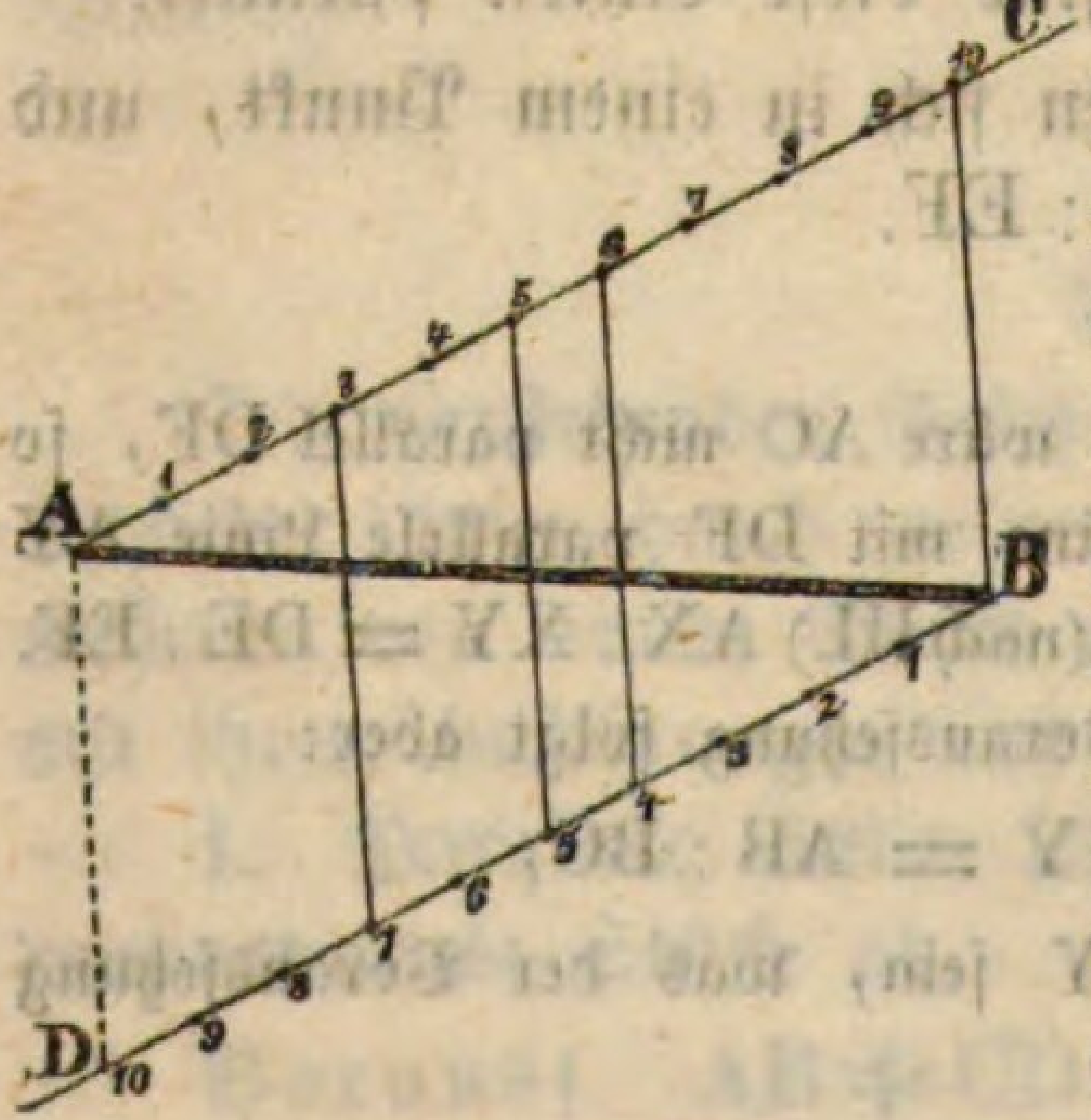
Anmerk. 2. Durch Anwendung der vorstehenden Sätze beweise man: In jedem Paralleltrapez ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten den parallelen Seiten parallel und geht durch die Mittelpunkte der Diagonalen; die Verbindungslinie der Mittelpunkte der parallelen Seiten aber geht gehörig verlängert durch den Durchschnittspunkt der nicht parallelen Seiten.

§. 81.

Aufgabe.

Eine gerade Linie AB in beliebig viele Theile zu zerlegen, die ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben sollen, z. B. in 4 Theile, die sich zu einander verhalten, wie 3 : 2 : 1 : 4.

Auflösung. Man ziehe durch den einen Endpunkt A unter einem beliebigen (nicht flachen) Winkel mit AB eine Linie AC und trage von A aus auf AC 3 + 2 + 1 + 4, d. h. 10 gleiche Theile ab. Verbindet man den letzten Theilpunkt mit B und zieht durch den 3ten, 5ten und 6ten Parallelen mit dieser Linie, so zerlegen sie AB in 4 Theile nach dem gegebenen Verhältniß. — Man kann auch durch B eine zweite Linie BD parallel AC ziehen, auf BD von B aus 10 eben so große gleiche Theile abtragen und nun den 3ten, 5ten, 6ten Theilpunkt in AC mit resp. dem 7ten, 5ten, 4ten Theilpunkt in BD verbinden.



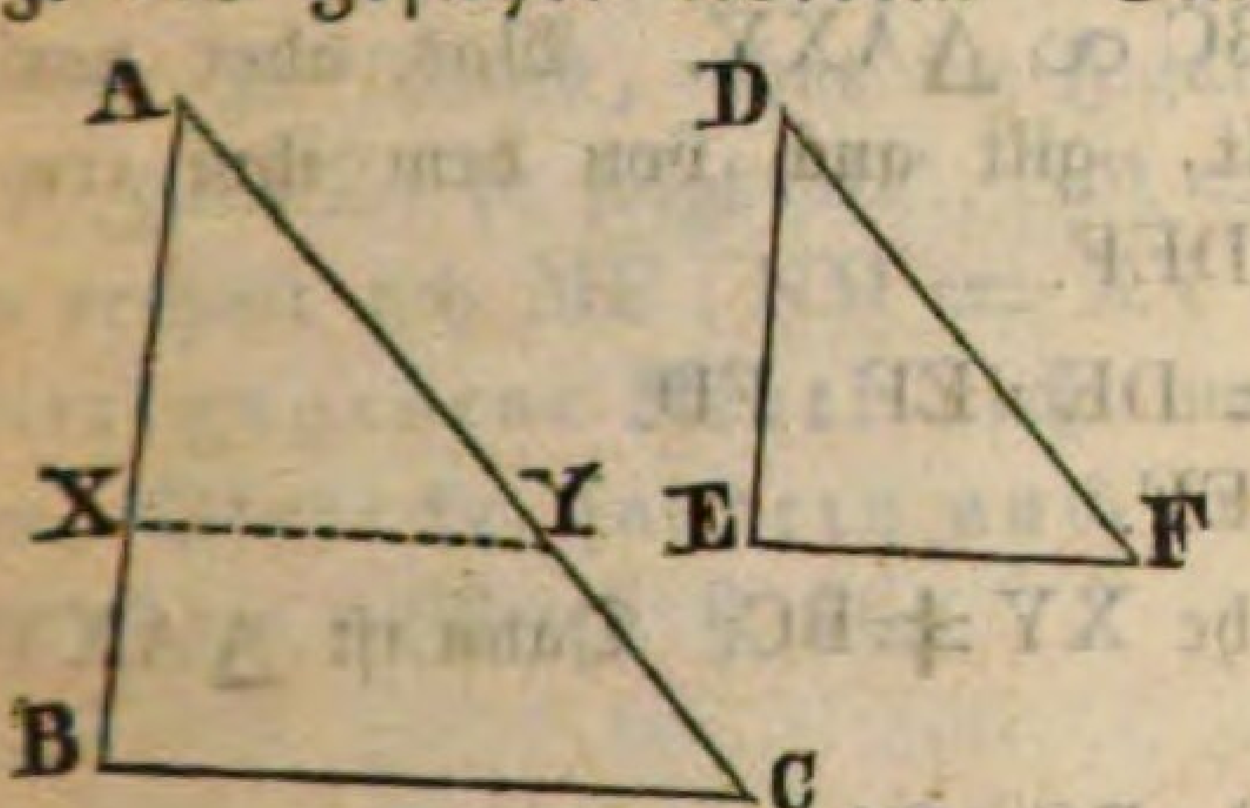
Diese Linien theilen dann AB nach dem gegebenen Verhältniß; denn sie sind parallel der Verbindungslinie des Punktes B mit dem 10ten Theilpunkt in AC (gegenüberliegende Seite im Parallelogramm).

§. 82.

Einleitende Bemerkung zu den Lehrsätzen von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Dreiecke und Polygone waren congruent, wenn sie in den Winkeln und Seiten übereinstimmten; sie sind ähnlich, wenn sie in den Winkeln und Seitenverhältnissen übereinstimmen. Hieraus erklärt es sich, daß die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke aus den Sätzen von der Congruenz derselben dadurch entwickelt werden können, daß man alle Bedingungen, welche sich auf Winkel beziehen, unverändert läßt, hingegen die Gleichheit der Seiten in die Gleichheit der Seitenverhältnisse, also in die Proportionalität der Seiten umändert. Der dritte Congruenz-Satz enthält nur ein Paar gleicher Seiten; folglich fällt bei dem entsprechenden Aehnlichkeits-Satz jede auf Seiten sich beziehende Bedingung fort.

Was die Beweise der Aehnlichkeits-Sätze betrifft, so kann jeder mit Hülfe des entsprechenden Congruenz-Satzes und des Lehrsatzes in §. 77. geführt werden. Sind ABC und DEF die Dreiecke, deren



Aehnlichkeit zu beweisen ist, so suche man das eine, z. B. ΔDEF, so in das andere ΔABC einzutragen, daß es zu diesem die Lage annimmt, wie ΔAXY, so daß XY $\mp$ BC wird. Das Eintragen des ΔDEF in das ΔABC suche man so auszuführen, daß man die Congruenz der $\Delta\Delta$DEF und AXY durch den entsprechenden Congruenz-Satz beweisen kann, und die Aehnlichkeit der $\Delta\Delta$AXY und ABC folgere man aus der Parallelität der Seiten XY und BC, welche entweder unmittelbar aus der Construction hervorgeht, oder bewiesen werden muß.

§. 83.

Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

I. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sich zwei Seiten des einen Dreiecks zu einander verhalten, wie zwei Seiten des andern, die eingeschlossenen Winkel aber gleich sind.

II. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sich die drei Seiten des einen Dreiecks zu einander verhalten, wie die drei Seiten des andern.

III. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel in dem einen Dreieck so groß sind, als in dem andern.

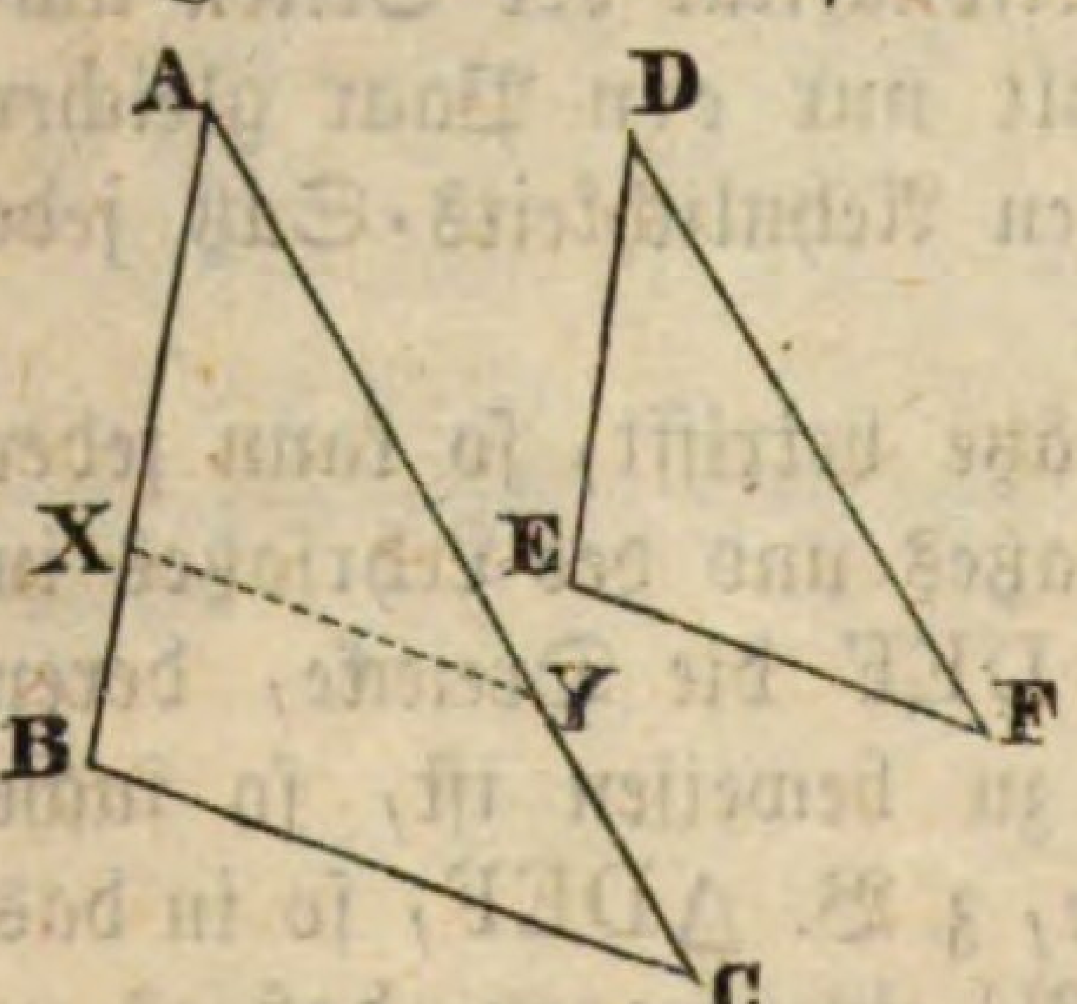
IV. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sich zwei Seiten des einen Dreiecks zu einander verhalten, wie zwei Seiten des andern, wenn die Winkel gleich sind, welche dem einen homologen Seitenpaare gegenüberliegen und wenn die Summe der dem andern homologen Seitenpaare gegenüberliegenden Winkel ungleich 2R ist.

In diesem Satze ist noch als besonderer Fall enthalten:

V. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sich zwei Seiten des einen zu einander verhalten, wie zwei Seiten des andern und wenn noch die Winkel gleich sind, die dem größeren homologen Seitenpaare gegenüber liegen.

Die Beweise dieser Sätze.

Zu I. Voraussf. $AB : AC = DE : DF$ und $\angle A = \angle D$.



Behaupt. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Man mache $AX = DE$, $AY = DF$ und ziehe XY, so ist $\triangle AXY \cong \triangle DEF$ (§. 25., I.).

Aus der Voraussetzung folgt nun: $AB : AC = AX : AY$; folglich ist $XY \parallel BC$; daher $\triangle ABC \sim \triangle AXY$. Was aber vom $\triangle AXY$ gilt, gilt auch von dem ihm congruenten $\triangle DEF$.

Zu II. Voraussf. $AB : BC : CA = DE : EF : FD$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Man mache $AX = DE$ und ziehe $XY \parallel BC$. Dann ist $\triangle AXY \sim \triangle ABC$, folglich verhält sich:

$$AX : XY : YA = AB : BC : CA,$$

daher auch nach der Voraussetzung:

$$AX : XY : YA = DE : EF : FD.$$

Da in dieser laufenden Proportion die ersten Glieder beider Seiten einander gleich sind, so müssen auch die zweiten und auch die dritten einander gleich sein, folglich $\triangle AXY \cong \triangle DEF$ (§. 25., II.).

Zu III. Voraussf. $\angle A = \angle D$ und $\angle B = \angle E$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Man mache $AX = DE$ und ziehe $XY \parallel BC$, so ist

$\triangle AXY \sim \triangle ABC$ und $\triangle AXY \cong \triangle DEF$ (§. 25., III.).

Zu IV. Voraussf. $AB : BC = DE : EF$, $\angle C = \angle F$

und $\angle A + \angle D \gtrless 2R$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Man mache AX = DE und ziehe XY ∦ BC, so ist △AXY ∽ △ABC. Es verhält sich also:

AX : XY = AB : BC, folglich nach der Voraussetzung:

AX : XY = DE : EF.

Da aber AX = DE ist, so folgt XY = EF. Ferner ist ∡XYA = ∡EFD, weil beide gleich ∡C sind, und da noch ∡A + ∡D $\gtrless$ 2R ist, so folgt △AXY ≌ △DEF (§. 25. IV.).

Zu V. Voraussf. AB : BC = DE : EF, ∡C = ∡F und AB > BC, also auch DE > EF.

Behaupt. △ABC ∽ △DEF.

Bew. Die Winkel A und D sind spitz (§. 21. Nr. 4.); folglich ∡A + ∡D < 2R; daher △ABC ∽ △DEF nach dem vorhergehenden Lehrsatze IV.

Anmerk. In ähnlichen Dreiecken sind homologe Seiten proportional. Um aber die homologen Seiten herauszufinden, also die Proportionen, welche aus der Aehnlichkeit folgen, richtig anzusetzen, halte man fest, daß solche Seiten homologe sind, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen. Sind die △△ABC und DEF ähnlich, so ist ferner dringend zu empfehlen, durch die Stellung der Buchstaben in beiden Dreiecken die gleichen Winkel und also auch die homologen Seiten zu markiren. Ist also ∡A = ∡D und ∡B = ∡E, so schreibe man: △ABC ∽ △DEF; wäre aber ∡A = ∡F und ∡B = ∡D, so schreibe man: △ABC ∽ △FDE. Man hat hierdurch auch den Vortheil, Proportionen, welche aus der Aehnlichkeit folgen, richtig bilden zu können, ohne die Figur betrachten zu müssen. Ist z. B. △NMP ∽ △XYZ, so folgt MP : NM = YZ : XY; ist aber △NMP ∽ △ZXY, so verhält sich MP : NM = XY : ZX. — In diesem Lehrbuche ist die hier gegebene Regel nicht nur bei der Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke, sondern auch bei ihrer Congruenz immer beobachtet worden. (Vergl. §. 26.)

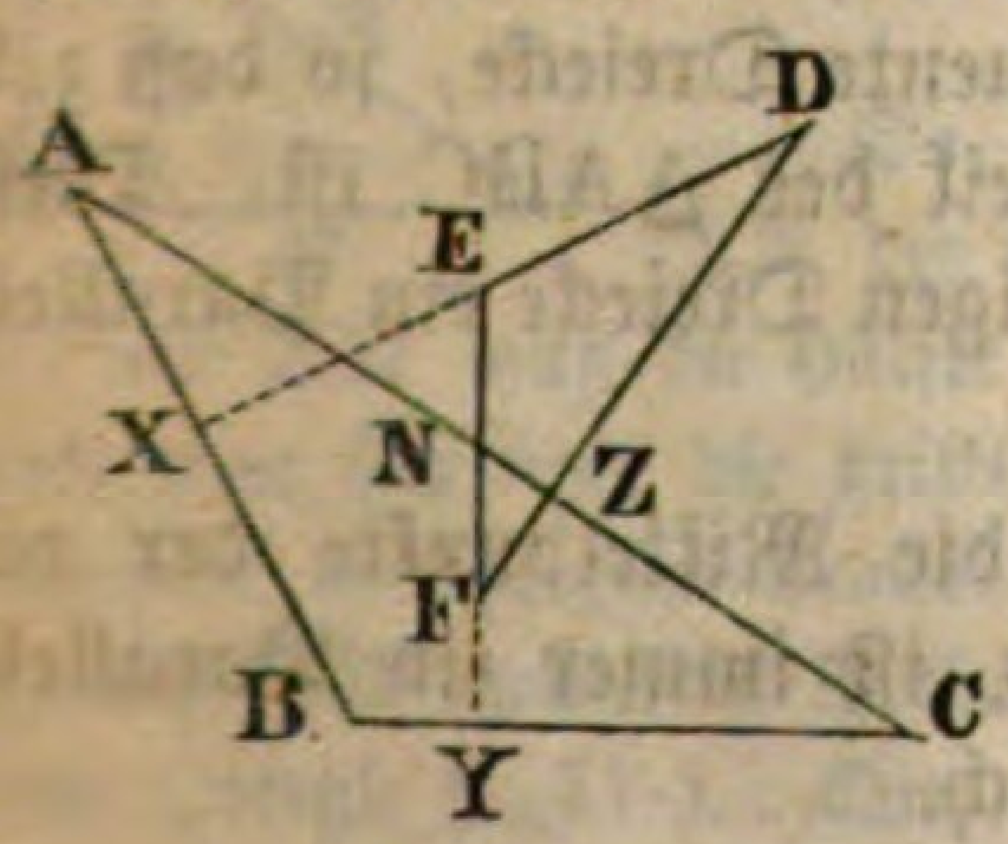
§. 84.

Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen (oder deren Verlängerungen) auf den Seiten des andern (oder ihren Verlängerungen) senkrecht stehen.

Voraussf. DE ⊥ AB, EF ⊥ BC, FD ⊥ CA.

Behaupt. △DEF ∽ △ABC.

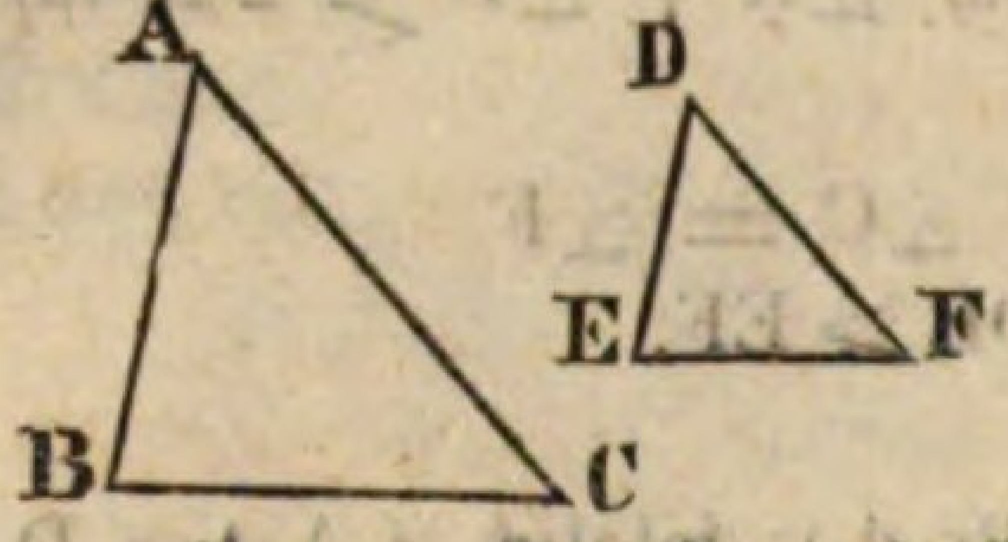


Bew. Es ist ∡DEF = ∡ABC, weil beide den Winkel XEY zu 2R ergänzen, und zwar ∡ABC deshalb, weil im Viereck XBYE die Winkel bei X und Y Rechte sind, also die Summe der beiden andern Winkel = 2R sein muß. Ferner ist ∡EFD = ∡BCA, weil jeder das Complement des Winkels FNZ ist. Es ist also △DEF ∽ △ABC nach §. 83., III.

§. 85.

Lehrsatz.

Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate homologer Seiten, die Umfänge aber, wie diese Seiten selbst.



Vorauss. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beh. 1) $\triangle ABC : \triangle DEF = AB^2 : DE^2$.

2) $AB + BC + CA : DE + EF + FD = AB : DE$.

Bew. Die Dreiecke haben gleiche Winkel, z. B. $\measuredangle A = \measuredangle D$; folglich verhält sich:

$$(1.)\quad \triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF \text{ (§. 69.)}.$$

Setzt man aber folgende Proportionen zusammen:

$$AC : DF = AB : DE \text{ und}$$
$$AB : DE = AB : DE, \text{ so folgt:}$$

$$(2.)\quad AB.AC : DE.DF = AB^2 : DE^2.$$

Aus (1.) und (2.) ergiebt sich der erste Theil der Behauptung. Der zweite Theil folgt unmittelbar aus der laufenden Proportion (vergl. Arithm. §. 47. II.):

$$AB : BC : CA = DE : EF : FD.$$

Anwendungen der Aehnlichkeits-Sätze.

§. 86.

Lehrsätze.

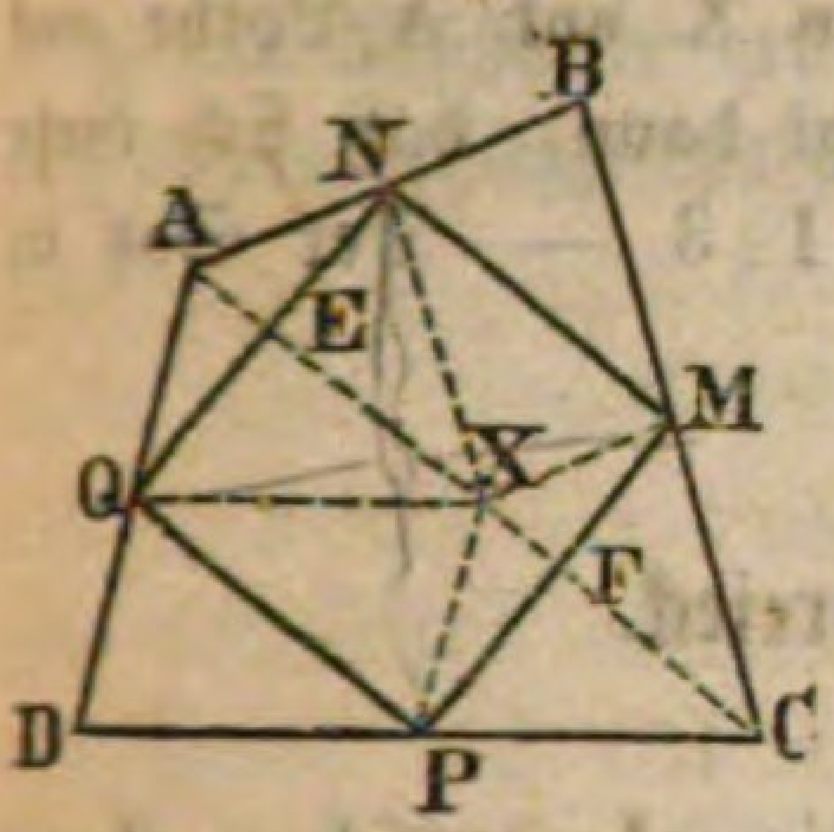
1) Zieht man durch den Mittelpunkt einer Seite eines Dreiecks eine Parallele mit einer der beiden andern Seiten, so halbirt sie die dritte Seite (§. 78.)

2) Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks ist der dritten Seite parallel und der Hälfte dieser dritten Seite gleich.

3) Die drei Verbindungslinien der Mittelpunkte der drei Seiten eines Dreiecks zerlegen dasselbe in 4 congruente Dreiecke, so daß z. B. in der nächsten Figur $\triangle XNM$ der 4te Theil des $\triangle ABC$ ist. Dieses $\triangle XNM$ bildet dann mit jedem der drei übrigen Dreiecke ein Parallelogramm.

4) Ein Viereck NMPQ, dessen Ecken die Mittelpunkte der vier Seiten eines andern Vierecks ABCD sind, ist immer ein Parallelogramm und der Hälfte dieses Vierecks gleich.

Bew. NM und QP sind der Diagonale AC parallel und ihrer Hälfte gleich (Nr. 2.); folglich ist NMPQ ein Parallelogramm (§. 31. Nr. 3.). Verbindet man ferner den Mittelpunkt X der Diagonale AC mit N, M, P und Q, so ist $\# NMFE = 2 . \triangle NMX$ (§. 44. Nr. 2.); folglich ist nach Nr. 3.:



$\# NMFE = \frac{1}{2} . \triangle ABC$, und eben so

$\# QPFE = \frac{1}{2} . \triangle ADC$; hieraus durch Addition:

$\# NMPQ = \frac{1}{2} . \square ABCD.$

Anmerk. Ist auch ABCD ein Parallelogramm, so findet man, wenn man noch die zweite Diagonale BD in Betracht zieht: Ist ABCD ein Quadrat, Rhombus, Rechteck, Rhomboid: so ist NMPQ resp. ein Quadrat, Rechteck, Rhombus, Rhomboid.

5) Die Verbindungslinien der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten jedes Vierecks halbiren sich gegenseitig.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Nr. 4.

§. 87.

Die Transversalen von den Ecken eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten.

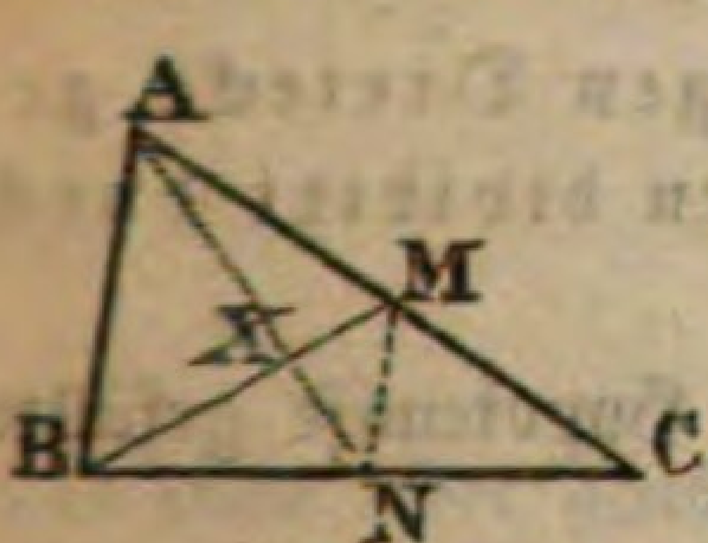
Von diesen Transversalen gelten folgende Gesetze:

1) Jede dieser Transversalen zerlegt jede der beiden andern in zwei Abschnitte, die sich wie 1 : 2 verhalten, d. h. die Transversalen dritteln sich gegenseitig so, daß der einer Ecke anliegende Abschnitt $\frac{2}{3}$ der ganzen Transversale ist, der andere also $\frac{1}{3}$ derselben.

2) Daher schneiden sich die 3 Transversalen in einem Punkt, und die Entfernung desselben von einer Seite ist der dritte Theil der zu dieser Seite gehörigen Höhe.

3) Die drei größeren Abschnitte der drei Transversalen zerlegen das Dreieck in drei gleiche Theile.

Bew. Zieht man zunächst zwei Transversalen AN und BM, die sich in X schneiden mögen, und verbindet N mit M, so ist $\triangle XNM \sim \triangle XAB$; folglich verhält sich:



$$XN : XA = NM : AB \text{ und}$$
$$XM : XB = NM : AB.$$

Da nun NM die Hälfte von AB ist, so muß auch XN die Hälfte von XA, also der dritte Theil von AN sein, und XM muß die Hälfte von XB, also der dritte Theil von BM sein. — Denkt man sich noch die dritte Transversale gezogen, so muß, weil das eben Bewiesene von je zwei Transversalen gilt, diese dritte Transversale sowohl AN, als auch BM nach dem Verhältniß 1 : 2 theilen; sie muß also auch durch X gehen (vergl. §. 71.). Die drei Transversalen schneiden sich daher in einem

Punkt. — Um zu beweisen, daß die Entfernung des Punktes X von BC der dritte Theil der Höhe auf BC ist, denke man sich von X und A Lothe auf BC gefällt. Aus ähnlichen Dreiecken (§. 83. III.) folgt dann, daß sich diese Lothe zu einander wie XN : AN verhalten, d. h. wie 1 : 3. — Der Satz in Nr. 3. ergiebt sich unmittelbar aus §. 74. Nr. 2.

§. 88.

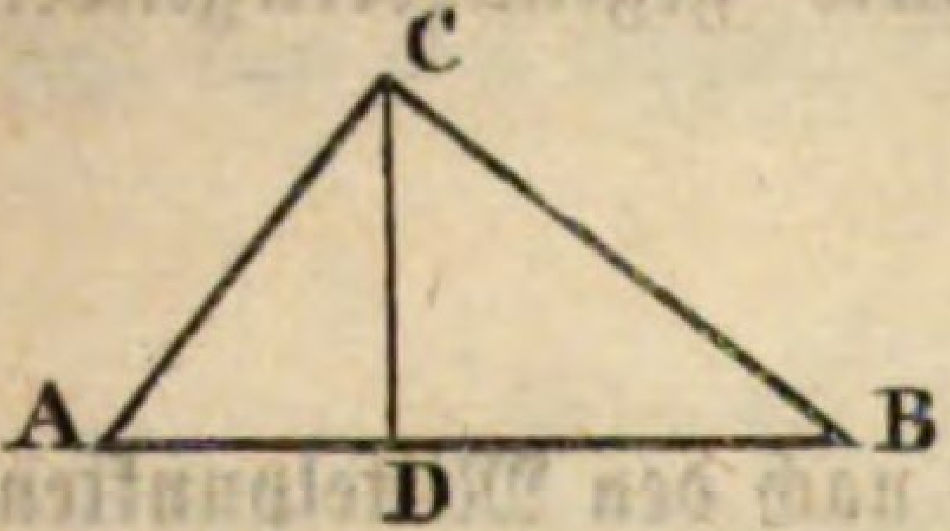
Proportionen im rechtwinkligen Dreieck.

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist

1) jede Kathete mittlere geometrische Proportionale zwischen ihrer Projection auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse;

2) die auf die Hypotenuse gefällte Höhe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Vorauss. $\measuredangle ACB = R$ und $CD \perp AB$.



Behaupt. 1) $AD : AC = AC : AB$.
und $BD : BC = BC : BA$.
2) $AD : DC = DC : DB$.

Bew. Die Höhe zerlegt das rechtwinklige $\triangle ABC$ in zwei Dreiecke, welche dem ganzen Dreieck und auch einander ähnlich sind; denn es ist aus Gleichheit der Winkel

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD.$$

Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Anmerk. 1. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ACD folgt auch noch

$$AB : BC = AC : CD,$$

d. h. die Höhe CD ist die vierte Proportionale zu den drei Seiten des $\triangle ABC$. Dasselbe Gesetz ergiebt sich auch, wenn man den doppelten Inhalt des $\triangle ABC$ zweimal ausdrückt:

$$AB \times CD = AC \times BC.$$

Hieraus, oder aus der Proportion oben, folgt:

$$CD = \frac{AC \times BC}{AB}.$$

Der Leser möge sich dieses häufig in Anwendung kommende Gesetz merken; es heißt:

Die auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gefällte Höhe ist gleich dem Product der Katheten dividirt durch die Hypotenuse.

Sind also a und b die Katheten, so ist die auf die Hypotenuse gefällte Höhe gleich $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Anmerk. 2. Aus den beiden Proportionen, welche der Lehrsatz oben in seiner Behauptung unter Nr. 1. enthält, folgt noch $AD = \frac{AC^2}{AB}$ und $BD = \frac{BC^2}{AB}$; folglich verhält sich:

$$AD : BD = AC^2 : BC^2,$$

d. h. die Abschnitte der Hypotenuse verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der ihnen anliegenden Katheten.

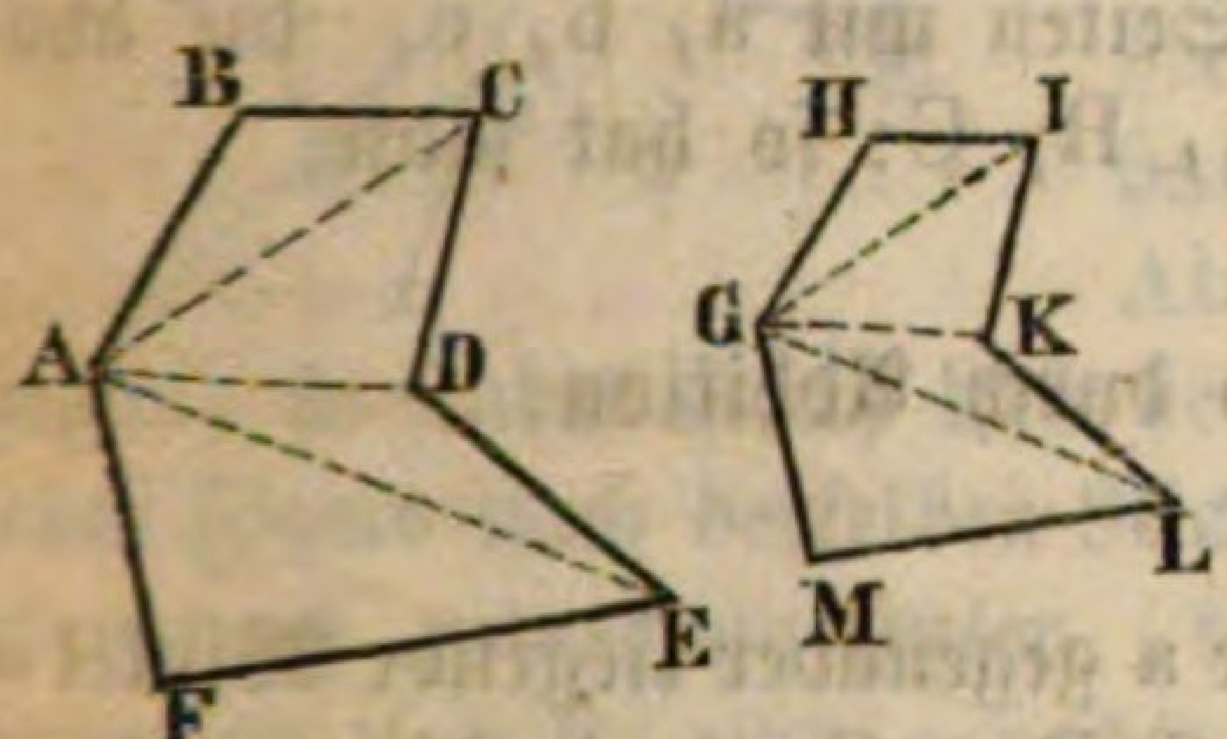
Aehnliche Vielecke.

§. 89.

Lehrsatz.

Aehnliche Vielecke werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt. — Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen, die Umfänge aber, wie solche Seiten oder Diagonalen selbst.

Bew. ABCDEF und GHIKLM mögen die ähnlichen Vielecke sein, und die Diagonalen AC, AD, AE resp. den Diagonalen GI, GK, GL homolog; dann verhält sich



$$AB : BC = GH : HI,$$

und weil auch $\measuredangle B = \measuredangle H$ ist, so folgt $\triangle ABC \sim \triangle GHI$. — Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt $\measuredangle BCA = \measuredangle HIG$, und zieht man diese Winkel von den nach der Voraussetzung gleichen Winkeln BCD und HIK ab, so bleibt:

$$(1.) \quad \measuredangle ACD = \measuredangle GIK.$$

Ferner verhält sich $AC : GI = BC : HI = CD : IK$, oder

$$(2.) \quad AC : CD = GI : IK.$$

Aus (1.) und (2.) folgt $\triangle ACD \sim \triangle GIK$; u. s. w.

Ferner verhalten sich die ähnlichen Dreiecke, in welche die Vielecke zerlegt sind, zu einander, wie die Quadrate homologer Seiten. Solche Seiten sind aber in Bezug auf die Vielecke entweder auch homologe Seiten, oder homologe Diagonalen; in beiden Fällen kann man für das Verhältniß ihrer Quadrate das Verhältniß der Quadrate zweier anderen homologen Seiten der Vielecke setzen und erhält so:

$$\triangle ABC : \triangle GHI = AB^2 : GH^2$$
$$\triangle ACD : \triangle GIK = AB^2 : GH^2$$
$$\triangle ADE : \triangle GKL = AB^2 : GH^2$$
$$\triangle AEF : \triangle GLM = AB^2 : GH^2.$$

Hat man aber gleiche Verhältnisse, so hat die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wieder dasselbe Verhältniß (Arithm. §. 44.); daher entsteht durch Addition der entsprechenden Dreiecke:

$$ABCDEF : GHIKLM = AB^2 : GH^2.$$

Der letzte Theil des Satzes folgt unmittelbar aus der laufenden Proportion

$$AB : BC : CD : \text{u. s. w.} = GH : HI : IK : \text{u. s. w.}$$

§. 90.

Zusatz.

Auch ähnliche Dreiecke lassen sich wieder in ähnliche Dreiecke zerlegen, namentlich durch homologe Höhen, durch die Halbirungslinien gleicher Winkel, durch die Transversalen von homologen Ecken nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten u. s. w. Die Beweise sind leicht. — Daher verhalten sich auch in ähnlichen Dreiecken homologe Seiten wie homologe Höhen, ihre Inhalte wie die Quadrate solcher Höhen, u. s. w.

§. 91.

Eine Erweiterung des Pythagoreischen Lehrsatzes.

Denkt man sich über die drei Seiten eines Dreiecks ähnliche Figuren construirt, aber so, daß diese Seiten in den ähnlichen Figuren homologe werden, bezeichnet man die Seiten mit a, b, c, die ähnlichen Figuren aber entsprechend mit A, B, C: so hat man

$B : A = b^2 : a^2$ und

$C : A = c^2 : a^2$, folglich durch Addition:

$B + C : A = b^2 + c^2 : a^2$.

Hieraus folgt nun: Ist der der Seite a gegenüber liegende Winkel α ein rechter, also $b^2 + c^2 = a^2$, so muß $B + C = A$ sein, und ist umgekehrt $B + C = A$, so folgt $b^2 + c^2 = a^2$, also $\alpha = R$.

Der Pythagoreische Lehrsatz (und seine Umkehrung) gilt also nicht allein für die über die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks construirten Quadrate, sondern allgemein für ähnliche Figuren, nur müssen die Seiten des Dreiecks in diesen Figuren homologe Seiten sein.

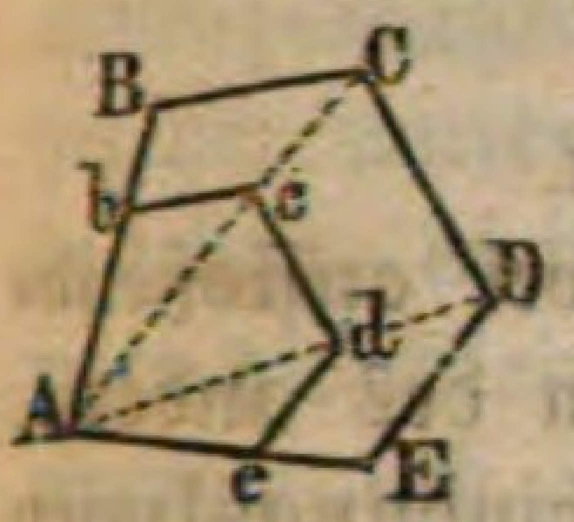
§. 92.

Aufgabe.

Ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen Vieleck ähnlich ist.

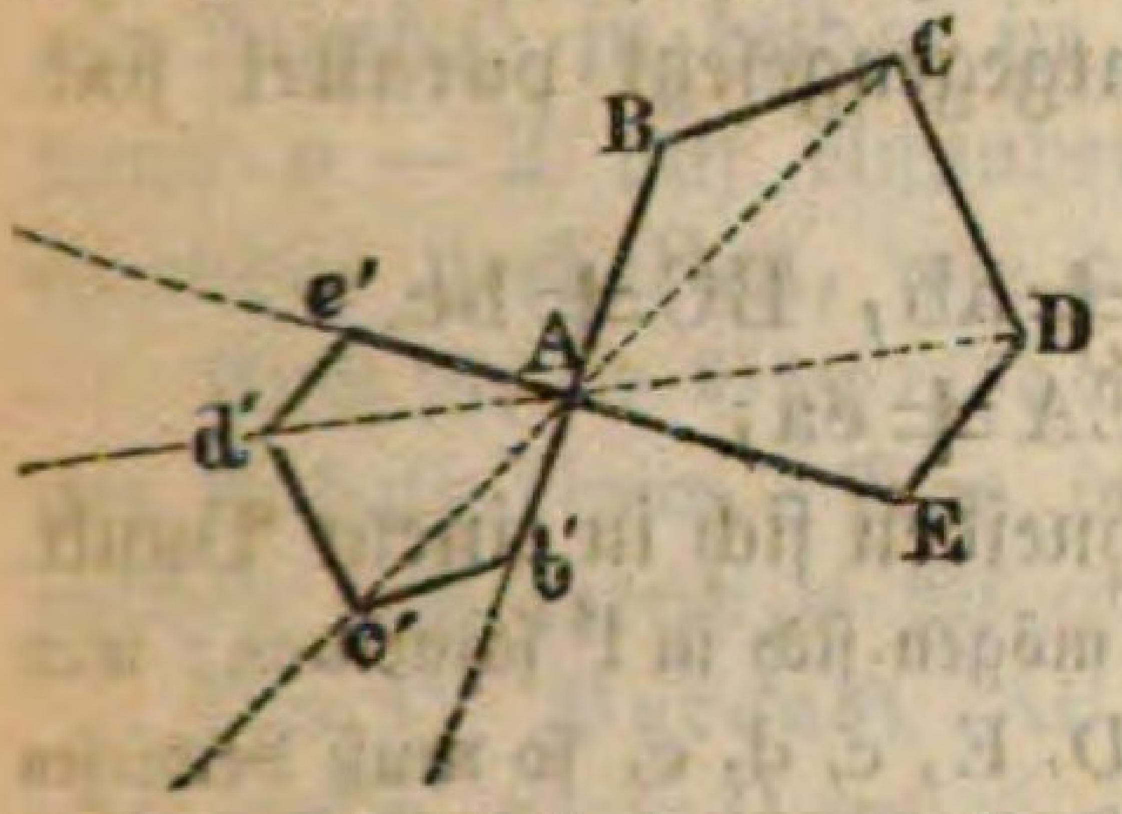
Auflösung. Die Auflösung kann zunächst dadurch geschehen, daß man das gegebene Vieleck durch alle von einer Ecke ausgehenden Diagonalen in Dreiecke zerlegt und nun das zu construirende Vieleck aus Dreiecken zusammensetzt, welche jenen Dreiecken ähnlich sind und sich eben so, wie jene, an einander anschließen. Aehnliche Dreiecke sind aber aus der Eigenschaft der Gleichheit ihrer Winkel leicht zu zeichnen. Man würde eine Seite des ersten Dreiecks beliebig lang machen (also auch ihr eine vorgeschriebene Länge geben können); für jedes folgende Dreieck hätte man dann aus dem vorhergehenden schon eine Seite.

Am einfachsten wird die Construction, wenn man das zu construirende Vieleck in das gegebene einzeichnet. Soll z. B. in das



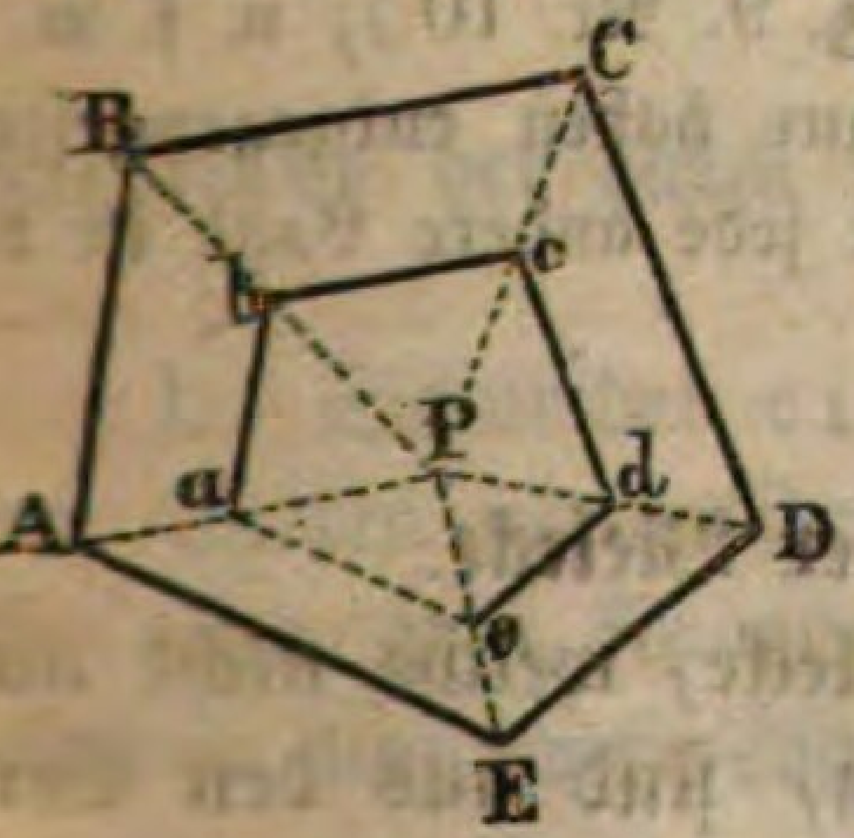
Fünfeck ABCDE ein ihm ähnliches eingezeichnet werden, so ziehe man von einer Ecke (A) aus die Diagonalen, wähle den Punkt b beliebig in AB und ziehe nun bc ⫩ BC, cd ⫩ CD und de ⫩ DE: so ist Fünfeck Abcde ∾ ABCDE. — Die Winkel beider Figuren sind der parallelen Schenkel wegen gleich, und die Proportionalität der Seiten findet Statt, weil das Verhältniß je zweier homologen Seiten einem der gleichen Verhältnisse Ac : AC oder Ad : AD gleich ist.

Zusatz 1. Man kann auch die Diagonalen und die der Ecke A anliegenden Seiten über A verlängern und zwischen die Verlängerungen die Parallelen legen. Es wird dann ebenfalls Fünfeck Ab'c'd'e' ∾ ABCDE. Der Beweis ist dem obigen analog.



Achtet man aber noch auf die besondere Lage, welche Ab'c'd'e' zu ABCDE hat, im Gegensatz zu der Lage des Fünfecks Abcde zu ABCDE in der vorhergehenden Figur, so findet man, daß homologe Endpunkte homologer Seiten in jener Figur nach derselben Richtung hin auf einander folgen, in dieser aber nach entgegengesetzter. Nehmen wir z. B. BC und bc, so liegt C rechts von B, und c rechts von b in jener Figur; betrachten wir aber BC und b'c' in dieser Figur: so liegt C rechts von B, hingegen c' links von b'. Diese zwei Lagen unterscheiden wir dadurch von einander, daß wir sagen: jene Figur zeigt (in ABCDE und Abcde) *ähnliche Figuren mit gleichlaufend-parallelen Seiten*; hingegen zeigt die letzte Figur (in ABCDE und Ab'c'd'e') *ähnliche Figuren mit entgegengesetzt-parallelen Seiten* (§. 14.).

Zusatz 2. Endlich kann man noch einen beliebigen Punkt P innerhalb, oder außerhalb des Fünfecks ABCDE mit *allen* Ecken verbinden und nun Linien, welche mit den Seiten des Fünfecks parallel sind, entweder zwischen diese Linie, oder zwischen die Verlängerungen aller über P hinaus legen, die dann wieder ein dem Fünfeck ähnliches resp. mit gleichlaufenden parallelen, oder mit entgegengesetzt parallelen Seiten erzeugen. Wählt man also in PA den Punkt



a beliebig, zieht ab ⫩ AB, bc ⫩ BC, cd ⫩ CD, de ⫩ DE und verbindet zuletzt noch e mit a: so wird auch ea ⫩ EA, und abcde ∾ ABCDE. Nach der Construction hat man die gleichen Verhältnisse Pa : PA = Pb : PB = Pc : PC = Pd : PD = Pe : PE. Aus Pa : PA = Pe : PE folgt aber ea ⫩ EA. Die Aehnlichkeit der Fünfecke ergiebt sich jetzt ganz wie oben.

§. 93.

Die Aehnlichkeitspunkte ähnlicher Figuren.

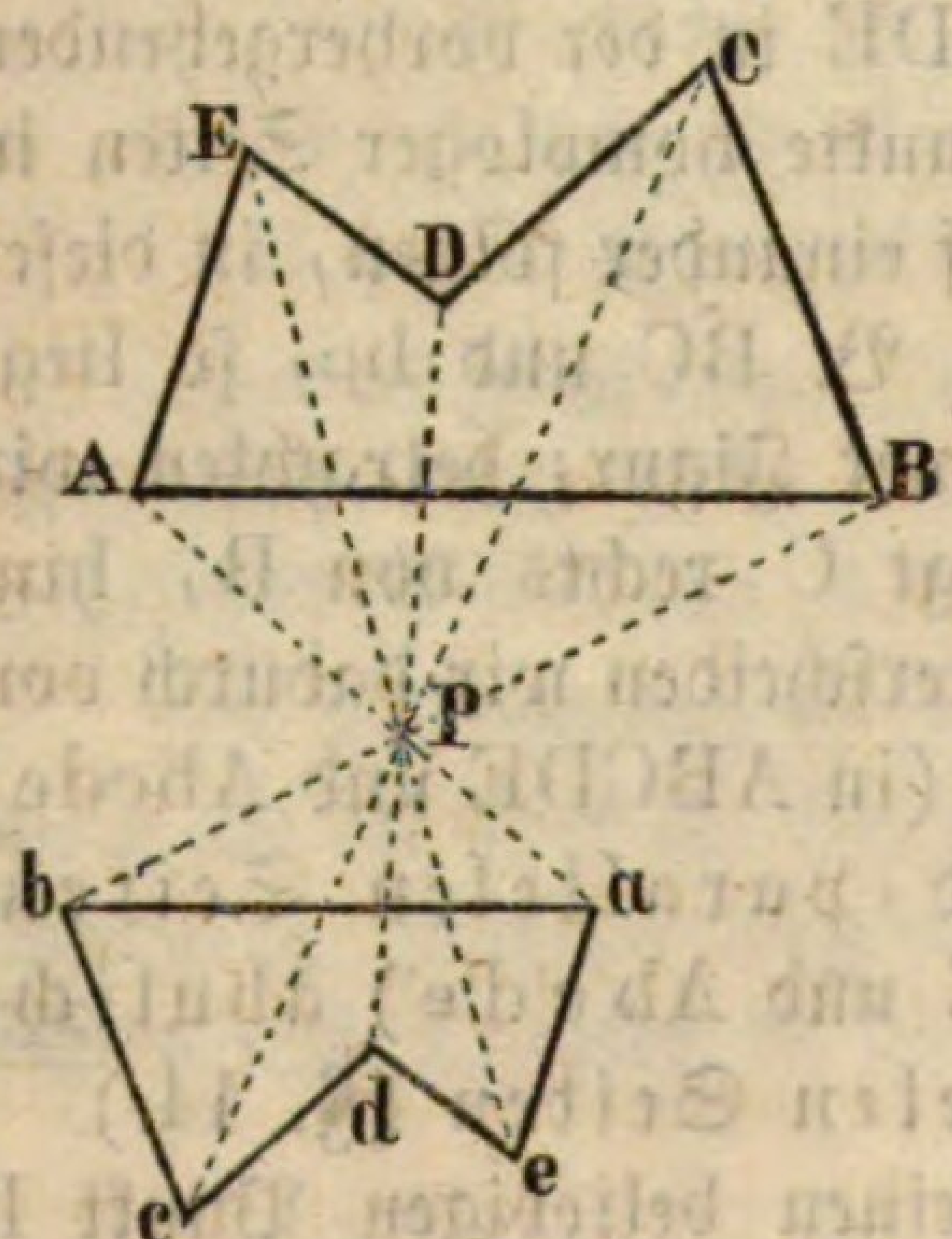
Sind zwei Dreiecke oder Vielecke ähnlich, und zwei anstoßende Seiten des einen parallel den ihnen homologen Seiten des andern: so sind alle homologen Seiten parallel, und die Verbindungslinien homologer Ecken schneiden sich dann sämmtlich in einem Punkt, welcher der **Aehnlichkeitspunkt** der Vielecke für diese Lage genannt wird. Dieser Aehnlichkeitspunkt liegt in der Verlängerung der erwähnten Verbindungslinien, wenn die homologen Seiten gleichlaufend-parallel sind; hingegen liegt er in den Linien selbst (die sich dann in ihm kreuzen), wenn die homologen Seiten entgegengesetzt-parallel sind. (Vergl. §. 92. Zusatz 1.)

Voraussf. $ABCDE \sim abcde$; $AB \# ab$, $BC \# bc$.

Behaupt. $CD \# cd$, $DE \# de$, $EA \# ea$;

Aa, Bb, Cc, Dd, Ee schneiden sich in einem Punkt.

Bew. Man ziehe Aa und Bb; diese Linien mögen sich in P schneiden; man verbinde P mit C, D, E, c, d, e, so muß bewiesen werden, daß CPc, DPd, EPe gerade Linien sind.



Zunächst ist $\triangle PAB \sim \triangle Pab$, woraus folgt:

$$BA : ba = BP : bP.$$

Setzt man nun statt des Verhältnisses $BA : ba$ das nach der Voraussetzung ihm gleiche Verhältniß $BC : bc$, so folgt, weil noch die Winkel PBC und Pbc als Wechselwinkel gleich sind, aus §. 83. I.:

$$\triangle PBC \sim \triangle Pbc.$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke ergiebt sich die Gleichheit der Winkel BPC und bPc, und da BPb eine gerade Linie ist, so muß nach §. 9. Nr. 10. auch CPc eine solche sein.

Man kann jetzt zu den $\triangle\triangle PCD$ und Pcd übergehen und ihre Aehnlichkeit beweisen. Die Verhältnisse $CD : cd$ und $CP : cP$ sind einander gleich, weil beide dem Verhältniß $BC : bc$ gleich sind; da aber auch $\measuredangle PCD = \measuredangle Pcd$ ist, als Differenzen gleicher Winkel, so folgt

$$\triangle PCD \sim \triangle Pcd.$$

Es ist jetzt $CD \# cd$, wegen der gleichen Winkel bei C und c; auch ist CPc eine gerade Linie, wegen der gleichen Winkel bei P (§. 9. Nr. 10.); u. s. w.

Die Fünfecke in der zum Beweise benutzten Figur haben entgegengesetzt-parallele Seiten und P ist ihr Aehnlichkeitspunkt; für jede andere Lage ist der Beweis analog zu führen.

§. 94.

Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Vielecke.

Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Vielecke, welche nicht aus einer besondern Lage dieser Figuren entspringen, sind aus den Con-

gruenz-Sätzen auf dieselbe Weise herzuleiten, wie dies für Dreiecke gelehrt wurde (§. 82.). Die Bedingungen, welche sich auf Winkel beziehen, bleiben unverändert; an die Stelle der Gleichheit der Seiten tritt die Gleichheit der Seitenverhältnisse. Die einfachsten dieser Sätze ergeben sich aus §. 39. und heißen:

1) Zwei n-Ecke sind ähnlich, wenn n — 1 Seiten des einen sich zu einander verhalten, wie n — 1 Seiten des andern in derselben Ordnung, und wenn die von diesen Seiten eingeschlossenen n—2 Winkel beider Figuren in derselben Ordnung bezüglich einander gleich sind.

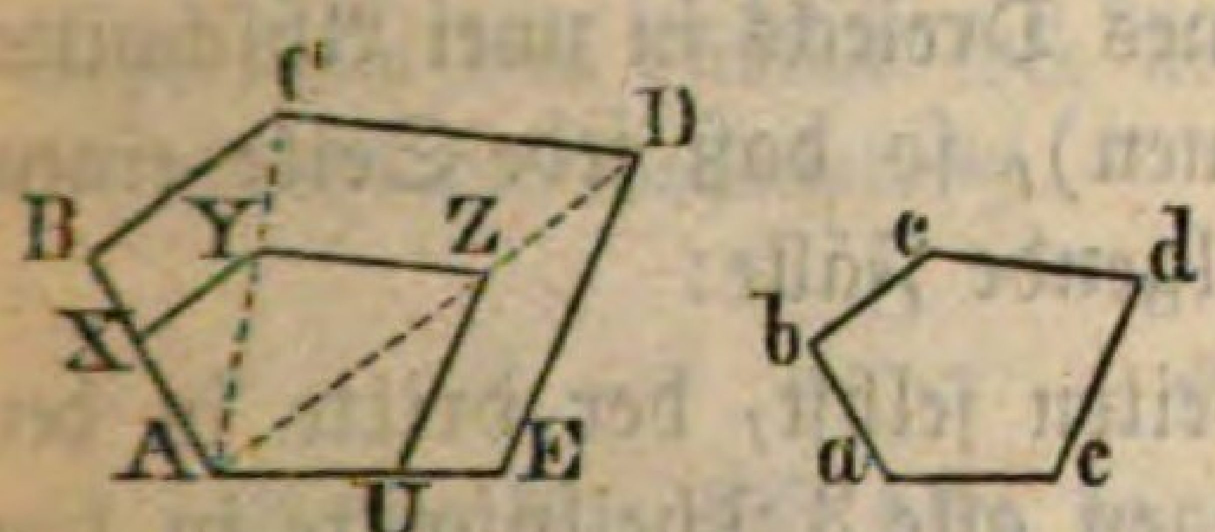
2) Zwei n-Ecke sind ähnlich, wenn n — 1 Winkel (also auch alle Winkel) in beiden in derselben Ordnung einander gleich sind und wenn n — 2 auf einander folgende Seiten der einen Figur sich zu einander verhalten, wie die gleichliegende n — 2 Seiten der andern.

Auch für die Beweise dieser Sätze kann das hierüber von Dreiecken Gesagte zum Anhalt dienen. Man sucht in das eine n-Eck ein ähnliches einzutragen, welches dem andern n-Eck congruent ist.

Zu 1) Voraussetz. AB : BC : CD : DE = ab : bc : cd : de; ∡B = ∡b; ∡C = ∡c, ∡D = ∡d.

Behaupt. ABCDE ∾ abcde.

Bew. Man mache AX = ab, ziehe von A aus alle Diagonalen und nun XY ∥ BC, YZ ∥ CD, ZU ∥ DE; so ist AXYZU ∾ ABCDE. Hieraus und aus der Voraussetzung folgt: AX : XY : YZ : ZU = ab : bc : cd : de; und weil AX = ab ist, folgt XY = bc, YZ = cd, ZU = de. Ferner folgt ∡X = ∡b, ∡Y = ∡c, ∡Z = ∡d, weil diese Winkel resp. den Winkeln B, C, D gleich sind. Daher ist AXYZU ≌ abcde (§. 39. Nr. 1.), also auch abcde ∾ ABCDE.



Eben so ist der Beweis zu Nr. 2. zu führen.

Anmerk. Von Parallelogrammen ist anzuführen: Quadrate sind immer ähnlich; Rhomben, wenn sie ein Paar gleicher Winkel haben; Rechtecke aus Proportionalität zweier zusammenstoßenden Seiten; Rhomboiden aus Proportionalität zweier zusammenstoßenden Seiten und Gleichheit der eingeschlossenen Winkel.

Transversalen und harmonische Theilung.

§. 95.

Hauptfälle der durch Transversalen erzeugten Abschnitte der drei Seiten eines Dreiecks.

I. Schneidet eine Transversale (§. 67.) die Richtungen aller drei Seiten eines Dreiecks, so daß sie also mit keiner Seite parallel ist, und geht sie auch nicht durch eine Ecke des Dreiecks, so unterscheiden wir zwei Lagen (Fig. in §. 96.):

1) Die Transversale schneidet zwei Seiten (zwischen Ecken des Dreiecks) und die Verlängerung der dritten Seite. In diesem Falle wird die dritte Seite in zwei äußere Abschnitte zerlegt, und jede der beiden anderen in zwei innere Abschnitte.

2) Die Transversale schneidet die Verlängerungen aller drei Seiten. In diesem Falle wird jede Seite in zwei äußere Abschnitte zerlegt.

Eine andere Lage ist nicht denkbar.

II. Schneiden sich drei von den drei Ecken aus gezogene Transversalen in einem Punkt, ist keine Transversale einer Seite parallel und liegt jener Punkt auch nicht in der Richtung einer Seite, so unterscheiden wir wieder zwei Lagen (Fig. in §. 97.):

1) Der Durchschnittspunkt der 3 Transversalen liegt innerhalb des Dreiecks. In diesem Falle wird jede Seite in zwei innere Abschnitte zerlegt.

2) Der Durchschnittspunkt der drei Transversalen liegt außerhalb des Dreiecks. In diesem Falle wird eine Seite in zwei innere Abschnitte, jede der beiden andern in zwei äußere Abschnitte zerlegt.

Ein anderer Fall ist nicht denkbar.

III. Umgekehrt: Ist jede Seite eines Dreiecks in zwei Abschnitte zerlegt (die innere oder äußere sein können), so daß jede Seite einen Theilpunkt hat, so unterscheiden wir folgende Fälle:

1) Liegen zwei Theilpunkte in den Seiten selbst, der dritte in der Verlängerung einer Seite; oder liegen alle 3 Theilpunkte in den Verlängerungen der Seiten: so können die 3 Theilpunkte in einer geraden Linie liegen; hingegen können die Verbindungslinien der Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken sich nicht in einem Punkt schneiden.

2) Liegen alle 3 Theilpunkte in den Seiten selbst; oder liegt ein Theilpunkt in einer Seite, die beiden andern in den Verlängerungen der beiden andern Seiten: so können die Verbindungslinien der Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken sich in einem Punkt schneiden; hingegen können die 3 Theilpunkte nicht in einer geraden Linie liegen.

Auf diese verschiedenen Lagen beziehen sich die folgenden Lehrsätze.

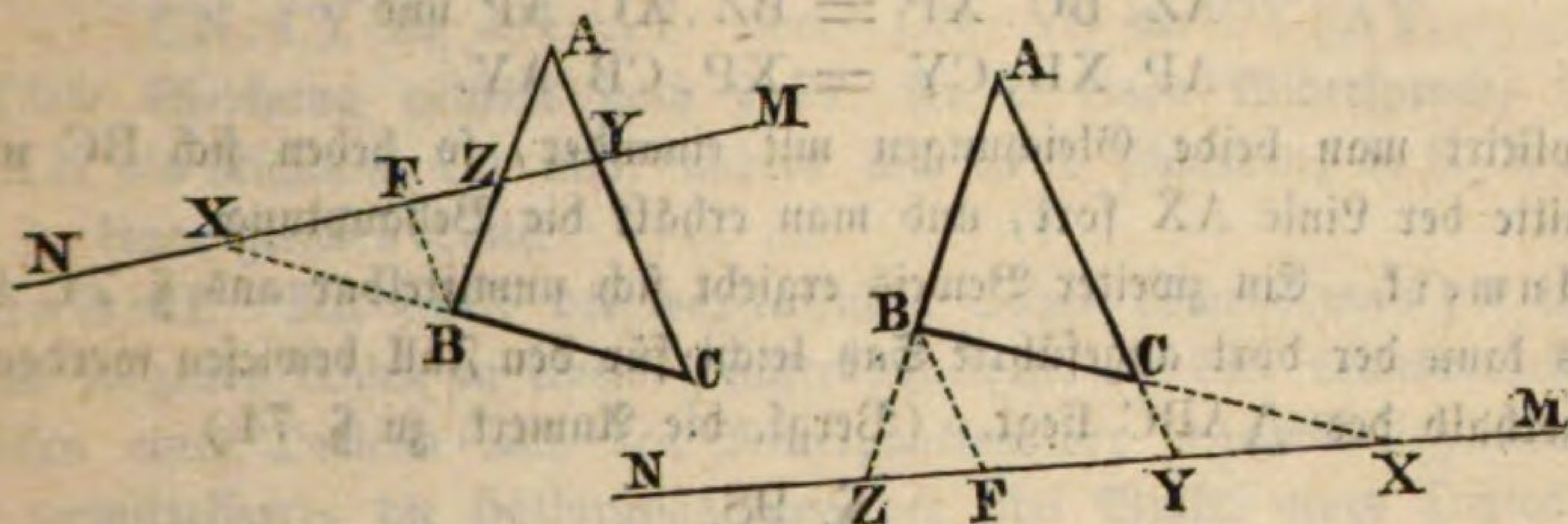
§. 96.

Lehrsatz.

Jede Transversale NM, welche die drei Seiten eines Dreiecks ABC schneidet (in X, Y, Z), zerlegt jede Seite so in zwei Abschnitte,

daß das Product dreier nicht in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Abschnitte gleich dem Product der drei übrigen ist (die dann ebenfalls in ihren Endpunkten nicht zusammenstoßen).

Behaupt. AZ.BX.CY = BZ.CX AY.



Bew. Zieht man durch eine beliebige Ecke des $\triangle$ABC, z. B. durch B, eine Parallele BF mit der gegenüberliegenden Seite und verlängert sie bis zu ihrem Durchschnittspunkte F mit NM, so erhält man zwei Paar ähnlicher Dreiecke:

$$\triangle AZY \sim \triangle BZF \text{ und } \triangle XCY \sim \triangle XBF.$$

Aus diesen ähnlichen Dreiecken ergiebt sich:

$$AZ : BZ = AY : BF$$
$$CY : CX = BF : BX$$

Setzt man diese Proportionen zusammen, so folgt:

$$AZ.CY : BZ.CX = AY : BX.$$

Setzt man das Product der äußeren Glieder dem Product der inneren gleich, so entsteht die Behauptung.

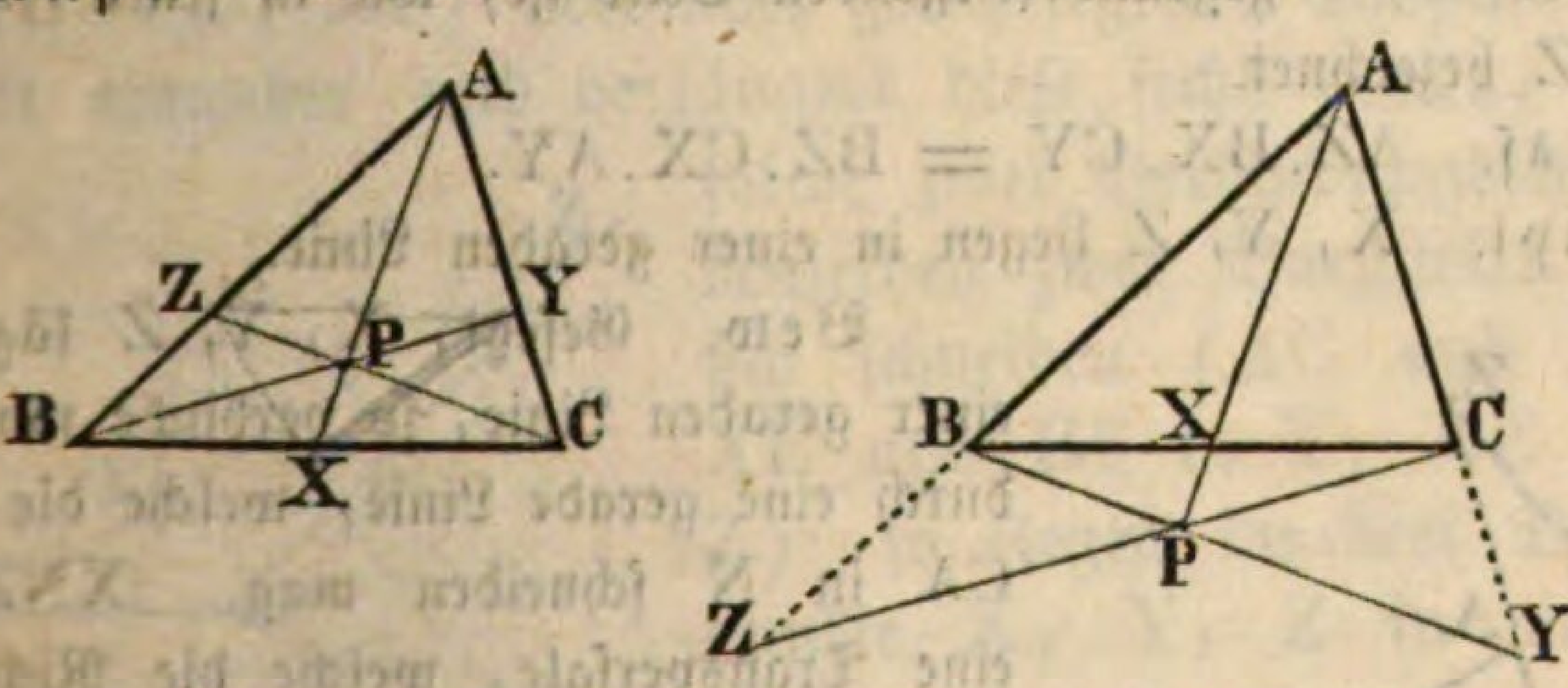
§. 97.

Lehrsatz.

Schneiden sich drei durch die drei Ecken eines Dreiecks gehenden Transversalen in einem Punkt (der innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegen kann), so wird jede Seite so in zwei Abschnitte zerlegt, daß das Product dreier nicht in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Abschnitte gleich dem Product der drei übrigen ist.

Vorauss. AX, BY, CZ schneiden sich in P.

Behaupt. AZ.BX.CY = BZ.CX.AY.



Bew. Jede der drei Transversalen zerlegt das $\triangle$ABC in die Summe oder Differenz zweier Dreiecke. Man betrachte zwei solche Dreiecke, z. B. $\triangle$ABX und $\triangle$ACX, welche die Transversale AX erzeugt, so wird jedes dieser Dreiecke

durch eine der beiden andern Transversalen so geschnitten, daß diese Transversale durch keine Ecke des Dreiecks geht. ΔABX wird auf diese Weise durch ZC und ΔACX durch YB geschnitten. Wendet man also den vorhergehenden Lehrsatz auf beide Dreiecke an, so folgt

$$AZ.BC.XP = BZ.XC.AP \text{ und}$$
$$AP.XB.CY = XP.CB.AY.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so heben sich BC und die Abschnitte der Linie AX fort, und man erhält die Behauptung.

Anmerk. Ein zweiter Beweis ergiebt sich unmittelbar aus §. 74. Nr. 2., und es kann der dort angeführte Satz leicht für den Fall bewiesen werden, daß P außerhalb des ΔABC liegt. (Vergl. die Anmerk. zu §. 74.)

§. 98.

Lehrsatz.

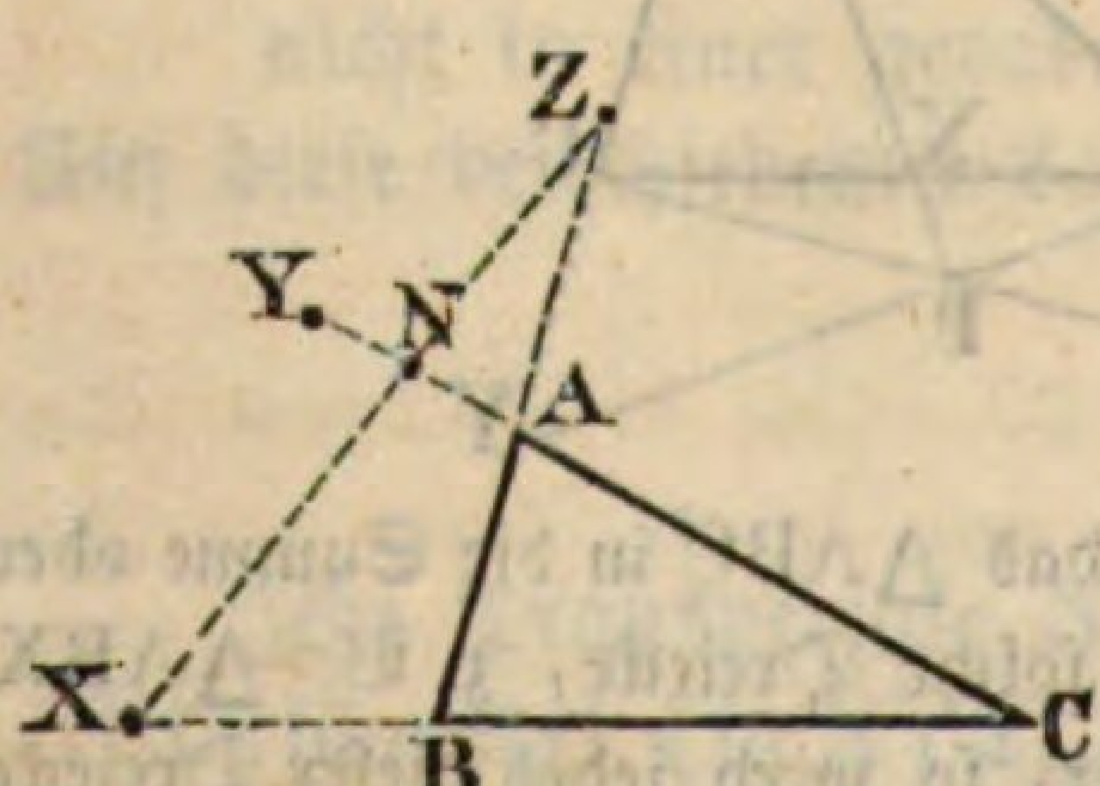
Ist jede Seite eines Dreiecks so in zwei Abschnitte zerlegt, daß das Product dreier nicht in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Abschnitte gleich dem Product der drei übrigen ist, und sind:

1) die Abschnitte zweier Seiten innere, die der dritten Seite äußere; oder sind die Abschnitte aller drei Seiten äußere: so liegen die Theilpunkte in einer geraden Linie.
2) Sind aber die Abschnitte aller drei Seiten innere; oder sind die Abschnitte zweier Seiten äußere, die der dritten Seite innere: so schneiden sich die Verbindungslinien der Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Ecken in einem Punkt.

Bew. Der vorstehende Satz enthält die Umkehrung der beiden vorhergehenden Lehrsätze und ist mit Hülfe dieser Lehrsätze sehr einfach indirect zu beweisen. Es wird vollkommen genügen, den Beweis für einen Fall durchzuführen; der Leser wird für jede andere Lage ihn hiernach um so leichter allein finden, als die beigegebene Figur in der Bezeichnung ganz den vier Figuren in den beiden vorhergehenden §§. entspricht; nur muß, je nach der Lage der Theilpunkte, der Lehrsatz in §. 96., oder in §. 97. zu Hülfe genommen werden. Das Dreieck ist durch ABC bezeichnet, der Theilpunkt in der der Ecke A, B, C gegenüberliegenden Seite ist, wie in jenen Figuren, resp. mit X, Y, Z bezeichnet.

Voraussſ. AZ.BX.CY = BZ.CX.AY.

Behaupt. X, Y, Z liegen in einer geraden Linie.



Bew. Gesetzt, X, Y, Z lägen nicht in einer geraden Linie, so verbinde man X mit Z durch eine gerade Linie, welche die verlängerte CA in N schneiden mag. XNZ ist dann eine Transversale, welche die Richtungen der drei Seiten des Dreiecks ABC in X, N, Z schneidet; folglich findet nach §. 96. die Gleichung Statt:

$$AZ.BX.CN = BZ.CX.AN.$$

Nach der Voraussetzung ist aber:

$$AZ.BX.CY = BZ.CX.AY.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so entsteht:

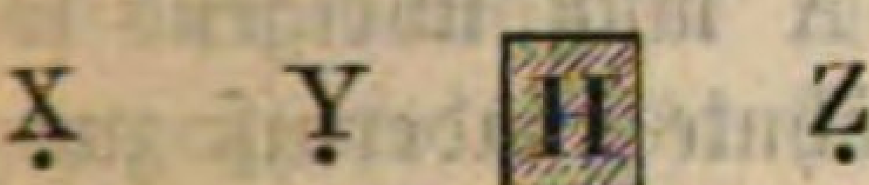
$$CN:CY = AN:AY \quad \text{oder} \quad CN:AN = CY:AY.$$

Diese Gleichung enthält nach §. 71. Nr. 2. einen Widerspruch; folglich kann XZ die Richtung CA nicht anders als in Y schneiden, d. h. X, Y, Z liegen in einer geraden Linie.

Anmerk. Mit Hülfe des vorstehenden Satzes beweise man zur Uebung, daß sich folgende Linien in einem Punkte schneiden: die drei Transversalen von den Ecken eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seite (folgt unmittelbar), die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks (mit Hülfe von §. 72., 1.), die drei Höhen eines Dreiecks (mit Hülfe von §. 61.).

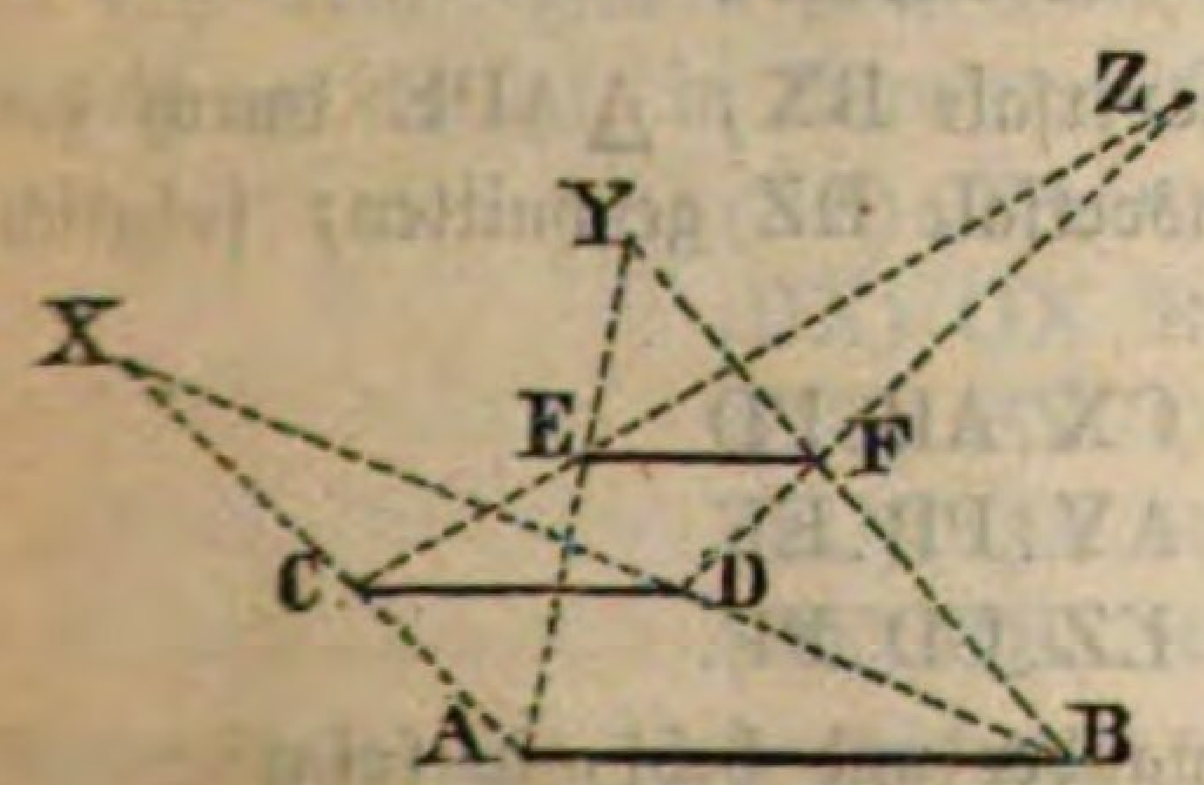
§. 99.
Eine Anwendung.

Es kommt in der practischen Geometrie die Aufgabe vor: im ebenen Terrain einen Punkt Z zu bestimmen, der in



der Richtung zweier gegebenen Punkte X und Y liegen soll, wenn ein Hinderniß H (etwa ein Gebäude) zwischen Z und diesen Punkten X und Y die Verlängerung der Linie XY verhindert. — Die nachfolgenden Sätze geben das Mittel, diese Aufgabe ohne Winkelmessung durch Abstecken gerader Linien zu lösen. Die aus diesen Sätzen entspringenden Methoden kommen freilich nur unter besonderen Umständen zur Anwendung, namentlich wenn die freie Bewegung auf dem Terrain, das Messen der Linien, der Zutritt zu den Punkten X und Y u. s. w. verhindert ist: sie verdienen aber schon zur Einübung der vorstehenden Gesetze die Beachtung des Lesers.

I. Lehrsatz. Hat man drei begrenzte, ungleiche, parallele Linien AB, CD, EF, verbindet gleichliegende Endpunkte je zweier Linien mit einander und verlängert diese sechs Linien, bis immer solche zwei Verbindungslinien, welche denselben zwei Parallelen angehören, sich schneiden (AC und BD in X, AE und BF in Y, CE und DF in Z): so liegen die drei Durchschnittspunkte X, Y, Z in einer geraden Linie.



Bew. Um den Satz auf Grund des §. 98. Nr. 1. zu beweisen, muß man ein Dreieck aufsuchen, dessen Seiten durch X, Y, Z in Abschnitte zerlegt werden.

Ein solches Dreieck ist z. B. ACE; man hat also nur zu beweisen, daß

$$AX.CZ.EY = CX.EZ.AY$$

ist. Weil aber nach der Voraussetzung $AB \# CD \# EF$ ist, so wird in jedem der Dreiecke ABX, ABY und CDZ ein ihm ähnliches Dreieck erzeugt; daher verhält sich

$$AX:CX = AB:CD$$
$$CZ:EZ = CD:EF$$
$$EY:AY = EF:AB.$$

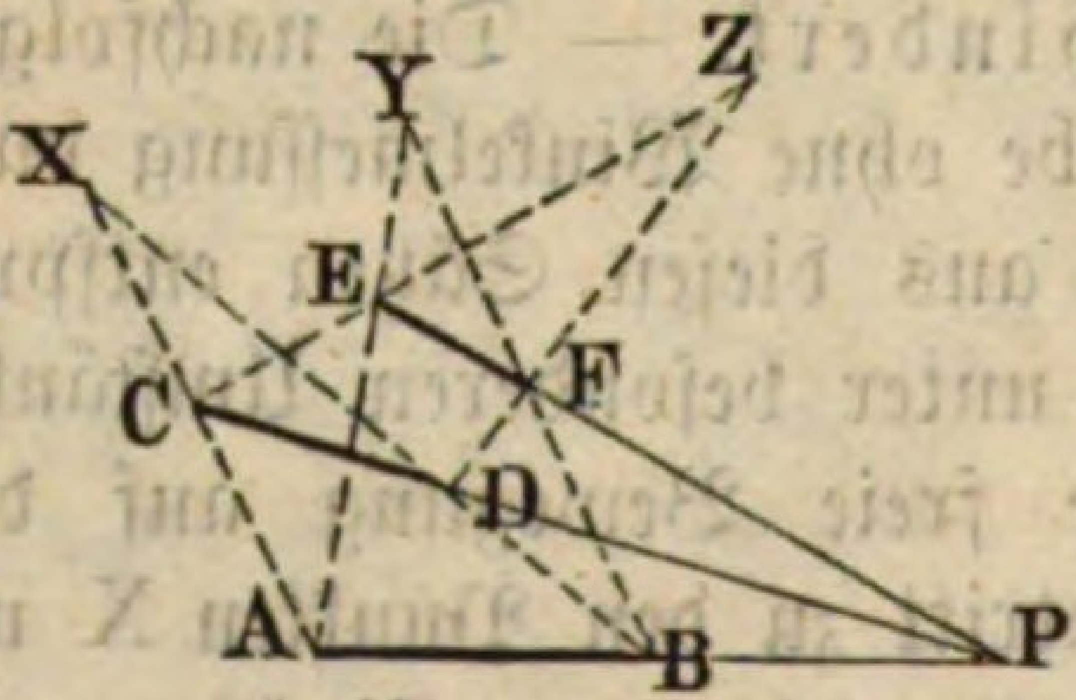
Setzt man diese Proportionen zusammen, so folgt:

$$AX.CZ.EY = CX.EZ.AY;$$

folglich liegen X, Y, Z in einer geraden Linie.

Was nun die Anwendung dieses Satzes auf die vorliegende Aufgabe betrifft, in welcher X und Y gegeben sind, Z aber gesucht wird, so würde man zunächst auf dem gegebenen Terrain drei parallele Linien abstecken (vergl. die folgende Anmerkung), in einer dieser Parallelen zwei Punkte A und B wählen und von beiden aus Linien nach X und Y abstecken. Durch diese Linien erhält man die Punkte C, D, E und F, kann also jetzt Z finden. Der Punkt A muß übrigens so gewählt werden, daß die Richtung CD das erwähnte Hinderniß zwischen Y und Z nicht trifft.

II. Lehrsatz. Der vorstehende Lehrsatz gilt auch dann, wenn die drei begrenzten Linien AB, CD, EF nicht parallel sind, sondern wenn sie sich, gehörig verlängert, in einem Punkt schneiden.



Vorausf. AB, CD, EF schneiden sich in P.

Behaupt. X, Y, Z liegen in einer geraden Linie.

Bew. Um auch diesen Satz durch §. 98. zu beweisen, suchen wir uns wieder ein Dreieck, dessen Seiten durch X, Y, Z in Abschnitte zerlegt werden. Ein solches Dreieck ist ACE, und wir müssen also zu beweisen suchen, daß

$$AX.CZ.EY = CX.EZ.AY$$

ist. Nun wird aber ΔAPC durch die Transversale BX, ΔAPE durch die Transversale BY und ΔCPE durch die Transversale DZ geschnitten; folglich hat man nach §. 96.:

$$(\Delta APC)\ AX.PB.CD = CX.AB.PD$$
$$(\Delta APE)\ EY.AB.PF = AY.PB.EF$$
$$(\Delta CPE)\ CZ.PD.EF = EZ.CD.PF.$$

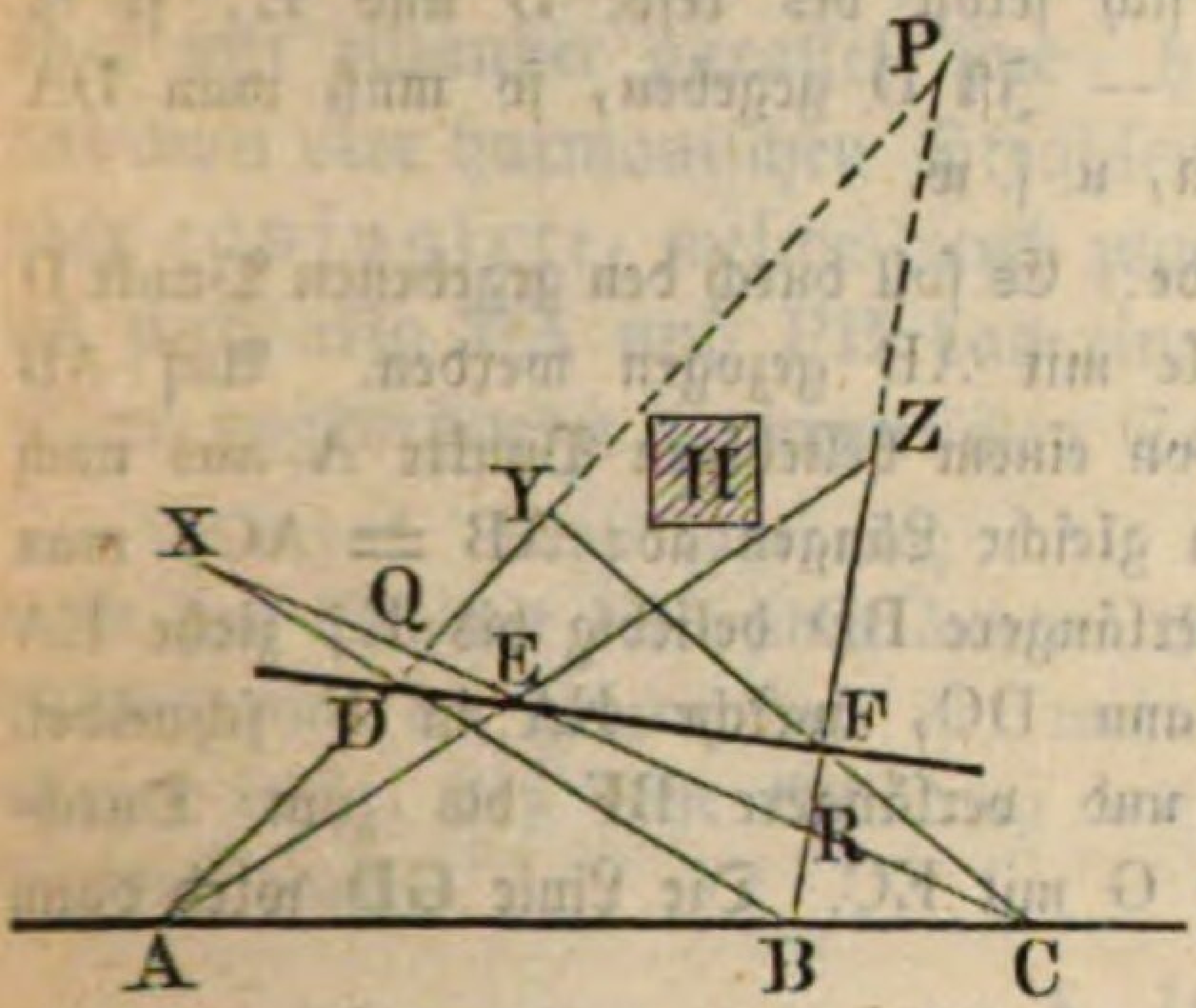
Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander und hebt, so folgt:

$$AX.EY.CZ = CX.AY.EZ.$$

Hieraus folgt nun, daß X, Y, Z in einer geraden Linie liegen.

Die Anwendung dieses Satzes auf die vorliegende Aufgabe ist nach dem, was über die Anwendung des Satzes I. gesagt worden ist, leicht.

III. Endlich kann man einen Punkt Z in der Richtung der gegebenen Punkte X und Y, wenn das Hinderniß H die Verlängerung der XY nicht gestattet, durch folgende Construction finden: In einer beliebigen geraden Linie AC wählt man drei Punkte A, B und C und steckt nun die Richtungen von A und C nach Y, von B und C nach X ab. Durch den Durchschnittspunkt D der Linien AY und BX legt man eine Linie DF, welche CX in E und CY in F schneidet, und markirt diese Durchschnittspunkte. Die Linie DF ist zwar theoretisch beliebig zu legen, für den vorliegenden practischen Zweck aber so, daß die Richtung AE das Hinderniß H nicht trifft. Denkt man sich nun AE und BF gezogen, so ist ihr Durchschnittspunkt Z der gesuchte Punkt, welcher mit X und Y in einer geraden Linie liegt.



Bew. Um den Lehrsatz in §. 98. anwenden zu können, muß man ein Dreieck aufsuchen, dessen Seiten durch X, Y und Z in Abschnitte zerlegt werden. Verlängert man AY und BZ bis sie sich in P schneiden, so ist $\triangle$PQR ein solches Dreieck; daher hat man die Richtigkeit folgender Gleichung zu beweisen:

$$PY.QX.RZ = QY.RX.PZ.$$

Um den weiteren Beweis klar aufzufassen, achte man auf Folgendes: Von jedem der drei Punkte A, B, C sind zwei Linien gezogen, welche paarweise nach X, Y, Z gehen. Von diesen sechs Linien haben drei das $\triangle$PQR erzeugt, nämlich AY, BZ und CX. Die andern drei sind aber Transversalen dieses Dreiecks, und die Linien AC und DF ebenfalls. Wendet man nun auf jede dieser fünf Transversalen den Lehrsatz in §. 96. an, so erhält man fünf Gleichungen, aus denen durch Multiplication die oben angegebene Gleichung entsteht. Zu den nachfolgenden fünf Gleichungen ist immer die Transversale, welche die Gleichung erzeugt, in Klammern hinzugesetzt. Man erhält:

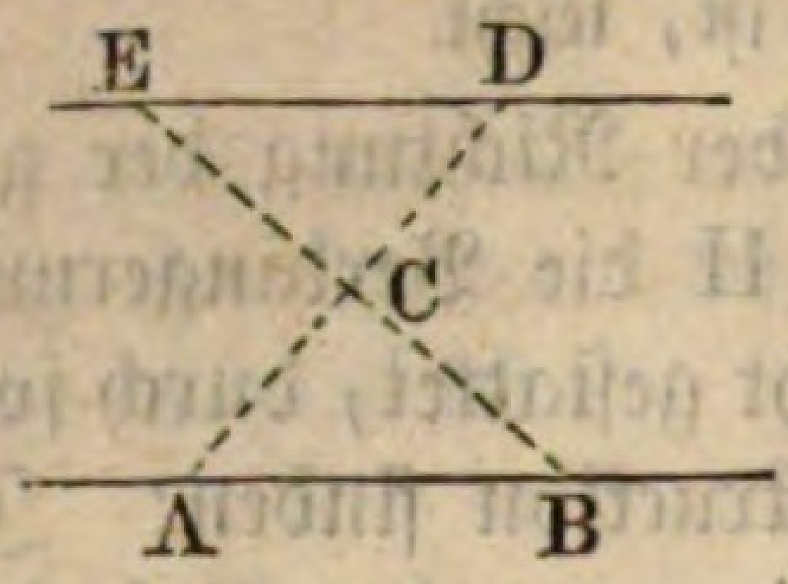
$$(AZ)\quad PA.QE.RZ = QA.RE.PZ$$
$$(BX)\quad QX.RB.PD = RX.PB.QD$$
$$(CY)\quad PY.QC.RF = QY.RC.PF$$
$$(AC)\quad QA.RC.PB = PA.QC.RB$$
$$(DF)\quad QD.RE.PF = PD.QE.RF.$$

Multiplicirt man diese fünf Gleichungen und hebt, so entsteht:

$$PY.QX.RZ = QY.RX.PZ;$$

daher liegen X, Y, Z in einer geraden Linie.

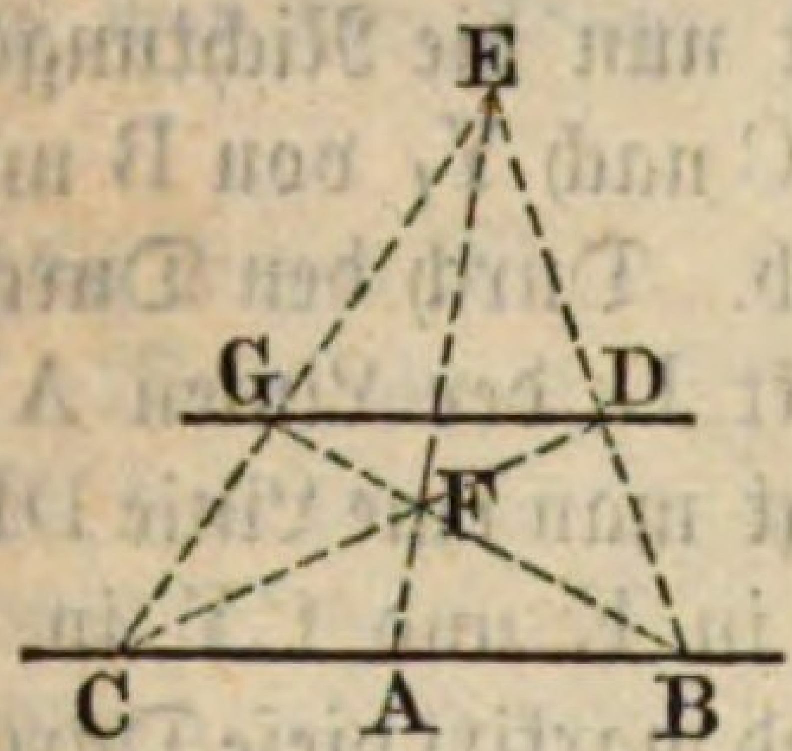
Anmerk. Um auf dem Felde eine Linie abzustecken, welche einer gegebenen



AB parallel ist, kann man so verfahren:

Man verbindet zwei beliebige Punkte A und B mit einem Punkte C und verlängert jede dieser Linien über C um sich selbst bis resp. D und E, so ist DE ╪ AB. — Ist D gegeben, so muß man DA in C halbiren, u. s. w.

Eine andere Construction ist folgende: Es soll durch den gegebenen Punkt D



eine Parallele mit AB gezogen werden. Auf AB trage man von einem beliebigen Punkte A aus nach beiden Seiten gleiche Längen ab: AB = AC; man ziehe BD, verlängere BD beliebig bis E, ziehe EA und EC, dann DC, welche EA in F schneidet, endlich BF und verlängere BF bis zum Durchschnittspunkte G mit EC. Die Linie GD wird dann parallel AB.

Bew. Da sich die Transversalen BG, EA, CD in einem Punkt schneiden, so ist im $\triangle EBC$:

$$AB . DE . GC = AC . BD . EG.$$

Da AB = AC ist, so folgt, wenn man hebt:

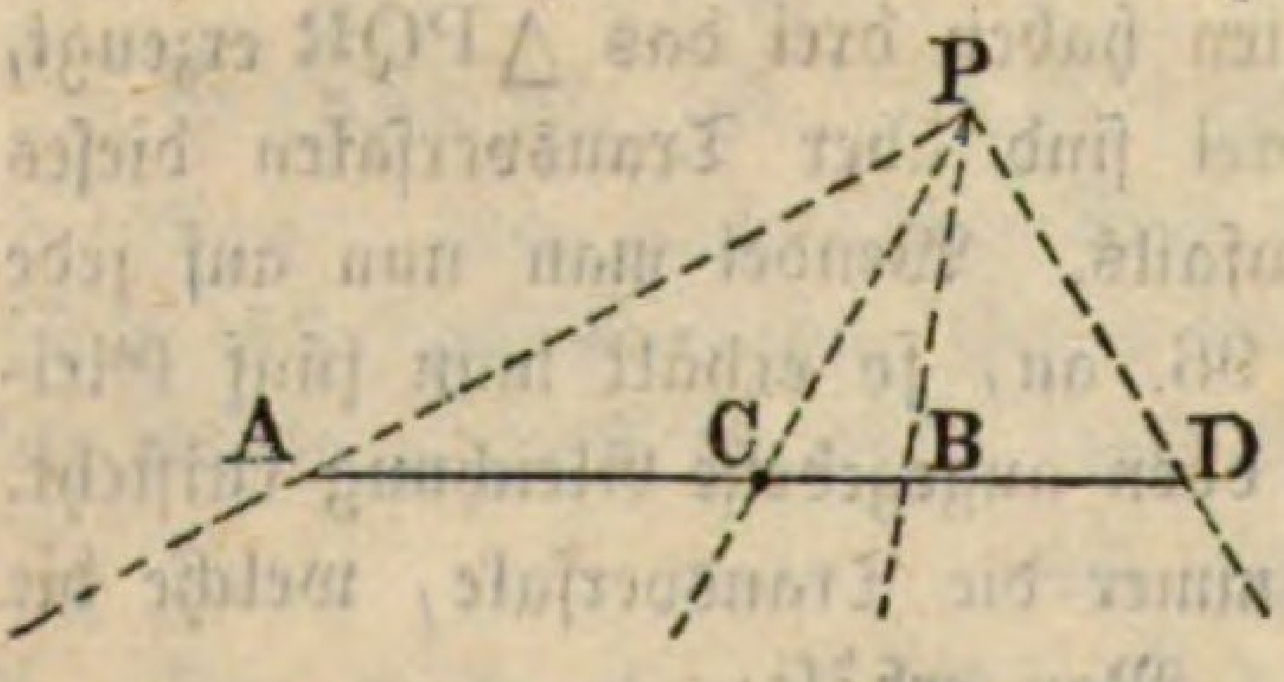
$$DE . GC = BD . EG, \text{ oder}$$
$$DE : BD = EG : GC,$$

woraus GD ╪ AB folgt.

§. 100.

Erklärung.

Ist eine Linie AB durch einen Punkt C so in zwei innere und durch einen Punkt D so in zwei äußere Abschnitte zerlegt, daß sich



die inneren Abschnitte zu einander verhalten, wie die gleichliegenden äußeren, daß also die Proportion Statt findet:

$$AC : BC = AD : BD,$$

so nennt man A, B, C, D vier **harmonische Punkte** und sagt: AB ist **in C und D harmonisch getheilt**. Von den vier harmonischen Punkten A, B, C, D heißen immer ein äußerer und der nicht benachbarte innere: **einander zugeordnet** oder **conjugirt**. Es sind also A und B, so wie D und C zugeordnete harmonische Punkte. Daß man die beiden Paare zugeordneter harmonischer Punkte von einander nicht unterscheidet, hat darin seinen Grund, daß, **wenn** AB **durch** C **und** D **harmonisch getheilt ist, dann auch** CD **durch** A **und** B **harmonisch getheilt wird**; denn aus der Proportion

$$AC : BC = AD : BD \text{ folgt:}$$
$$CB : DB = CA : DA.$$

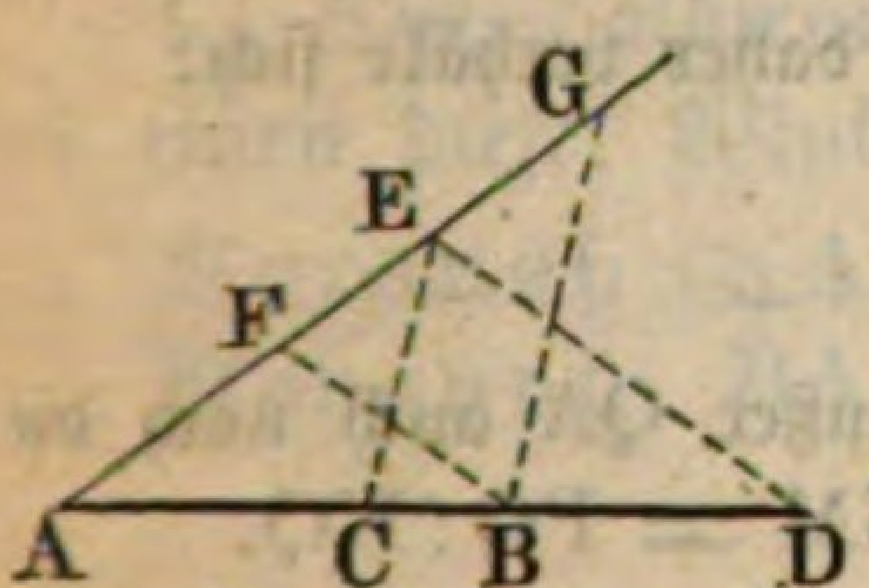
Vier gerade Linien, welche durch vier harmonische Punkte A, B, C, D so gezogen sind, daß sie entweder sich in einem Punkt P schneiden, oder mit einander parallel sind, heißen **harmonische Strahlen**, und von vier harmonischen Strahlen heißen solche zwei **zugeordnete** oder **conjugirte**, welche durch zugeordnete harmonische Punkte gehen. Es sind also PA und PB das eine Paar, PC und PD das andere Paar zugeordneter harmonischer Strahlen.

Anmerk. Man sagt auch: AD ist durch C und B harmonisch getheilt, wenn das Product der beiden äußeren Stücke gleich dem Product des mittleren Stückes und der ganzen Linie ist, wenn also $AC . BD = BC . AD$ ist. Man erkennt leicht, daß diese Erklärung mit der oben gegebenen im Wesentlichen übereinstimmt.

§. 101.

Aufgabe.

Eine Linie AB harmonisch zu theilen.



Auflösung. Man ziehe beliebig AG und wähle in dieser Linie den Punkt E, mache EF = EG, verbinde B mit G und F und ziehe durch E die $EC \parallel GB$ und $ED \parallel FB$: so ist AB in C und D harmonisch getheilt.

Bew. Nach der Construction verhält sich:

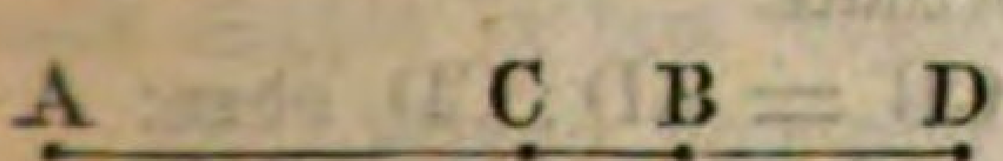
$$AC : BC = AE : GE = AE : FE = AD : BD.$$

Aus dieser Construction ergiebt sich dann auch sehr leicht, wie man zu drei gegebenen harmonischen Punkten den vierten construirt. — Eine zweite Construction ergiebt sich aus §. 103. I., wo PN die zu theilende Linie sein würde.

§. 102.

Zusatz.

Ist AB in C und D harmonisch getheilt und liegt C näher an B als an A, so muß D rechts von AB in der Verlängerung über



B hinaus liegen, weil $AD > BD$ sein muß. Liegt aber C näher an A als an B, so muß D links von AB in der Verlängerung über A hinaus liegen; denn dann muß $AD < BD$ sein. Rückt C nach und nach der Mitte von AB immer näher, so muß D sich resp. nach rechts oder links immer weiter von AB entfernen; ist endlich C die Mitte von AB, so hat C keinen construirbaren zugeordneten Punkt D; denn dieser liegt dann unendlich weit von AB entfernt.

§. 103.

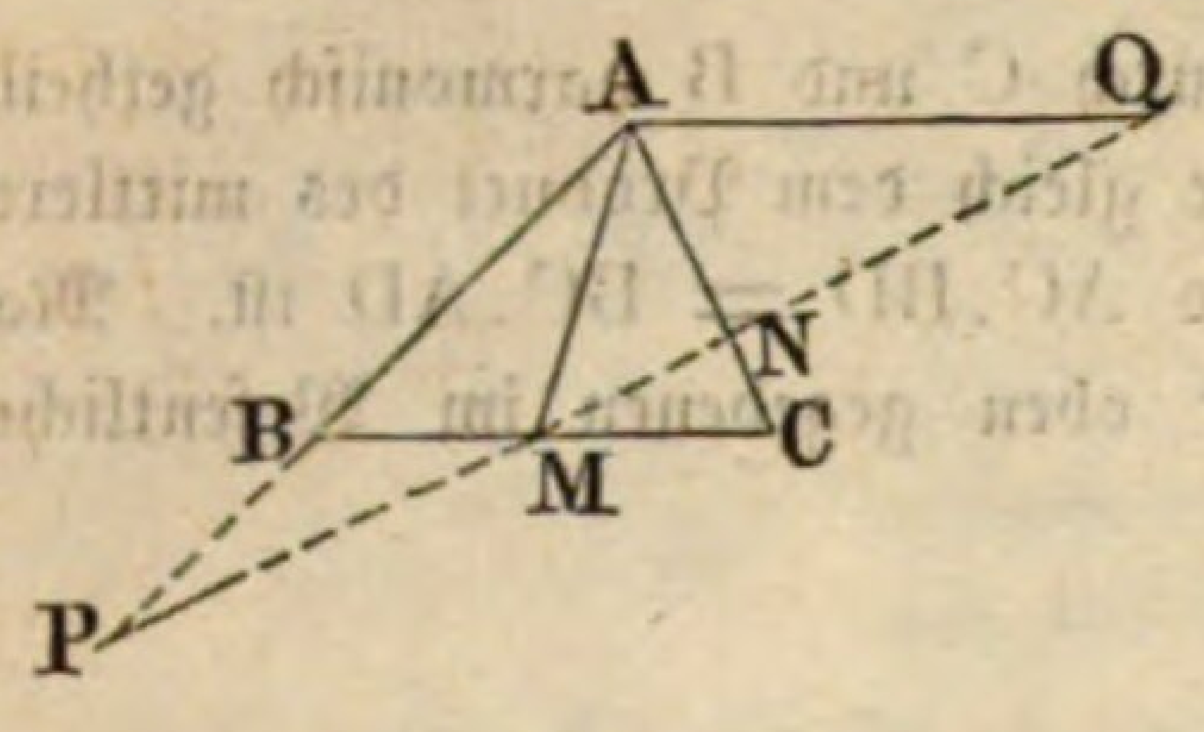
Lehrsätze.

I. Zwei Seiten jedes Dreiecks, die Transversale, welche ihre gemeinschaftliche Ecke mit dem Mittelpunkt der dritten Seite verbindet, und die Linie, welche durch diese Ecke mit der dritten Seite parallel gelegt ist, sind vier harmonische Strahlen.

Vorauss. $BM = CM$ und $AQ \parallel BC$.

Behaupt. AB, AM, AC, AQ sind harmonische Strahlen.

Bew. Man hat zu zeigen, daß irgend eine Linie durch diese Strahlen harmonisch getheilt wird. Eine solche Linie ist aber jede durch M gezogene Gerade, welche diese Strahlen schneidet, z. B. PQ. Es ist also zu zeigen, daß P, M, N, Q vier harmonische Punkte sind, daß also die Proportion Statt findet:



$$PM : NM = PQ : NQ.$$

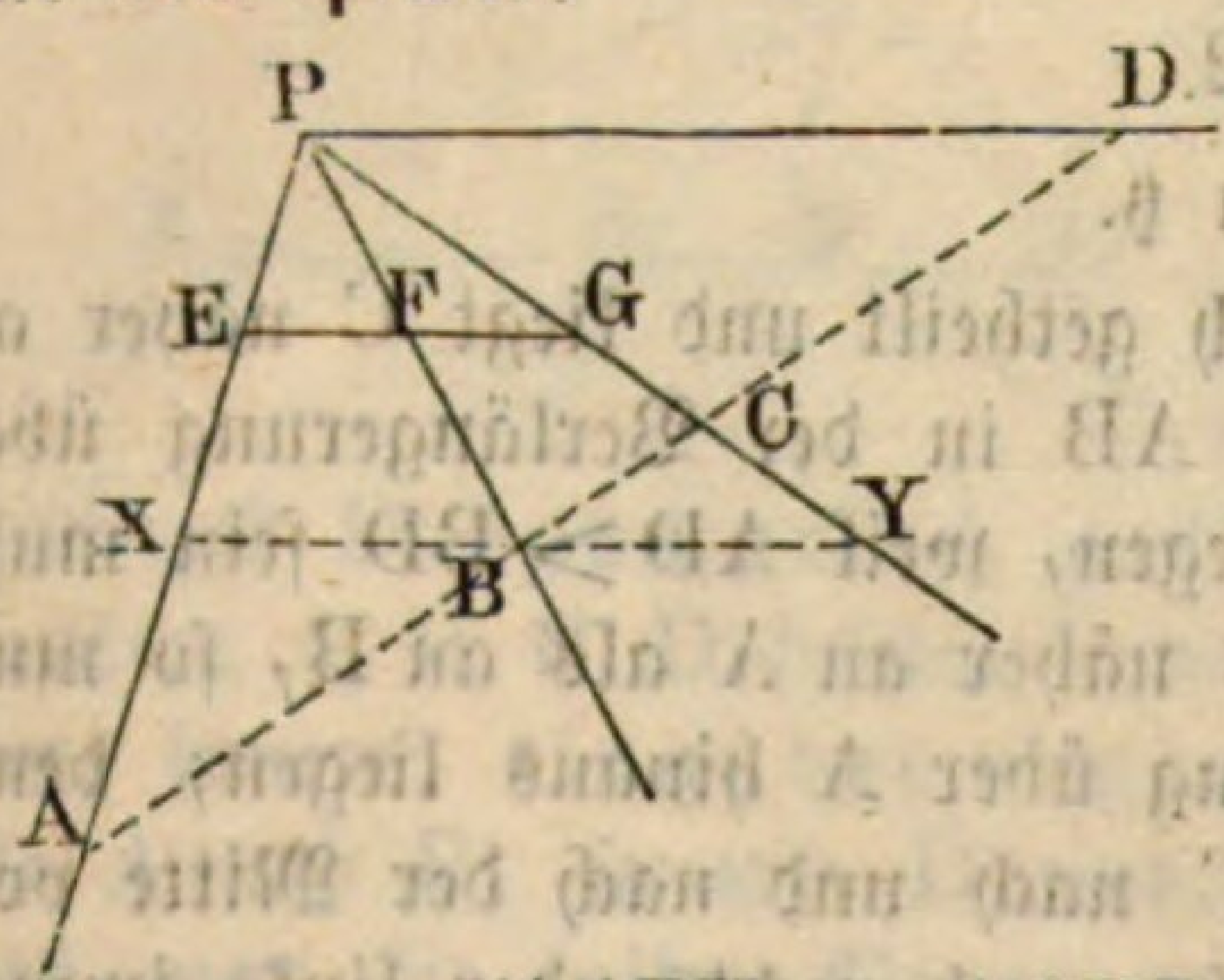
Die Analysis des Beweises ergiebt sich leicht, wenn man die mittleren Glieder vertauscht. Der synthetische Beweis ist folgender: Da $BC \parallel AQ$ ist, so ist $\triangle PMB \sim \triangle PQA$ und $\triangle NMC \sim \triangle NQA$; daher verhält sich:

$$PM : MB = PQ : QA$$
$$MC : NM = QA : NQ.$$

Setzt man die Proportion zusammen, so heben sich außer QA auch noch die gleichen Längen MB und MC, und es entsteht $PM : NM = PQ : NQ$.

II. Schneidet man drei harmonische Strahlen durch eine mit dem vierten Strahl parallele Linie, so schneiden die drei Strahlen von dieser Linie gleiche Stücke ab. (Der Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden).

Vorauss. PA, PB, PC, PD sind vier harmonische Strahlen, und $EG \parallel PD$.



Behaupt. $EF = FG$.

Bew. Irgend eine Linie muß durch die vier harmonischen Strahlen harmonisch getheilt werden; es sei die Linie AD, so daß sich verhält:

$$AB : CB = AD : CD \text{ oder:}$$
$$(1.)\ AB : AD = CB : CD.$$

Zieht man nun durch B die $XY \parallel PD \parallel EG$, so folgt:

$$\triangle ABX \sim \triangle ADP \text{ und } \triangle CBY \sim \triangle CDP.$$

Setzt man nun in (1.) für jedes Verhältniß ein ihm gleiches, so erhält man:

$$(2.)\ BX : DP = BY : DP.$$

Hieraus ergiebt sich $BX = BY$; folglich ist auch nach §. 80. III. $EF = FG$.

§. 104.
Lehrsatz.

Durch vier harmonische Strahlen wird jede sie durchschneidende Linie harmonisch getheilt, d. h. die vier Durchschnittspunkte sind harmonische Punkte.

Bew. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Sätze im vorigen §. Nehmen wir an, daß (in der vorhergehenden Figur) PA, PB, PC, PD vier harmonische Strahlen sind, und werden sie durch die beliebig gezogene Linie AD geschnitten, so können wir zunächst durch B die Linie XY ∦ PD ziehen. Dann ist nach dem Satze II. des vorigen §. BX = BY, woraus unmittelbar aus dem Satze I. desselben §. folgt, daß AD harmonisch getheilt wird, also die Proportion Statt findet:

$$AB : CB = AD : CD.$$

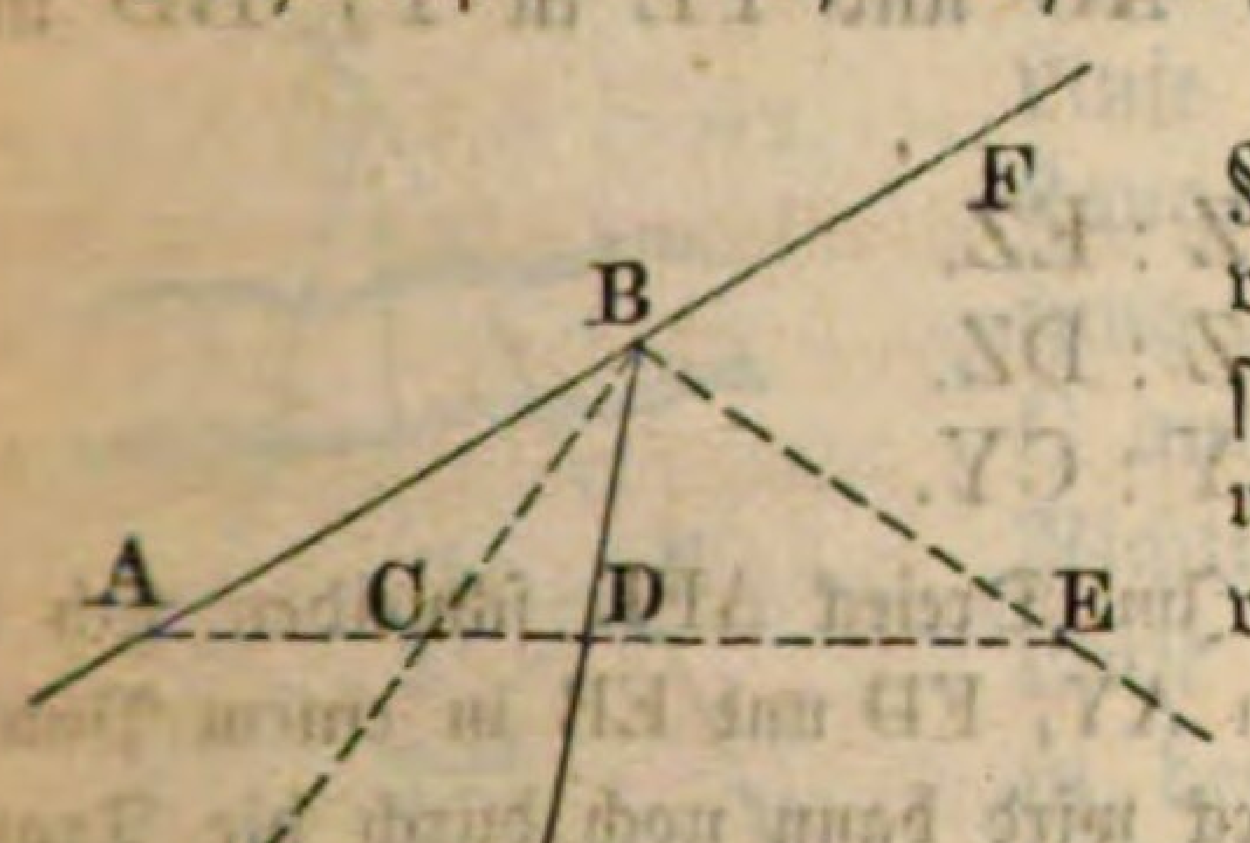
Anmerk. Sind die harmonischen Strahlen parallel, so folgt der Beweis unmittelbar aus §. 80. I.

§. 105.
Lehrsätze.

I. Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel und die Schenkel des einen dieser Winkel sind vier harmonische Strahlen.

Vorauss. ∡ABC = ∡DBC und ∡DBE = ∡FBE.

Behaupt. BA, BC, BD, BE sind harmonische Strahlen.



Bew. Dieser Satz folgt unmittelbar aus §. 72. Nr. 1. und 2. Schneidet man die vier Strahlen durch eine beliebige Linie AE, so halbirt BC den Winkel B im △ABD und BE halbirt seinen Nebenwinkel. Daher verhält sich:

$$AC : DC = AB : DB \text{ und}$$
$$AE : DE = AB : DB, \text{ folglich auch:}$$
$$AC : DC = AE : DE.$$

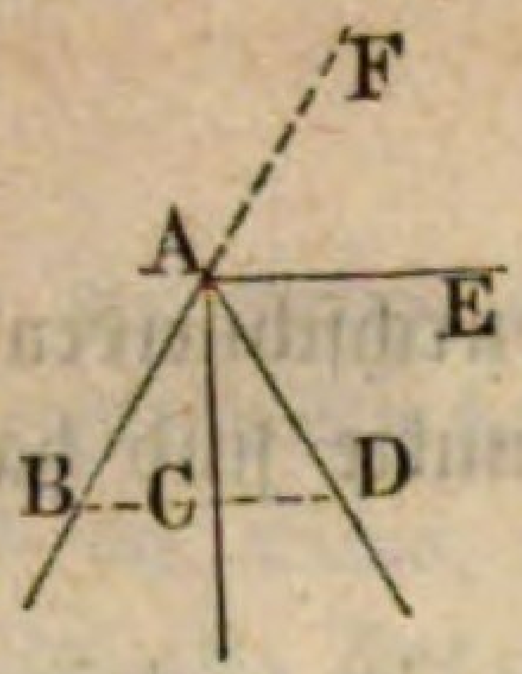
Hieraus folgt die Behauptung. — Eben so beweist man, daß auch BC, BD, BE, BF harmonische Strahlen sind.

Wenn man beachtet, daß BC ⊥ BE ist, so erkennt man eine Umkehrung dieses Satzes in dem folgenden.

II. Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete auf einander senkrecht stehen, so halbirt der eine den Winkel, welchen die beiden anderen zugeordneten Strahlen einschließen, der andere aber seinen Nebenwinkel.

Vorauss. AB, AC, AD, AE sind harmonische Strahlen; AC ⊥ AE.

Behaupt. ∡BAC = ∡DAC; ∡DAE = ∡FAE.

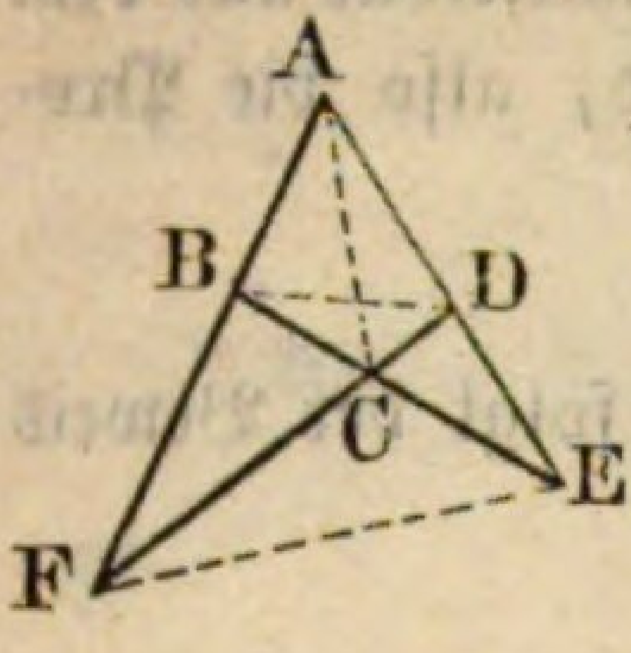


Bew. Zieht man durch einen Punkt C des Strahles AC eine Linie BD $\#$ AE, so ist BD $\perp$ AC und nach §. 103. II. auch CB = CD. Hieraus folgt, daß $\triangle$ABD gleichschenklig ist und der Winkel an der Spitze ($\angle$BAD) durch AC halbirt wird; daher halbirt auch AE den Winkel DAF.

§. 106.

Erklärung.

Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks ABCD bis zu ihren Durchschnittspunkten E und F, so heißt die ganze Figur ABCDEF ein **vollständiges Vierseit**. Das vollständige Vierseit hat sechs Ecken A, B, C, D, E, F und drei Diagonalen: AC, BD und EF (von denen zwei schon dem Viereck angehören).



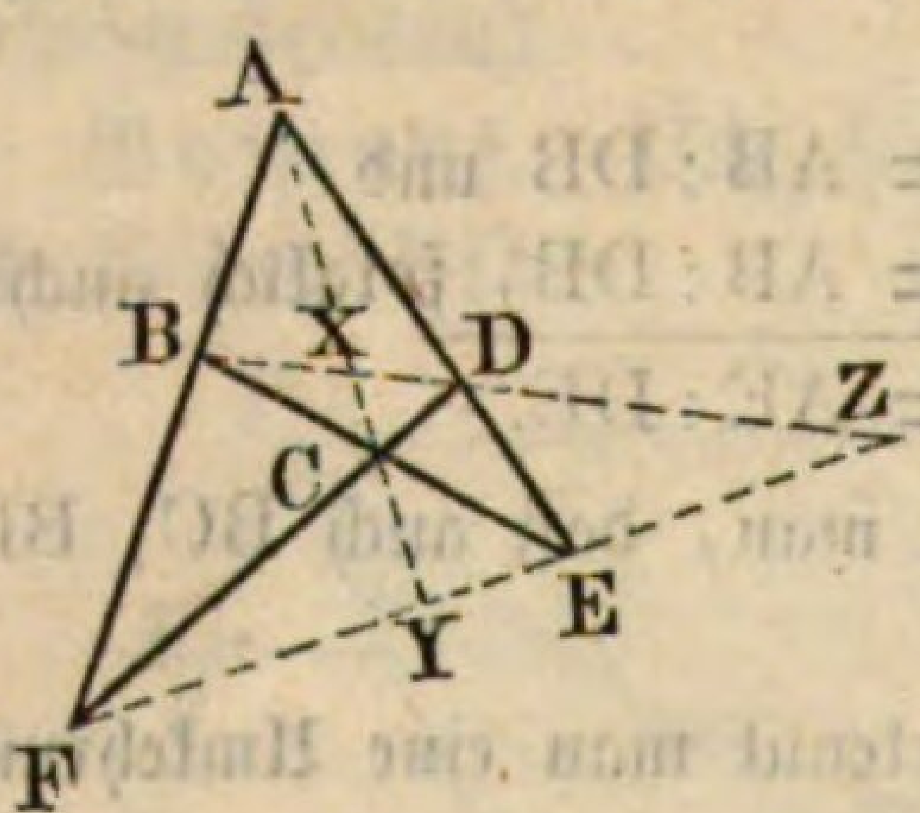
§. 107.

Lehrsatz.

Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden andern Diagonalen harmonisch getheilt.

Vorauss. Im vollständigen Vierseit ABCDEF schneiden sich die Diagonalen AC und BD in X, AC und FE in Y, BD und FE in Z.

Behaupt. 1) FY : EY = FZ : EZ.
2) BX : DX = BZ : DZ.
3) AX : CX = AY : CY.



Bew. Im Dreieck AFE schneiden sich die Transversalen AY, FD und EB in einem Punkt; dasselbe Dreieck wird dann noch durch die Transversale BZ geschnitten. Wendet man nun die Lehrsätze in §. 97. und §. 96. an, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$FY.ED.AB = EY.AD.FB$$
$$FZ.ED.AB = EZ.AD.FB.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch einander, so folgt:

$$FY:FZ = EY:EZ, \text{ oder}$$
$$1)\quad FY:EY = FZ:EZ.$$

Denkt man sich jetzt AZ gezogen, so sind AF, AY, AE und AZ harmonische Strahlen; folglich theilen sie BZ harmonisch, d. h. es verhält sich:

$$2)\quad BX:DX = BZ:DZ.$$

Denkt man sich endlich noch FX gezogen, so sind FB, FX, FD und

FZ harmonische Strahlen; folglich theilen sie AY harmonisch, d. h. es verhält sich:

$$3)\quad AX : CX = AY : CY.$$

Anmerk. Wenn in dem vollständigen Vierseit ABCDEF die beiden Diagonalen BD und FE parallel sind, so werden beide durch die Diagonale AC halbirt. Denn außer der Gleichung

$$FY.ED.AB = EY.AD.FB$$

hat man dann noch:

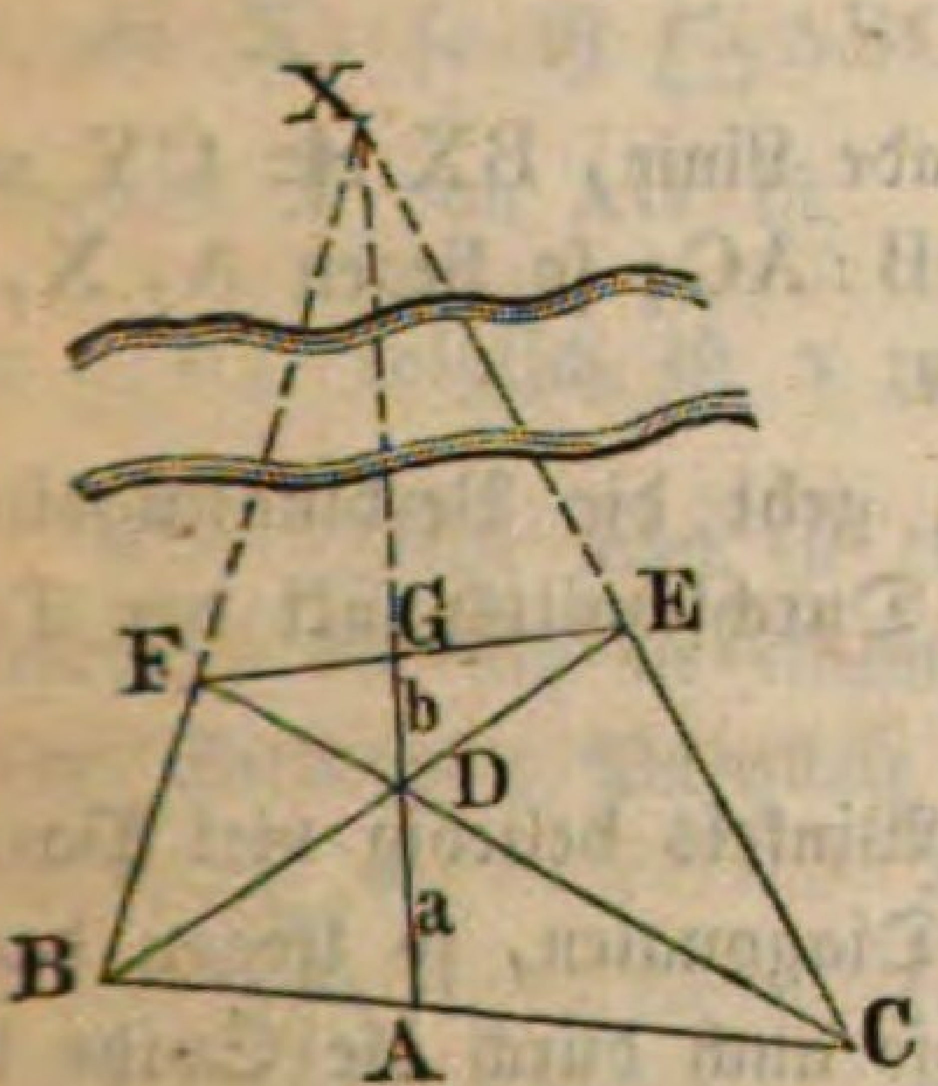
$$\frac{AD}{AB} = \frac{ED}{FB},$$

und wenn man beide Gleichungen multiplicirt, so folgt FY = EY; folglich ist dann auch BX = DX. Um auch für diesen Fall zu beweisen, daß AC in X und Y harmonisch getheilt ist, hat man:

$$AX : AY = XD : YE = XD : YF = CX : CY.$$

§. 108.
Eine Anwendung.

Um im ebenen Terrain die Entfernung eines Punktes A von einem Punkte X zu finden, wenn man den Punkt X zwar sehen, aber nicht zu ihm gelangen kann, ist folgendes Verfahren practisch bequem. Man lege durch A eine beliebige Linie BC und wähle in ihr zwei Punkte B und C, von welchen aus X gesehen werden kann.



Von B aus stecke man beliebig die gerade Linie BDE ab und markire durch Signalstangen ihre beiden Punkte: D in der Richtung AX und E in der Richtung CX. Von C aus richte man jetzt den Punkt F in der Richtung BX so ein, daß CDF eine gerade Linie ist; endlich richte man den Punkt G in der Richtung AX von F aus so ein, daß FGE eine gerade Linie ist. Jetzt messe man AD und DG. Es sei AD = a und DG = b, so ist

$$AX = \frac{a+b}{a-b}\cdot a.$$

Bew. Im vollständigen Vierseit XFDECB wird die Diagonale XD in G und A durch die beiden andern Diagonalen harmonisch getheilt; folglich wird auch AG in D und X harmonisch getheilt; also verhält sich:

$$AD : GD = AX : GX, \text{ folglich}$$

$$AD - GD : AD = AX - GX : AX, \text{ oder}$$

$$a - b : a = a + b : AX, \text{ folglich}$$

$$AX = \frac{a+b}{a-b}\cdot a.$$

§. 109.
Aufgaben und Sätze zur Uebung.

1) Homologe Seiten zweier ähnlichen Vielecke mögen sich wie 5 zu 7 verhalten; wie verhalten sich die Inhalte? Antw. Wie 25 zu 49.

2) Der Umfang eines Dreiecks sei der dritte Theil vom Umfange eines ihm ähnlichen Dreiecks; der wie vielte Theil vom Inhalte des größeren Dreiecks ist der des kleineren? Antw. Der neunte Theil.

3) Die Inhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie 8 zu 11; wie verhalten sich ihre Umfänge? Antw. Wie 4 zu $\sqrt{22}$.

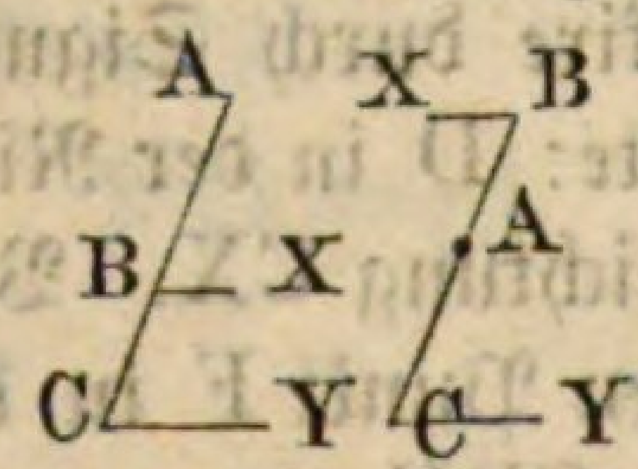
4) Zwei homologe Seiten ähnlicher Figuren sind in Dec.-M. 3′ 4″ und 5′ 7″; der Inhalt der größeren Figur ist 36 □° 9 □′; wie groß ist der Inhalt der kleineren? Antw. 12 □° 84 □′ 8 □″ 86 □‴.

5) Aehnliche Vielecke von gleichem Inhalt sind congruent.

Bew. Aus der Aehnlichkeit allein folgt die Gleichheit der Winkel. Die Gleichheit homologer Seiten folgt daraus, daß die Quadrate derselben gleich sein müssen (§. 85.).

6) Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie noch ein Paar gleicher spitzer Winkel haben; oder wenn die Hypotenuse zu einer Kathete in beiden Dreiecken dasselbe Verhältniß hat; oder wenn die Katheten proportional sind.

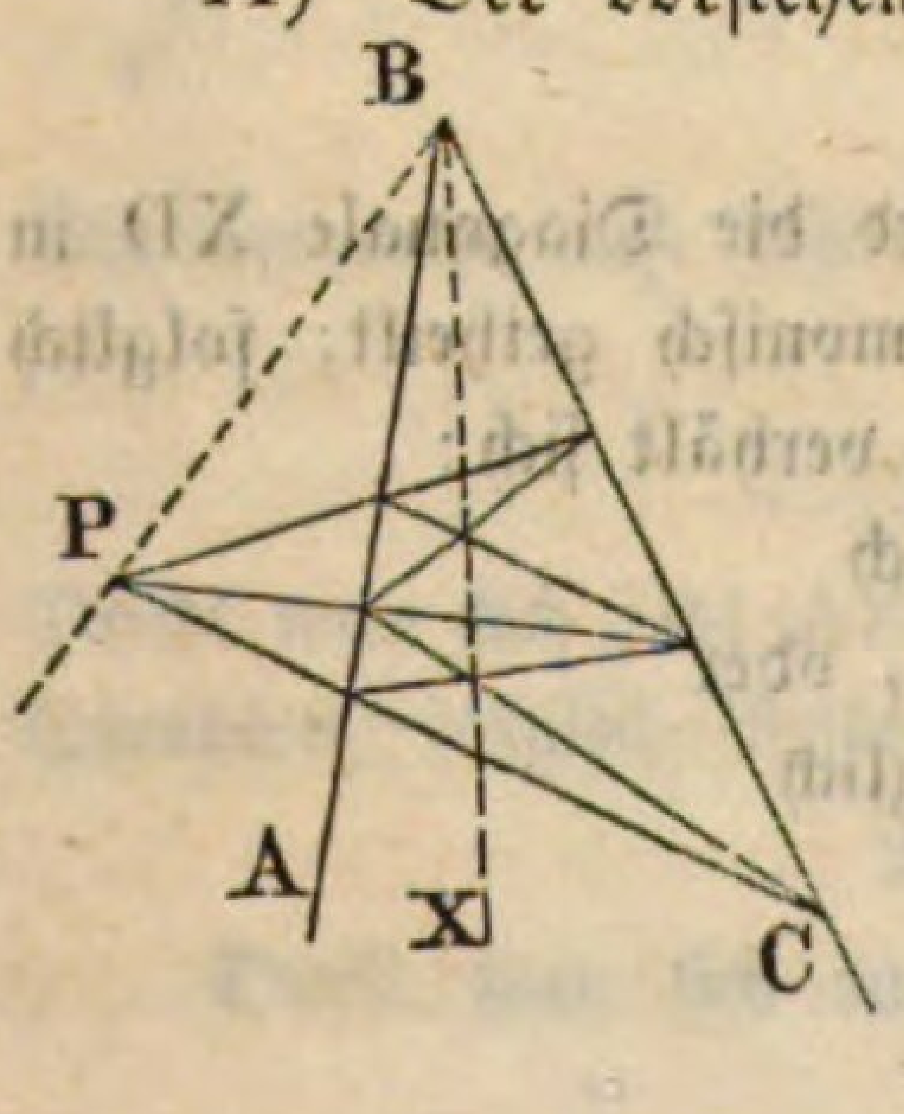
7) Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ein Paar gleicher Winkel haben, die entweder beide an den Spitzen, oder beide an den Grundlinien liegen; oder wenn die Grundlinie zum Schenkel in beiden Dreiecken dasselbe Verhältniß hat. — Gleichseitige Dreiecke sind immer ähnlich.



8) Ist ABC eine gerade Linie, BX ∦ CY und verhält sich BX : CY = AB : AC, so liegen A, X, Y immer in einer geraden Linie.

9) Im Paralleltrapez geht die Verbindungslinie der Mittelpunkte der parallelen Seiten durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen.

10) Zieht man zwischen den Schenkeln eines Winkels beliebig viel Parallelen und in den entstandenen Paralleltrapezen die Diagonalen, so liegen deren Durchschnittspunkte alle in einer geraden Linie, die auch durch die Spitze des Winkels geht.



11) Der vorstehende Satz ist auch dann wahr, wenn die Schenkel des Winkels ABC nicht durch Parallelen, sondern durch beliebig viele Linien geschnitten werden, welche sich alle in einem Punkt P schneiden. Auch dann liegen die Durchschnittspunkte der Diagonalen aller entstandenen Vierecke mit der Spitze B des Winkels in einer geraden Linie.

Bew. Zieht man BP, so ist zu den drei Linien BP, BA und BC die Verbindungslinie der Spitze B mit einem beliebigen Durchschnittspunkt zweier Diago-

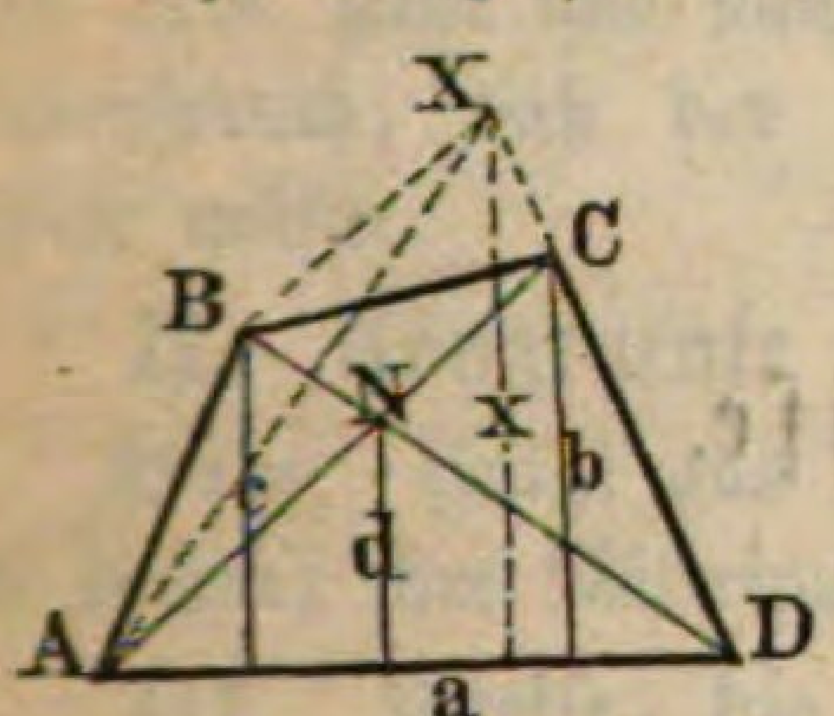
nalen immer der vierte harmonische Strahl (§. 107.); und daß zwischen BA und BC nur eine Linie BX liegen kann, welche zu den drei von B ausgehenden Linien der vierte harmonische Strahl ist, kann sehr leicht indirect bewiesen werden.

12) Die Verbindungslinie n der Mittelpunkte der Diagonalen eines Paralleltrapezes ist der halben Differenz der parallelen Seiten a und b gleich; oder, wenn $a > b$ ist, $n = \frac{a-b}{2}$.

Zum Beweise lege man eine Gerade durch gleichliegende Endpunkte von n und b, und verlängere sie bis a.

13) Die Diagonalen eines Rhombus sind gleich a und b; wie weit steht ihr Durchschnittspunkt von jeder Seite ab? Antw. Der Abstand ist gleich $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. (§. 88. Anmerk. 1.)

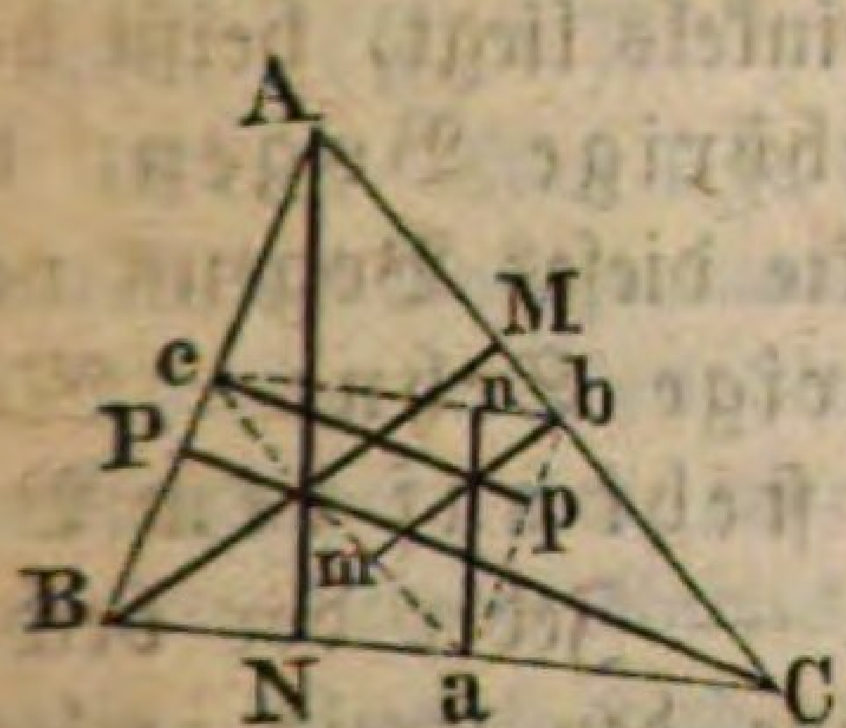
14) Der Inhalt eines Vierecks ABCD wird gefunden, wenn man eine Seite a mit dem Product der Abstände b und c der gegenüberliegenden Ecken von a multiplicirt und das Product durch den doppelten Abstand d des Durchschnittspunktes beider Diagonalen von der Seite a dividirt.



Bezeichnet F den Inhalt, so ist $F = \frac{abc}{2d}$.

Bew. Man ziehe BX ∥ AC und verbinde A mit X, so ist $\square ABCD = \triangle AXD = \frac{ax}{2}$, wenn x der Abstand des Punktes X von AD ist. Nun verhält sich $x : b = DX : DC = DB : DN = c : d$; folglich ist $x = \frac{bc}{d}$, u. s. w.

15) Zieht man in einem Dreieck ABC von den Ecken aus drei Transversalen, die sich in einem Punkt schneiden, und legt durch den Mittelpunkt jeder Seite eine Parallele zu der durch die gegenüberliegende Ecke gehenden Transversale, so schneiden sich diese, den Transversalen parallelen Linien (an, bm, cp) ebenfalls in einem Punkte.



Bew. a, b, c sind die Mittelpunkte der Seiten des $\triangle ABC$. Zieht man nun ab, bc, ca, so ist nicht nur $\triangle ABC \sim \triangle abc$, sondern diese Dreiecke werden auch durch die von homologen Ecken ausgehenden parallelen Transversalen wieder in ähnliche Dreiecke zerlegt (z. B. $\triangle ABN \sim \triangle abn$). Hieraus erhält man leicht:

$$BN : CN = bn : cn$$
$$CM : AM = cm : am$$
$$AP : BP = ap : bp.$$

Setzt man diese drei Proportionen zusammen, so sind die ersten beiden Glieder

der neuen Proportion einander gleich, weil sich nach der Voraussetzung AN, BM, CP in einem Punkt schneiden; folglich muß auch

$$bn.cm.ap = cn.am.bp$$

sein, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

16) Sind in einem Dreieck die Transversalen von zwei Ecken nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten gleich, so sind auch diese Seiten gleich, d. h. das Dreieck ist gleichschenklig. Sind alle drei Transversalen gleich, so ist das Dreieck gleichseitig. (§. 87. Nr. 1. und §. 25. I.)

17) In einem rechtwinkligen Dreieck sind a und b die Projectionen der Katheten auf die Hypotenuse; wie groß sind die Katheten und der Inhalt des Dreiecks?

Aufl. Nach §. 88. Nr. 1. findet man leicht die Katheten gleich $\sqrt{a(a+b)}$ und $\sqrt{b(a+b)}$. Der Inhalt ist gleich $\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}$.

Fünftes Kapitel.

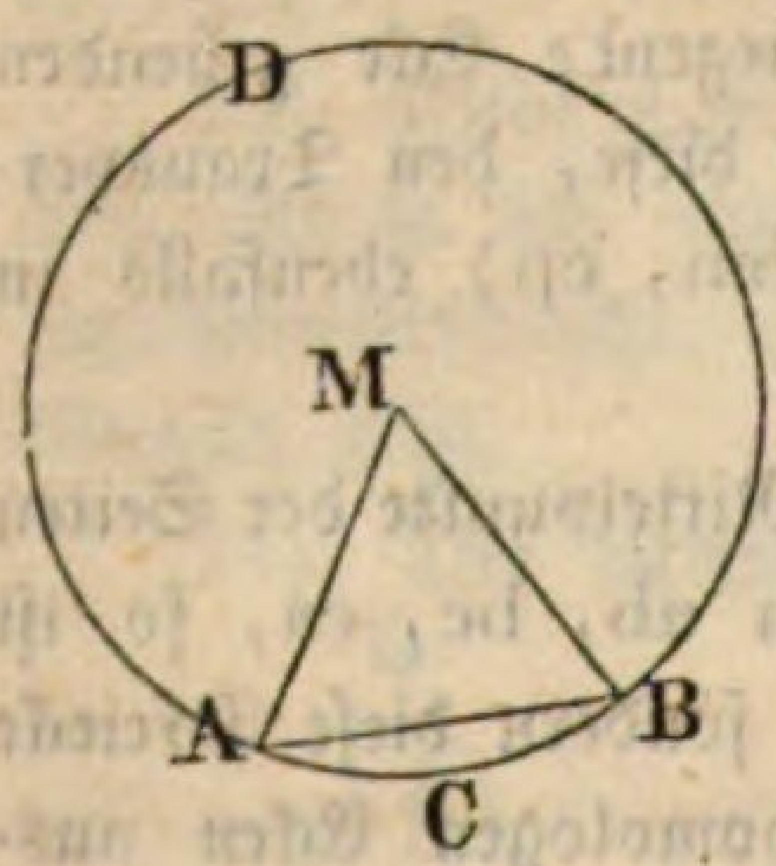
Die Lehre vom Kreise.

§. 110.

Erklärungen.

Zu den in §. 2. gegebenen Erklärungen über den Kreis treten folgende hinzu:

Der Winkel, den zwei Radien MA und MB mit einander bilden, heißt ein Centri- oder Mittelpunktswinkel. Es ist also sowohl der concave, als auch der convexe Winkel AMB ein Centriwinkel. Unter $\measuredangle$AMB ohne nähere Bezeichnung soll immer der concave Winkel verstanden werden. Der Bogen, welcher zwischen den Schenkeln eines Centriwinkels liegt, heißt der dem Centriwinkel zugehörige Bogen; die Sehne, welche die Endpunkte dieses Bogens verbindet, heißt die zugehörige Sehne. Man sagt auch, der Centriwinkel steht auf dem Bogen und auf der Sehne. — Jeder der beiden Theile, in welche eine Sehne den Kreis zerlegt, heißt ein Kreis-Abschnitt oder Segment (ABC und ABD); hingegen ist ein Kreis-Ausschnitt oder Sector der Theil des Kreises, welcher von den Schenkeln eines Centriwinkels und dem zugehörigen Bogen begrenzt wird (AMBC und AMBD). — Der concave Centriwinkel AMB steht auf dem Bogen ACB und der Sehne AB; zu ihm gehört das Segment ABC und der Sector AMBC. Der convexe Centri-



winkel AMB steht auf dem Bogen ADB und auf der Sehne AB; zu ihm gehört das Segment ABD und der Sector AMBD. — Zu jedem Centriwinkel gehört ein Bogen, eine Sehne, ein Sector und ein Segment. Zu jedem Bogen, Sector, Segment gehört ein Centriwinkel; hingegen gehören zu jeder Sehne zwei Centriwinkel: der concave und der convexe.

§. 111.
Lehrsätze.

Die Grundlage der Lehre vom Kreise bildet die Gleichheit der Radien und Durchmesser (§. 2.). Aus dieser Eigenschaft des Kreises ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

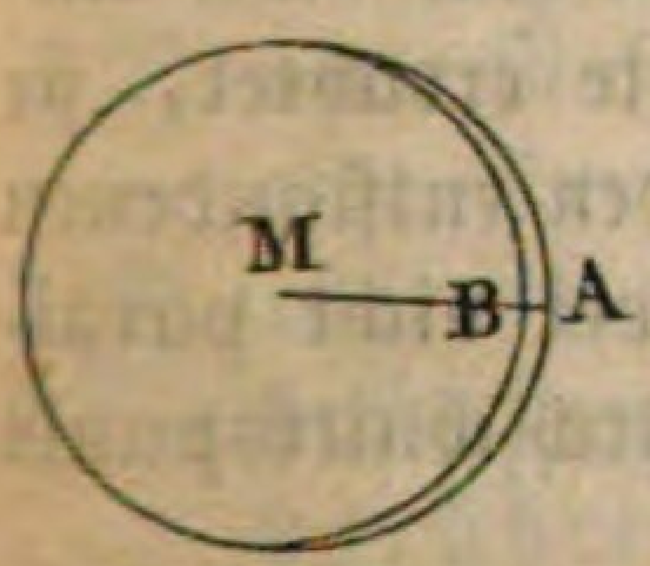
I. Jeder Kreis hat nur einen Mittelpunkt.

Bew. Die Annahme, es gäbe zwei Mittelpunkte M und N, führt, wenn man MN zieht und nach beiden Seiten bis zur Peripherie verlängert, zu dem Widerspruch, daß der erzeugte Durchmesser zwei Mittelpunkte M und N haben müßte.

II. Congruente Kreise haben gleiche Radien.

Bew. Folgt aus I., wenn man die Kreise so auf einander legt, daß sie sich decken; ihre Mittelpunkte müssen in einander fallen.

III. Kreise, die gleiche Radien haben, sind congruent.



Bew. Denkt man sich die Kreise so auf einander gelegt, daß die Mittelpunkte zusammenfallen, und nimmt man nun an, die Peripherien deckten sich nicht vollkommen: so sieht man sofort den Widerspruch, daß zwei Radien MA und MB einander gleich sein müßten, von denen der eine ein Theil des andern ist.

IV. Gleiche Kreise haben gleiche Radien, sind also immer auch congruent. — Daher nennen wir congruente Kreise nur gleiche Kreise. (§. 4.)

Bew. Man lege die Kreise so auf einander, daß die Mittelpunkte zusammenfallen. Angenommen nun, die Radien wären ungleich, so müssen nothwendig alle Punkte der Peripherie des Kreises, der den kleineren Radius hat, innerhalb der Peripherie des andern fallen, weil aus jeder andern Lage folgen würde, daß der kleinere Radius dem größern gleich, oder gar größer als dieser sein müßte. Sonach wird nun der eine Kreis ein Theil des andern, was mit der Voraussetzung, nach welcher die Kreise gleich sein sollen, im Widerspruch steht. Die Radien müssen daher gleich sein, die Kreise also congruent.

V. Drei Punkte der Peripherie eines Kreises liegen nie in einer geraden Linie. — Die Kreislinie ist also krumm, denn kein Theil derselben kann gerade sein.

Beweis folgt aus §. 23. Nr. 2.

VI. Eine gerade Linie kann mit der Peripherie eines Kreises nicht mehr als zwei Punkte gemein haben. (Folgt aus V.)

VII. Drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte liegen immer in der Peripherie eines Kreises und nur eines einzigen. Daher bestimmen drei Punkte der Peripherie einen Kreis vollständig.

Beweis folgt aus §. 28. VI.

VIII. Der Durchmesser eines Kreises ist größer als jede andere Sehne.

Bew. Man ziehe die Radien nach den Endpunkten der Sehne. Es entsteht ein Dreieck, in welchem die Sehne als eine Seite kleiner ist, als die Summe der beiden andern Seiten. Diese Summe ist aber dem Durchmesser gleich.

IX. Die vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbirt die Sehne und den zugehörigen Centriwinkel. — Auch die Umkehrungen dieses Satzes sind richtig; namentlich geht die im Mittelpunkt einer Sehne auf diese Sehne errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt des Kreises. — Der Winkel, den eine Sehne mit dem durch einen ihrer Endpunkte gezogenen Radius bildet, ist spitz.

Die Beweise dieser Sätze folgen daraus, daß jede Sehne mit den nach ihren Endpunkten gezogenen Radien ein gleichschenkliges Dreieck bildet. (Vergl. §. 28. I. und II.)

X. Man findet den Mittelpunkt eines Kreises, wenn man entweder auf eine Sehne in ihrer Mitte eine Senkrechte errichtet, sie nach beiden Seiten bis zur Peripherie verlängert und den entstandenen Durchmesser halbirt; oder wenn man auf jede von zwei nicht parallelen Sehnen in der Mitte Lothe errichtet, deren Durchschnittspunkt dann der Mittelpunkt des Kreises ist.

XI. Alle Punkte einer Sehne zwischen ihren Endpunkten liegen innerhalb des Kreises. Die Kreislinie kehrt daher in allen ihren Theilen dem Mittelpunkt ihre concave Seite zu und hat keinen Wendepunkt.

Beweis aus §. 23. Nr. 1. und §. 22. Nr. 5.

XII. Jeden Bogen eines Kreises kann man immer so an eine beliebige andere Stelle seiner Peripherie legen, daß alle Punkte des Bogens in die Peripherie fallen. — Gleiche Bogen desselben Kreises (oder gleicher Kreise) sind congruent. — Denkt man sich einen Kreis um seinen Mittelpunkt bewegt, so bewegen sich alle Punkte der Peripherie in der Peripherie; diese selbst verläßt also ihre Lage nicht. Die Kreislinie ist daher in allen ihren Theilen gleichmäßig gekrümmt.

Bew. AB sei der Bogen, der an eine andere Stelle der Peripherie gelegt werden soll. Man ziehe die Radien MA und MB und lege nun den Kreisausschnitt AMB so an eine andere Stelle, daß M in M bleibt. Es mag MA



entlang MC und MB entlang MD fallen, so muß wegen der Gleichheit der Radien A in C und B in D fallen. Der Bogen AB fällt nun genau mit dem Bogen CD zusammen, weil die Annahme des Gegentheils sofort zu dem Widerspruch führt, daß von zwei gleichen Radien der eine ein Theil des andern sein muß. (Vergl. die Figur zum Satze III.) — Um zu beweisen, daß gleiche Bogen congruent sind, wollen wir annehmen, es sei Bogen AB = CD. Man kann dann die Bogen so aufeinander legen, daß A in C und AB entlang CD fällt; wegen Gleichheit der Bogen fällt dann B in D, und die Bogen sind congruent.

Lage der Linien gegen den Kreis. Abhängigkeit ihrer Größe von dieser Lage.

§. 112.

Erklärung.

Eine unbegrenzte Linie kann gegen einen Kreis folgende drei Lagen haben:

1) sie hat mit der Peripherie gar keinen Punkt gemein und liegt dann ganz außerhalb des Kreises;
2) oder sie schneidet die Kreislinie in zwei Punkten und heißt dann eine Secante;
3) oder sie hat mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein und heißt dann eine Tangente oder eine den Kreis in diesem Punkt berührende Linie; der Punkt selbst heißt der Berührungspunkt.

Da in der Kreislehre vorzugsweise begrenzte Secanten vorkommen, welche von einem Punkte außerhalb des Kreises in den Kreis hineingehen und bis zu ihrem zweiten Durchschnittspunkt mit der Peripherie verlängert sind, so soll unter Secante immer eine solche begrenzte Secante verstanden werden; jede andere Secante soll eine unbegrenzte Secante genannt werden.

Anmerk. 1. Jede Secante wird durch die Peripherie in zwei innere Abschnitte zerlegt. Der eine Abschnitt ist eine Sehne, der andere ist der äußere (oder außerhalb des Kreises liegende) Theil der Secante. Umgekehrt kann jede Secante als ein äußerer Abschnitt einer Sehne betrachtet werden; der andere äußere Abschnitt ist dann der äußere Theil der Secante.

Anmerk. 2. Eine Tangente kann als eine Secante betrachtet werden, deren zwei Durchschnittspunkte mit der Peripherie zusammengefallen sind. Hieraus erklärt sich der Zusammenhang zwischen den Sätzen über Tangenten und über Secanten.

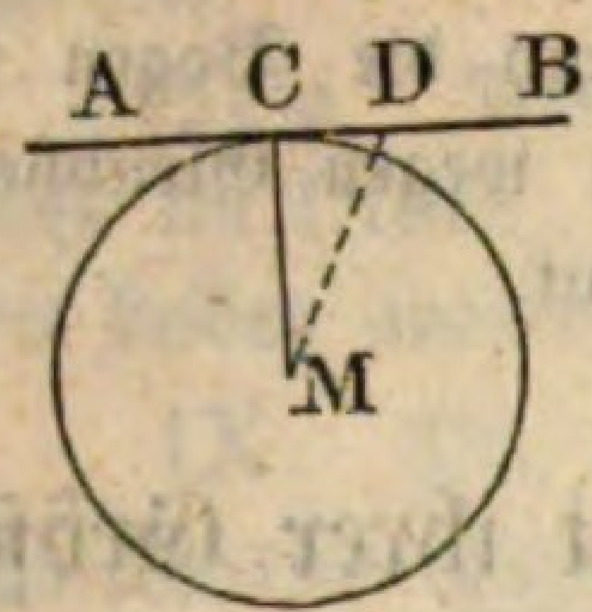
§. 113.

Lehrsätze.

1) Die Tangente eines Kreises steht auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius senkrecht; folglich hat der Kreis in jedem Punkte seiner Peripherie nur eine Tangente.

Vorauss. AB berührt den Kreis um M in C.

Behaupt. MC ⊥ AB.



Bew. Wäre nicht MC ⊥ AB, so fälle man von M eine Senkrechte auf AB. Diese Senkrechte sei MD, so muß MD < MC sein. Weil aber nach der Erklärung der Tangente der Punkt D außerhalb des Kreises liegt, so muß MD > MC sein. Dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme, MC steht nicht senkrecht auf AB, falsch sein muß; folglich ist MC ⊥ AB.

2) Jede Linie, welche auf einem Radius in seinem Endpunkte in der Peripherie senkrecht steht, ist eine Tangente.

Bew. Jeder Punkt der Linie, mit Ausnahme des Endpunktes des Radius, liegt außerhalb des Kreises, weil seine Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises als Hypotenuse größer als der Radius ist.

3) Die Senkrechte, vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Tangente gefällt, trifft den Berührungspunkt. — Die auf eine Tangente im Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Bew. indirect.

4) Eine Linie, welche durch einen Punkt C der Peripherie eines Kreises geht und mit dem nach C gezogenen Radius MC schiefe Winkel bildet, schneidet den Kreis auf der Seite des spitzen Winkels.

Bew. Fällt man von M eine Senkrechte auf die Linie, so ist diese Senkrechte kleiner als MC; folglich liegt ihr Fußpunkt innerhalb des Kreises u. s. w. (Vergl. §. 13. Nr. 6.)

5) Eine Linie schneidet den Kreis, oder berührt ihn, oder liegt ganz außerhalb desselben, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkt kleiner als der Radius ist, oder ihm gleich, oder größer als er.

§. 114.

Lehrsätze.

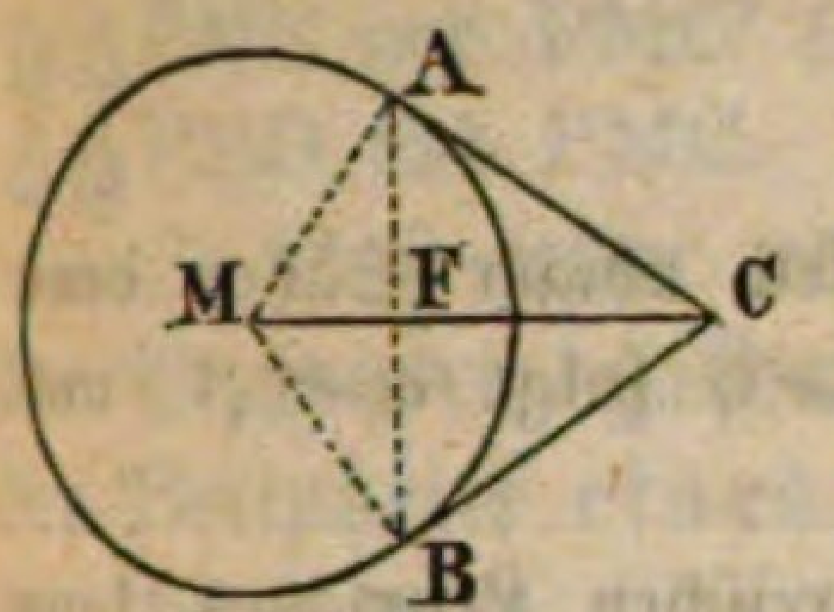
1) Die Tangenten durch die Endpunkte eines Durchmessers sind parallel.

Bew. Die Summen zweier innern Winkel beträgt 2R.

2) Die Verbindungslinie der Berührungspunkte paralleler Tangenten ist ein Durchmesser.

Bew. §. 113. Nr. 3. und §. 13. Nr. 4.

3) Wenn sich zwei Tangenten schneiden, so sind die Theile derselben, welche zwischen dem Durchschnittspunkte



und den Berührungspunkten liegen, einander gleich. Die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes mit dem Mittelpunkte des Kreises halbirt den Winkel, welchen die Tangenten bilden, und auch den Centriwinkel, welchen die Radien nach den Berührungspunkten einschließen; sie steht senkrecht auf der Sehne der Berührungspunkte und halbirt diese Sehne.

Vorauss. AC und BC berühren den Kreis um M resp. in A und B.

Behaupt. $AC = BC$, $\measuredangle ACM = \measuredangle BCM$, $\measuredangle AMC = \measuredangle BMC$; $MC \perp AB$, $AF = BF$.

Bew. $\Delta AMC \cong \Delta BMC$ und §. 28. III.

4) Die Halbirungslinie des Winkels, den zwei Tangenten mit einander bilden, geht, gehörig verlängert, durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis indirect oder aus §. 28. VIII.

5) Legt man durch die Endpunkte einer Sehne, die kein Durchmesser ist, zwei sich schneidende Tangenten, so ist der Bogen, welcher zwischen der Sehne und diesen Tangenten liegt, größer als die Sehne und kleiner als die Summe der Theile beider Tangenten vom Durchschnittspunkt bis zu den Berührungspunkten, d. h. es ist (Figur zu Nr. 3.) Bogen AB größer als die Sehne AB und kleiner als $AC + CB$.

Beweis aus §. 22. Nr. 5. und §. 111. XI.

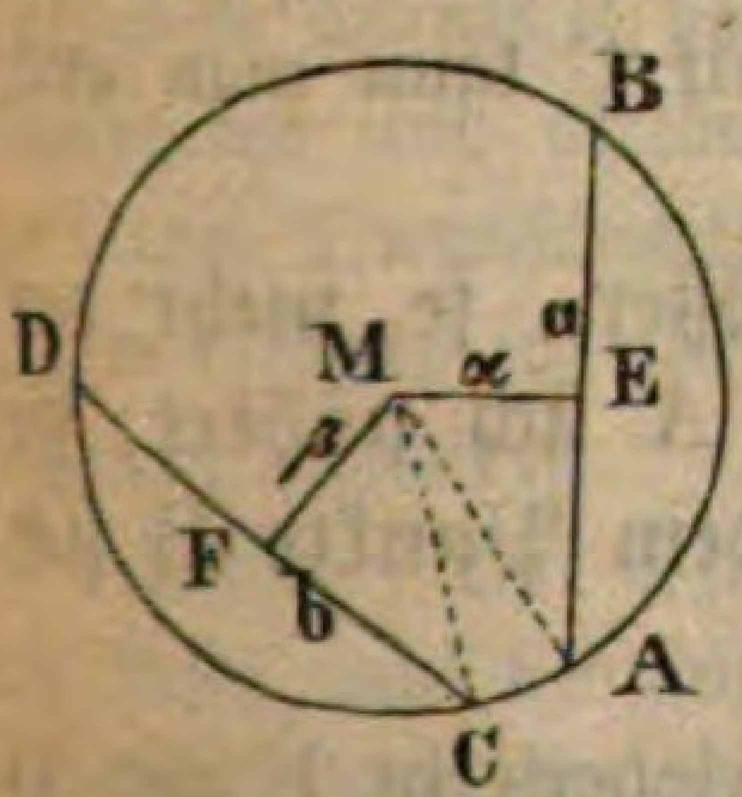
§. 115.

Lehrsätze.

1) Gleiche Sehnen desselben Kreises sind gleich weit vom Mittelpunkt entfernt; von ungleichen Sehnen liegt die größere dem Mittelpunkte näher, als die kleinere.

2) Sehnen, welche gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, sind gleich; von Sehnen, welche ungleiche Abstände vom Mittelpunkt haben, ist diejenige die größere, welche den kleineren Abstand hat.

Bew. Bezeichnet man die Sehne AB durch a und ihren Abstand ME



vom Mittelpunkt durch α, ferner die Sehne CD durch b und ihren Abstand MF vom Mittelpunkt durch β, verbindet noch M mit A und C: so ist $AE = \frac{a}{2}$, $CF = \frac{b}{2}$, und nach dem Pythagoreischen Lehrsatz: $MA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \alpha^2$; $MC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \beta^2$. Weil aber $MA = MC$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \alpha^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \beta^2.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man sofort die Richtigkeit obiger Sätze; denn aus $a = b$ folgt $\alpha = \beta$ und umgekehrt; aus $a > b$ folgt $\alpha < \beta$ und umgekehrt.

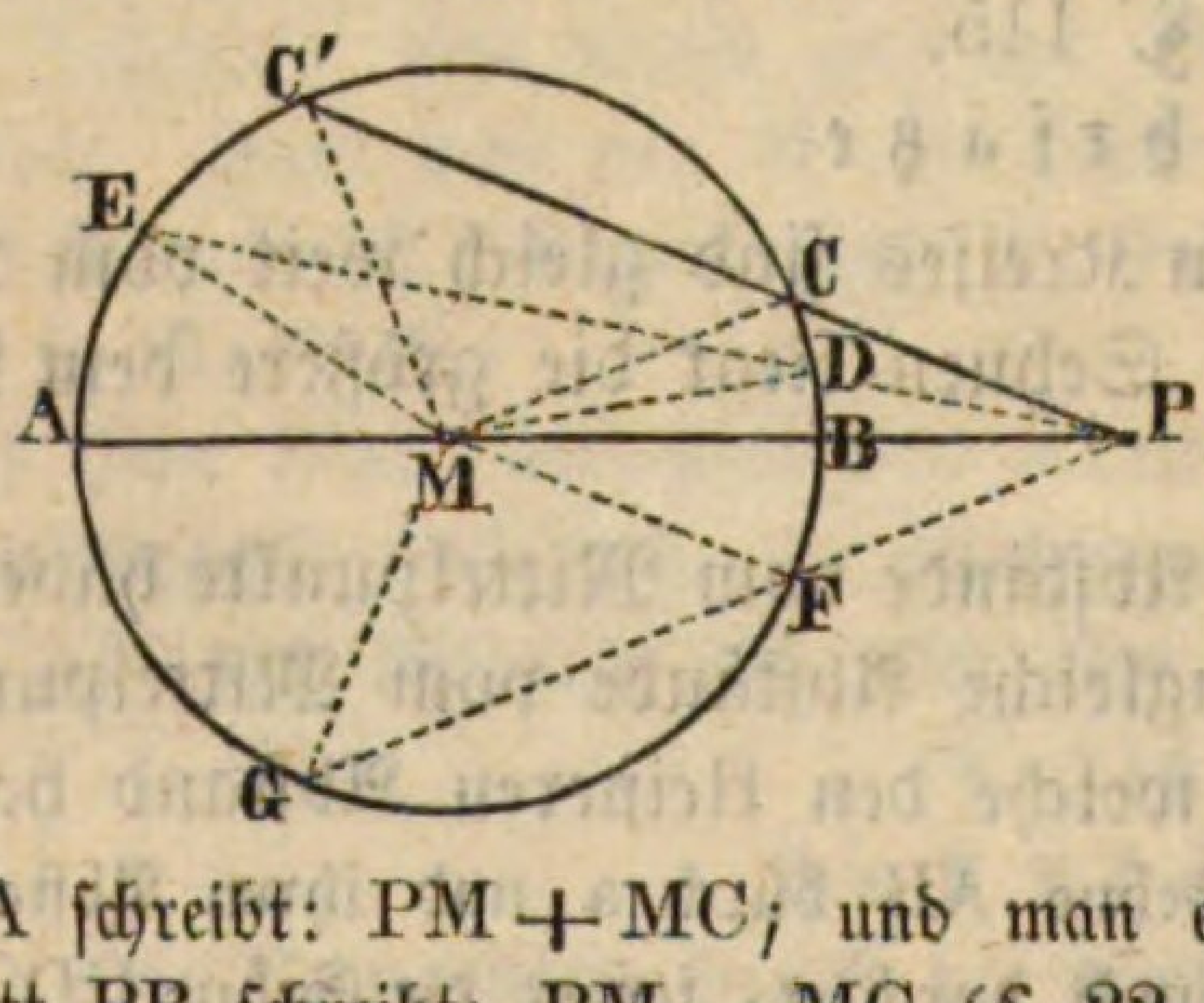
Anmerk. Auch ohne Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes kann man den Beweis durch Vergleichung der Dreiecke MEA und MFC führen. Aus $a = b$, und auch aus $\alpha = \beta$, folgt ihre Congruenz; für die andern Fälle lege man die Dreiecke so aufeinander, daß die rechten Winkel sich decken, und führe den Beweis indirect.

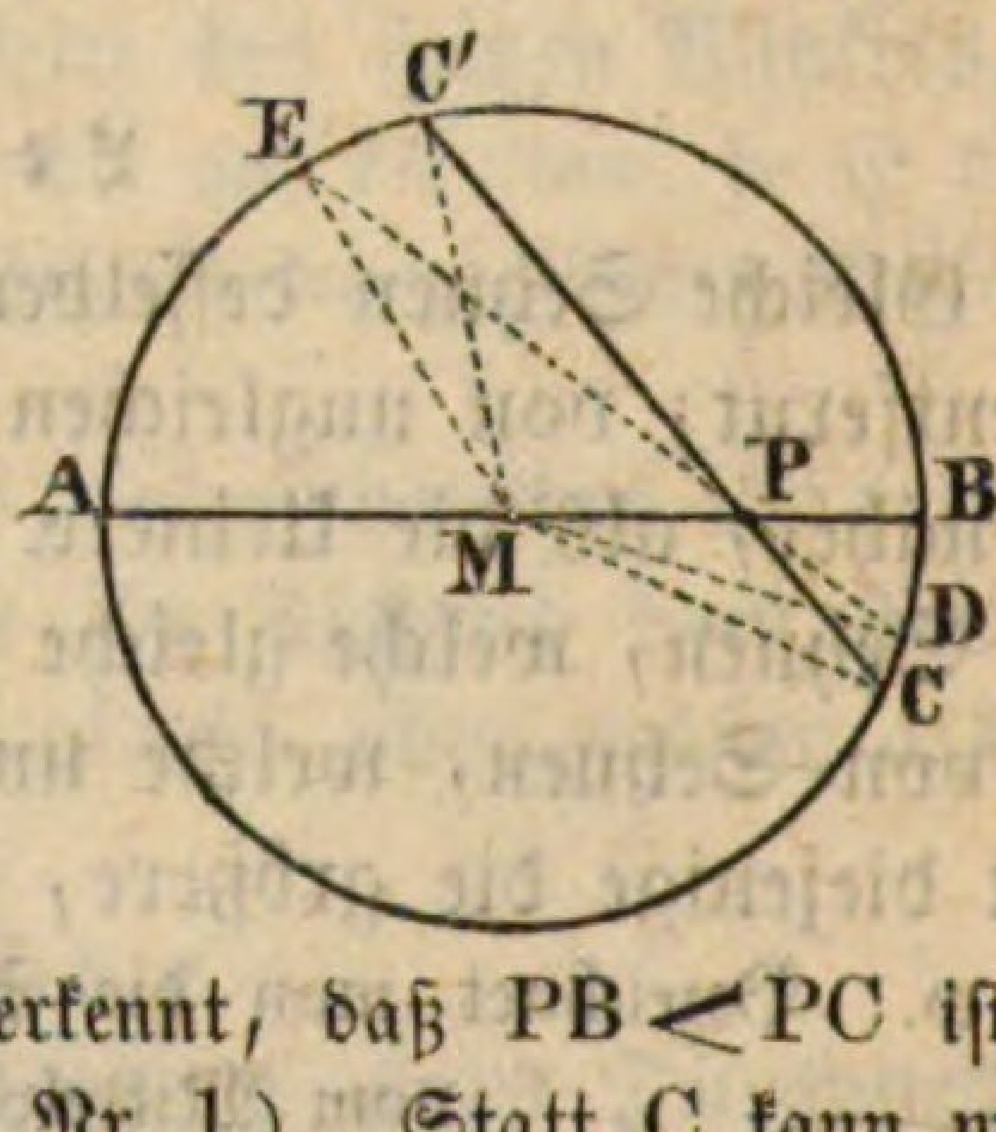
§. 116.

Ueber die Verbindungslinien eines Punktes mit Punkten der Peripherie eines Kreises; die längste und kürzeste dieser Linien.

1) Unter allen Verbindungslinien eines außerhalb oder innerhalb des Kreises liegenden Punktes P mit Punkten der Peripherie ist eine die längste, und eine die kürzeste. Man findet beide, wenn man P mit dem Mittelpunkte M des Kreises verbindet und diese Linie verlängert, bis sie die Kreislinie zweimal (in A und B) schneidet. Von den beiden Linien PA und PB ist diejenige (PA) die längste von allen Verbindungslinien, in welcher der Mittelpunkt liegt, und diejenige (PB) die kürzeste, in deren Verlängerung der Mittelpunkt liegt.

Bew. Legt man durch P eine beliebige andere Linie, welche die Peripherie in C und C′ schneidet, so erkennt man, daß PA > PC ist, wenn man





statt PA schreibt: PM + MC; und man erkennt, daß PB < PC ist, wenn man statt PB schreibt: PM — MC (§. 22. Nr. 1.). Statt C kann man auch überall C′ setzen.

2) Die Linie PC (oder PC′) wird um so größer, je mehr der Punkt C (oder C′) in der Peripherie dem Punkte A sich nähert; sie wird aber um so kleiner, je mehr C (oder C′) dem Punkte B sich nähert.

Bew. Denn zieht man durch P eine andere die Peripherie in E und D schneidende Linie, so findet man, daß PE > PC′ ist, durch Vergleichung der

$\Delta\Delta$PME und PMC′ (§. 27. I.), und daß PD $<$ PC, durch Vergleichung der $\Delta\Delta$PMD und PMC.

3) Daß man von P aus nicht drei gleich lange Linien nach der Peripherie ziehen kann, folgt daraus, daß drei Punkte nur in der Peripherie eines Kreises liegen können. Auf derselben Seite von PA kann man aber auch nicht zwei gleich lange Linien von P nach Punkten der Peripherie ziehen, wie dies aus Nr. 2. unmittelbar folgt. Hingegen giebt es zu jeder, P mit der Peripherie verbindenden Linie auf der andern Seite von PA eine eben so lange. Macht man nämlich $\measuredangle$APG = $\measuredangle$APC′, so ist PG = PC′ und PF = PC; denn ΔPMG $\cong$ ΔPMC′ und ΔPMF $\cong$ ΔPMC (§. 25. IV.). Daß PG den Kreis um M schneiden muß, folgt aus §. 28. VII. und §. 113. Nr. 5. — In der zweiten Figur möge sich der Leser die durch P gehende Sehne FG hinzudenken.

§. 117.
Ueber die Sehnen, welche durch einen bestimmten Punkt gelegt werden können; die längste und kürzeste dieser Sehnen.

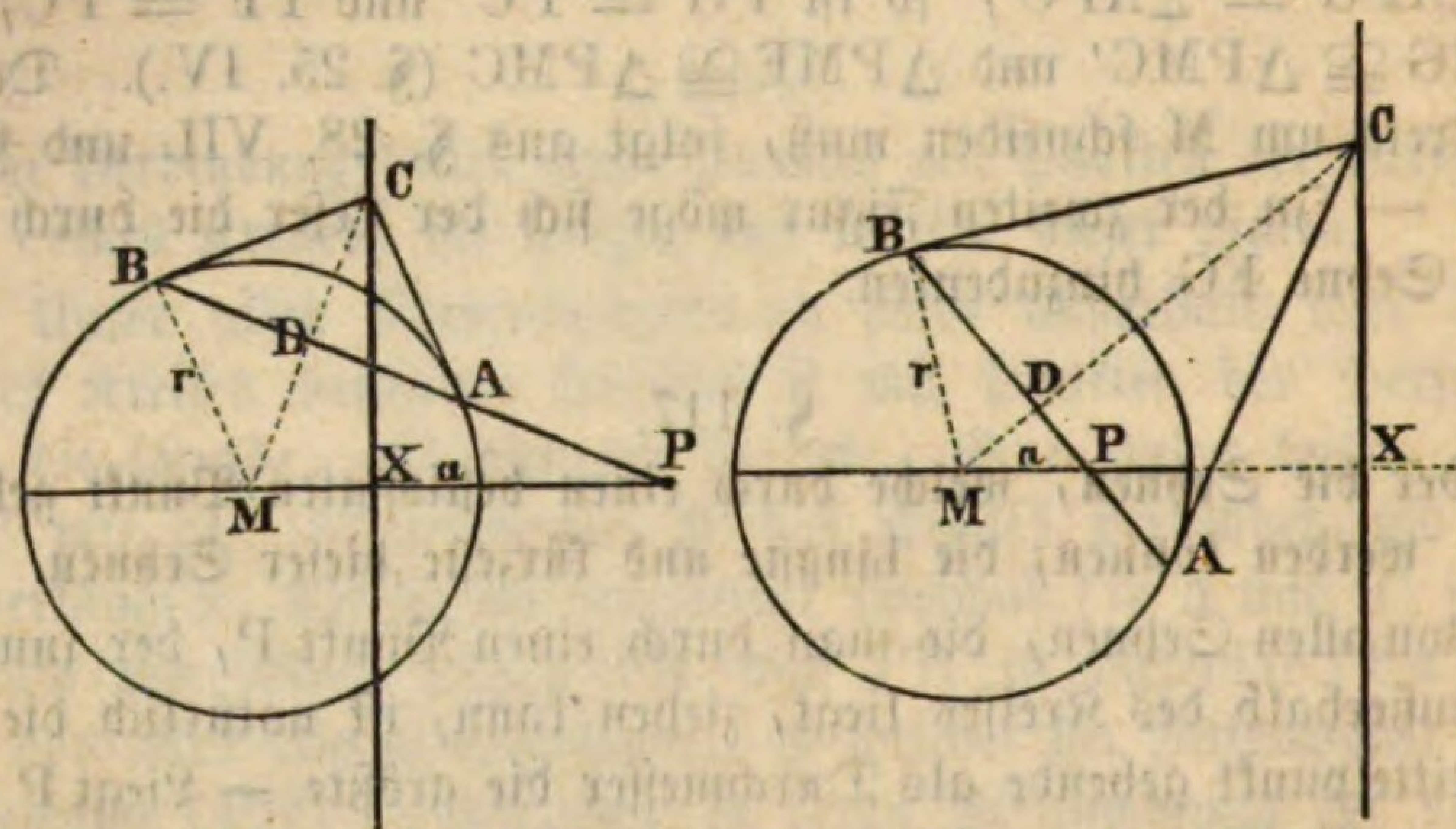
Von allen Sehnen, die man durch einen Punkt P, der innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt, ziehen kann, ist natürlich die durch den Mittelpunkt gehende als Durchmesser die größte. — Liegt P außerhalb des Kreises, so giebt es eine kleinste Sehne nicht, sondern die Sehnen werden um so kleiner, je mehr die von P ausgehende, die Sehne erzeugende Secante sich der Tangente nähert, und werden beim Uebergange in die Tangente zu Null. — Liegt P aber innerhalb des Kreises, so giebt es eine kleinste Sehne, nämlich diejenige, welche auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes M mit P senkrecht steht; denn der Abstand jeder andern Sehne vom Mittelpunkt ist kleiner als MP, und zwar als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem MP Hypotenuse ist. — Daß es übrigens zwischen der kleinsten und größten Sehne von jeder Länge zwei gleiche Sehnen giebt, die durch P gehen, folgt aus dem vorhergehenden §.

Anmerk. 1. Zieht man durch einen außerhalb oder innerhalb des Kreises liegenden Punkt P beliebig viel Sehnen, legt durch die Endpunkte jeder Sehne Tangenten und verlängert jede zwei derselben Sehne zugehörigen Tangenten bis zu ihrem Durchschnittspunkt: so liegen die Durchschnittspunkte aller dieser Tangenten-Paare in einer geraden Linie, welche den durch P gehenden Durchmesser senkrecht schneidet.

Bew. Der Beweis soll durch folgenden Schluß geführt werden, über den der Leser zunächst sicher sein muß. Hat man in einer Ebene beliebig viele Punkte und fällt von jedem eine Senkrechte auf eine Linie MP in dieser Ebene, und treffen alle diese Senkrechten denselben Punkt X der Linie MP: so liegen auch

alle erwähnten Punkte in einer geraden Linie, nämlich in der in X auf MP senkrecht stehenden Linie. Um diesen Schluß bei dem vorliegenden Satze anzuwenden, ziehen wir durch den gegebenen Punkt P eine Sehne, legen durch ihre Endpunkte Tangenten, fällen vom Durchschnittspunkt derselben eine Senkrechte auf den durch P gehenden Durchmesser und suchen den Fußpunkt X dieser Senkrechten durch die gegebenen Stücke der Figur zu bestimmen. Nachher zeigen wir, daß die Senkrechte, vom Durchschnittspunkt jedes anderen Tangenten-Paares auf den durch P gehenden Durchmesser gefällt, ebenfalls den Punkt X zum Fußpunkt hat.

Es sei AB eine durch P gehende Sehne, AC und BC Tangenten, die sich



in C schneiden, und CX sei senkrecht auf MP gefällt. Um X durch bekannte Stücke der Figur zu bestimmen, suchen wir die Länge MX. Zieht man MB, dann noch MC, welche Linie AB senkrecht in D schneidet (§. 114. Nr. 3.), und betrachtet nun den Winkel PMC, dessen Schenkel MP und MC sind: so zeigt die Figur die Projection jedes Schenkels auf den andern; daher ist nach §. 61. (oder aus Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$PMD und CMX)

$$(1.) \qquad MP.MX = MC.MD.$$

Weil aber $\measuredangle$MBC = R ist, so folgt aus §. 88. Nr. 1. (oder auch aus §. 61.)

$$(2.) \qquad MC.MD = MB^2.$$

Aus (1.) und (2.) folgt aber MP.MX = MB² oder

$$(3.) \qquad MX = \frac{MB^2}{MP}.$$

Bezeichnet man den Radius MB durch r und die bekannte Länge MP durch a, so ist also

$$MX = \frac{r^2}{a}.$$

Weil nun in der zum Grunde liegenden Figur die Sehne AB nur die Eigenschaft hat, daß sie durch P geht, sonst ganz beliebig gezogen ist, und weil sich $MX = \frac{r^2}{a}$ von der Lage der AB ganz unabhängig ergeben hat (denn MX hängt nur von r und a ab): so muß die Senkrechte, aus dem Durchschnitts-

punkte jedes anderen Tangenten-Paares auf MP gefällt, auch einen Punkt der MP treffen, welcher von M den Abstand $\frac{r^2}{a}$ hat, d. h. auch den Punkt X, wodurch bewiesen ist, daß die Durchschnittspunkte aller Tangenten-Paare in CX liegen müssen.

Ist $a > r$, so ist $\frac{r^2}{a} < r$; ist aber $a < r$, so ist $\frac{r^2}{a} > r$. Hieraus folgt: Liegt P außerhalb des Kreises, so schneidet CX den Kreis; liegt P innerhalb des Kreises, so liegt CX außerhalb desselben.

Anmerk. 2. Zieht man von jedem Punkte einer geraden Linie, welcher außerhalb des Kreises liegt, zwei Tangenten an den Kreis und verbindet die Berührungspunkte jedes Tangenten-Paares mit einander, so schneiden sich alle diese Sehnen in einem Punkt, der innerhalb, oder außerhalb des Kreises liegt, je nachdem die Linie außerhalb des Kreises liegt, oder ihn schneidet.

Bew. indirect aus Nr. 1.

Die Winkel im Kreise. Abhängigkeit der Winkel und der Lage und der Länge der Linien von einander.

§. 118.

Lehrsätze.

1) Zu gleichen Centriwinkeln desselben Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Bogen und Sehnen, congruente Kreisausschnitte und Kreisabschnitte.

Bew. durch Aufeinanderlegen. (Vergl. den Beweis zu §. 111. XII.)

2) Sind die Centriwinkel ungleich, so gehört zu dem größeren Centriwinkel auch ein größerer Bogen, Kreisausschnitt und Kreisabschnitt; auch die größere Sehne, wenn die Winkel concave sind. Bei convexen Centriwinkeln gehört zum größeren Winkel die kleinere Sehne.

Bew. Legt man die Centriwinkel so auf einander, daß ein Paar der begrenzenden Radien sich decken, so erkennt man das von den Bogen, Kreisausschnitten und Kreisabschnitten Behauptete unmittelbar, weil der Theil kleiner ist, als das Ganze. In Bezug auf die Sehnen benutze man §. 27. I.

3) Auch die Umkehrungen der vorstehenden Sätze sind richtig. Es gehören z. B. zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel und gleiche Sehnen u. s. w.; zum größeren Bogen gehört der größere Centriwinkel, aber nur dann die größere Sehne, wenn die zu den ungleichen Bogen gehörigen Centriwinkel concave sind. In Bezug auf die Sehnen sind deshalb besondere Bedingungen nöthig, weil zu jeder Sehne zwei Bogen, zwei Centriwinkel und zwei Kreisausschnitte und Kreisabschnitte gehören. So können zu ungleichen Bogen gleiche Sehnen

gehören, wenn nämlich die Bogen zusammen der ganzen Peripherie gleich sind.

Die Beweise sind indirect oder durch Aufeinanderlegen zu führen.

4) Gleiche Kreisausschnitte und gleiche Kreisabschnitte desselben Kreises oder gleicher Kreise sind auch immer congruent.

Bew. Durch Aufeinanderlegen und dann indirect.

5) Die vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbirt nicht nur diese Sehne und den zugehörigen Centriwinkel, sondern auch den Bogen, Kreisausschnitt und Kreisabschnitt.

§. 119.
Zusätze und Erklärungen.

1) Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Theile, welche Halbkreise heißen; auch die Peripherie wird durch ihn halbirt.

Beweis aus Nr. 1. des vorigen §.

2) Zwei sich senkrecht schneidende Durchmesser zerlegen den Kreis (auch die Peripherie) in vier congruente Theile, welche Quadranten heißen. Der Centriwinkel des Quadranten ist $= R$.

3) Drei Durchmesser, welche sechs gleiche Centriwinkel bilden, zerlegen den Kreis (auch die Peripherie) in sechs gleiche Theile, welche Sextanten heißen. Der Centriwinkel des Sextanten ist $= \frac{2}{3}R = 60°$; folglich ist seine Sehne dem Radius gleich (§. 21. Nr. 5.).

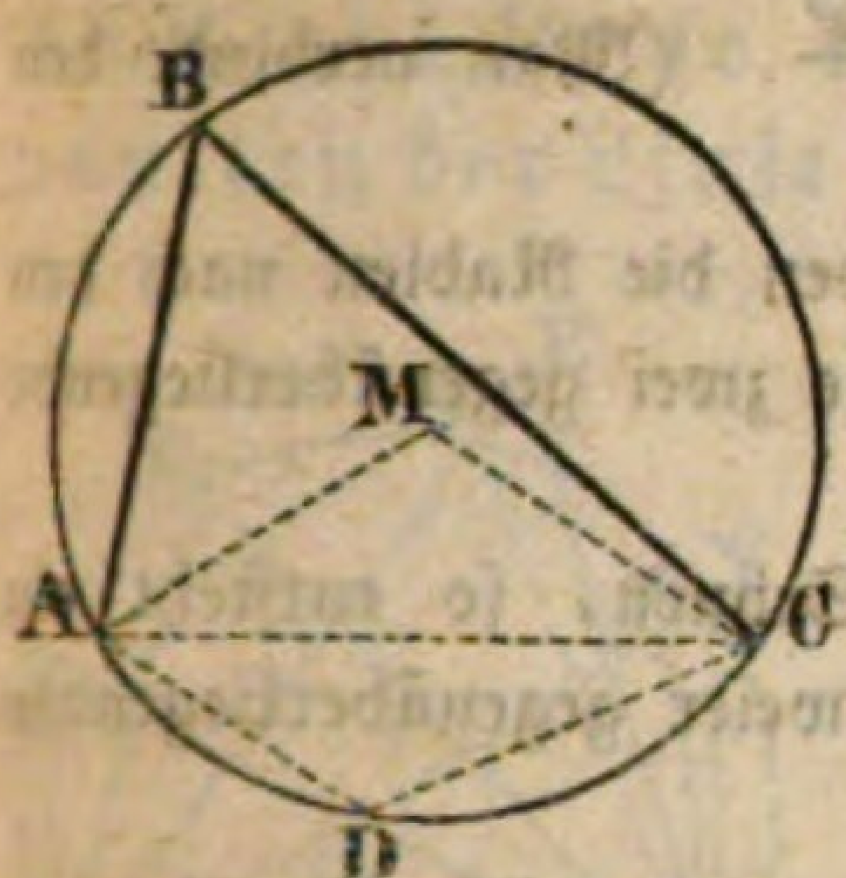
4) Zerlegt man den rechten Centriwinkel in 90 gleiche Theile, so daß jeder Theil 1° ist, so wird durch die Theilungslinien der zugehörige Bogen in 90 gleiche Bogen-Grade zerlegt. Die ganze Peripherie hat 360 Bogen-Grade, der Bogen-Grad hat 60 Minuten, die Minute 60 Secunden, so daß jeder Bogen genau so viel Bogen-Grade, Minuten, Secunden enthält, als der zugehörige Centriwinkel Winkel-Grade, Minuten, Secunden.

5) Ist ein Bogen a eines Kreises gleich der Summe mehrerer Bogen b, c, d, ..., so ist der zu a gehörige Centriwinkel α gleich der Summe der zu den Bogen b, c, d, ... gehörigen Centriwinkeln $\beta, \gamma, \delta, \ldots$. Der Satz gilt auch für algebraische Summen. Ist z. B. $a = b - c + d$, so folgt $\alpha = \beta - \gamma + \delta$.

Bew. Durch Aneinanderlegen der Winkel $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ Der Winkel $\beta + \gamma + \delta + ..$ hat dann nach der Voraussetzung a zum Bogen, ist also $= \alpha$.

§. 120.
Erklärung.

Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen dieses Kreises sind, z. B. $\measuredangle ABC$, heißt ein Peripheriewinkel. Der Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln

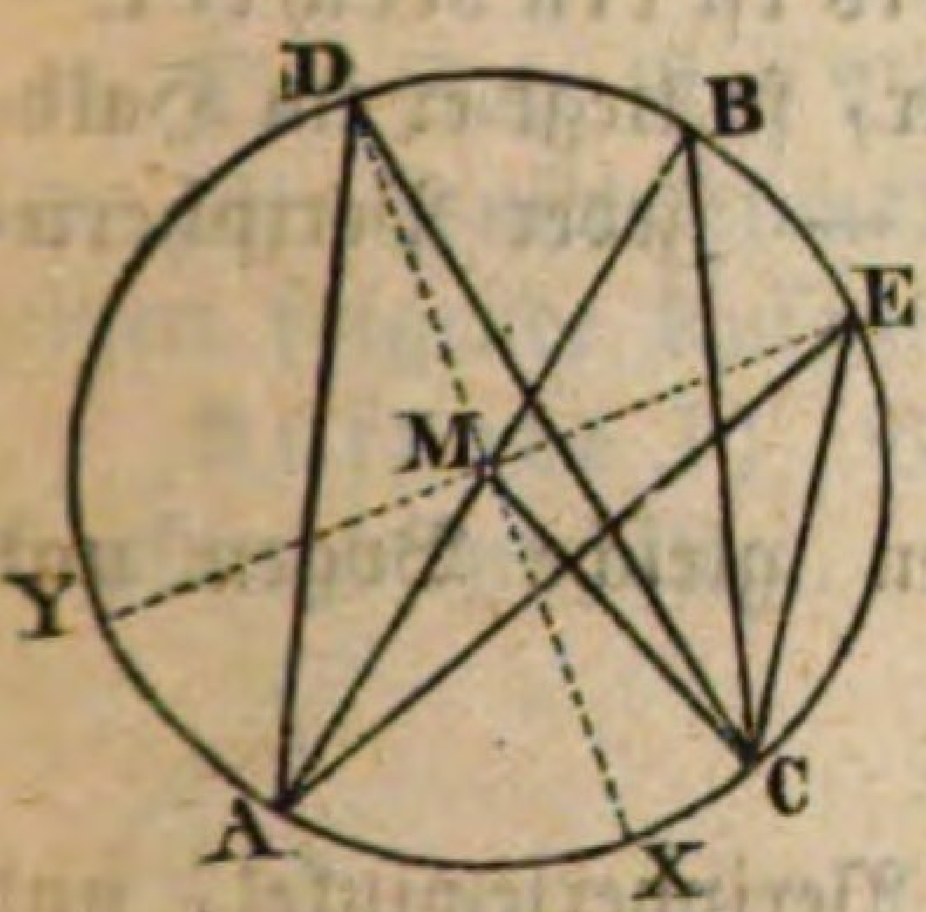


heißt der **zugehörige** Bogen, oder man sagt: der Peripheriewinkel **steht** auf diesem Bogen (ADC). Zieht man die Sehne AC, so zerlegt sie den Kreis in zwei Kreisabschnitte und man sagt auch: der Peripheriewinkel liegt in demjenigen dieser Kreisabschnitte, in welchem sein Scheitel und seine Schenkel liegen. Hiernach steht der Peripheriewinkel ABC auf dem Bogen ADC und liegt im Kreisabschnitt ACB; hingegen steht der Peripheriewinkel ADC auf dem Bogen ABC und liegt im Kreisabschnitt ACD. Der Peripheriewinkel ABC steht mit dem concaven Centriwinkel AMC auf demselben Bogen; hingegen steht der Peripheriewinkel ADC mit dem convexen Centriwinkel AMC auf demselben Bogen.

§. 121.
Lehrsatz.

Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß als der Centriwinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht. Es soll also jeder der drei Winkel ABC, ADC, AEC gleich $\frac{1}{2}\measuredangle$AMC sein.

Bew. Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:



1) der Mittelpunkt des Kreises kann in einem Schenkel des Peripheriewinkels liegen ($\measuredangle$ABC);
2) er liegt zwischen den Schenkeln ($\measuredangle$ADC);
3) er liegt außerhalb der Schenkel ($\measuredangle$AEC).

Im ersten Falle ist $\measuredangle$AMC als Außenwinkel gleich der Summe der beiden Winkel an der Grundlinie im gleichschenkligen Dreieck MBC, also gleich $\measuredangle$MBC + $\measuredangle$MCB; folglich ist er doppelt so groß als jeder einzelne. Aber aus

$\measuredangle AMC = 2 . \measuredangle ABC$ folgt $\measuredangle ABC = \frac{1}{2}\measuredangle AMC$.

Die beiden andern Fälle kann man auf den ersten Fall zurückführen, wenn man die Durchmesser DX und EY zieht. Es läßt sich dann $\measuredangle$ADC als Summe, $\measuredangle$AEC als Differenz zweier Peripheriewinkel ausdrücken, von denen ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht. Es ist also:

$\measuredangle XDA = \frac{1}{2}\measuredangle XMA$	$\measuredangle YEC = \frac{1}{2}\measuredangle YMC$
$\measuredangle XDC = \frac{1}{2}\measuredangle XMC$, addirt:	$\measuredangle YEA = \frac{1}{2}\measuredangle YMA$, subtrah.:
$\measuredangle ADC = \frac{1}{2}\measuredangle AMC.$	$\measuredangle AEC = \frac{1}{2}\measuredangle AMC.$

Zur Uebung. 1) Von einem Punkte der Peripherie sind zwei Sehnen a und b gezogen; wie groß ist der Peripheriewinkel, den sie bilden, wenn zu a der Centriwinkel α und zu b der Centriwinkel β gehört?

Antw. Liegt der Mittelpunkt des Kreises zwischen a und b, so ist der gesuchte Winkel $= 2R - \frac{\alpha + \beta}{2}$; liegt der Mittelpunkt nicht zwischen a und

b, und wird $\alpha > \beta$ vorausgesetzt, so ist er $= \frac{\alpha - \beta}{2}$. (Man verbinde den Mittelpunkt mit den Endpunkten von a und b.)

2) Schneiden sich zwei Sehnen senkrecht, so bilden die Radien nach den Endpunkten dieser Sehnen vier Centriwinkel, von denen je zwei gegenüberliegende zusammen 2R betragen.

Bew. Verbindet man zwei Endpunkte beider Sehnen, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen spitze Winkel die Hälften zweier gegenüberliegenden Centriwinkel sind.

3) Wenn die vier Radien nach den Endpunkten zweier sich schneidenden Sehnen vier Centriwinkel bilden, von denen je zwei gegenüberliegende zusammen 2R betragen, so schneiden sich die Sehnen senkrecht.

Bew. Die Hälften solcher zwei Centriwinkel sind die im Beweise zu Nr. 2. angeführten spitzen Winkel.

§. 122.

Folgerungen.

1) Ein Peripheriewinkel ist auch der Hälfte eines Centriwinkels gleich, wenn beide auf gleichen Bogen stehen (§. 118. Nr. 3.).

2) **Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen oder auf gleichen Bogen sind einander gleich.**

Bew. Als Hälften desselben oder gleicher Centriwinkel.

3) **Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein Rechter.** — Umgekehrt: Ist ein Peripheriewinkel ein Rechter, so liegt er im Halbkreise, d. h. seine Sehne ist ein Durchmesser. — Jeder Peripheriewinkel ist concav.

Bew. durch den Centriwinkel.

4) Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Bogen und Sehnen.

Bew. durch die Centriwinkel.

5) Auf ungleichen Bogen stehen ungleiche Peripheriewinkel, und zwar steht auf dem größeren Bogen der größere Peripheriewinkel. Umgekehrt steht bei ungleichen Peripheriewinkeln der größere auf dem größeren Bogen. — Die Sätze gelten auch für Sehnen, wenn die Peripheriewinkel spitze sind. Sind sie stumpf, so findet das Umgekehrte Statt.

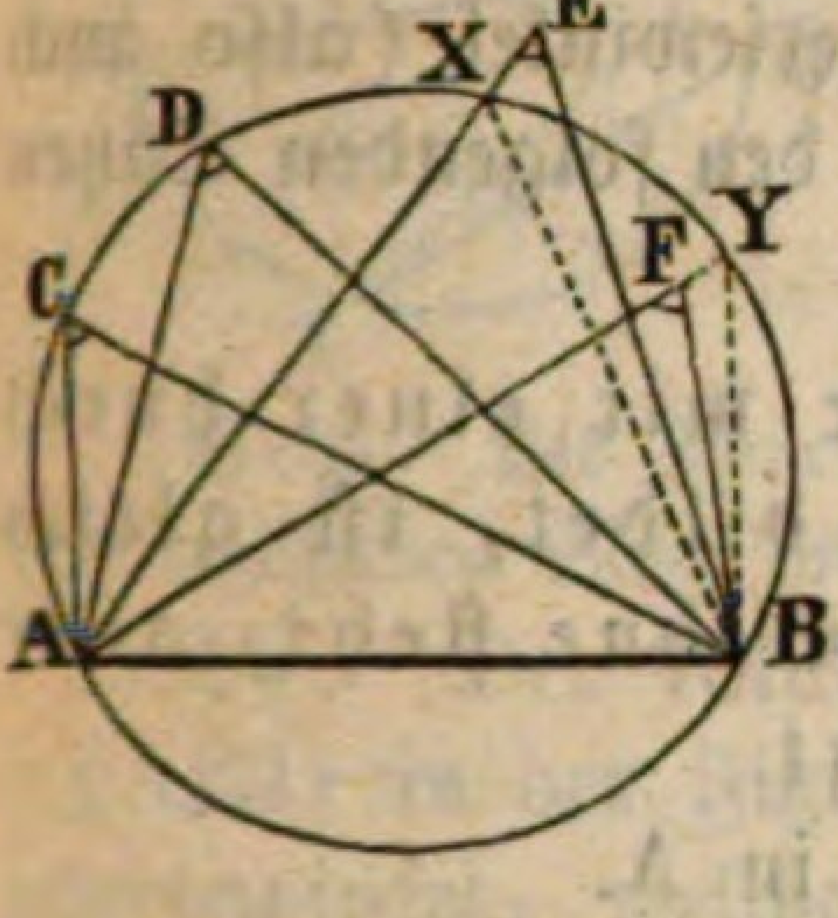
Bew. durch die Centriwinkel.

6) Stehen die Peripheriewinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ resp. auf den Bogen a, b, c, d, ... und ist $a = b + c + d + \ldots$ so ist auch $\alpha = \beta + \gamma + \delta + \ldots$. Der Satz gilt auch für algebraische Summen und auch umgekehrt.

Bew. durch die Centriwinkel (§. 119. Nr. 5.).

7) **Construirt man über eine Linie AB auf derselben Seite dieser Linie beliebig viele gleiche Winkel ACB, ADB,**

AEB, AFB, so liegen alle Scheitelpunkte mit den Endpunkten der Linie AB in der Peripherie desselben Kreises.



Bew. Durch drei dieser Punkte kann man einen Kreis legen, z. B. durch A, B und C; es wird behauptet, daß D, E, F auch in der Peripherie dieses Kreises liegen. Gesetzt, dieser Kreis ginge durch E und F nicht, sondern AE und AF schnitten den Kreis in X und Y: so ziehe man XB und YB. Als Peripheriewinkel auf demselben Bogen müßten dann die Winkel AXB und AYB gleich ∡ACB sein, und weil dieser Winkel nach der Voraussetzung gleich ∡AEB und gleich ∡AFB ist, so würde folgen:

$$\measuredangle AXB = \measuredangle AEB, \quad \measuredangle AYB = \measuredangle AFB.$$

Aus diesem Widerspruche (§. 15. II.) folgt, daß E und F auch in der durch A, B, C gelegten Peripherie liegen müssen.

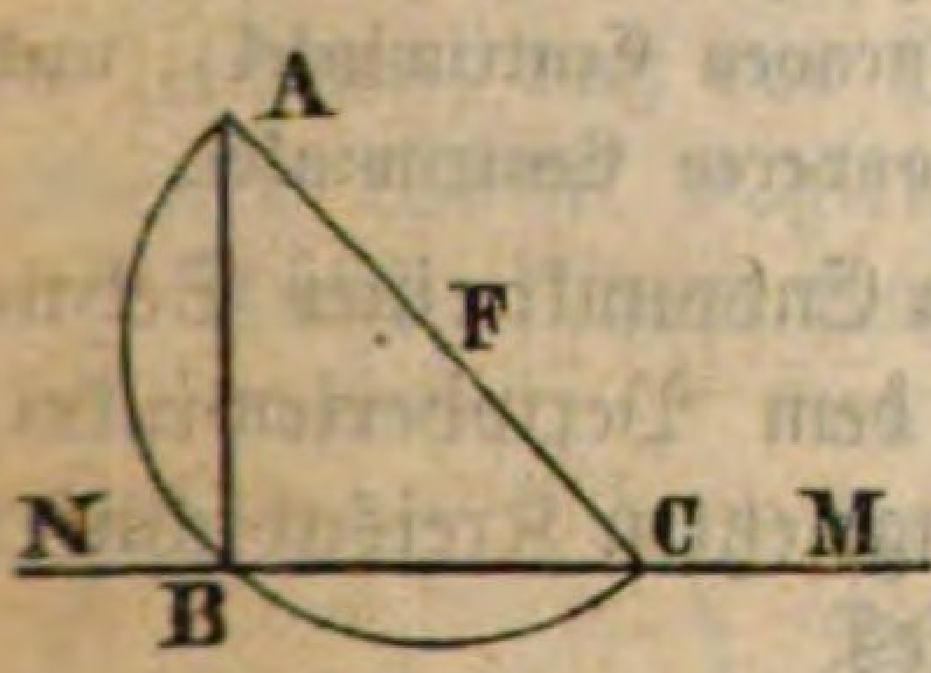
Anmerk. Man sagt: ein Kreis geht durch einen Punkt A, ein Kreis schneidet eine Linie in den Punkten A und B, zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B u. s. w., anstatt zu sagen: die Peripherie eines Kreises geht durch A, die Peripherie eines Kreises schneidet eine Linie in A und B, u. s. w.

§. 123.

Constructionen.

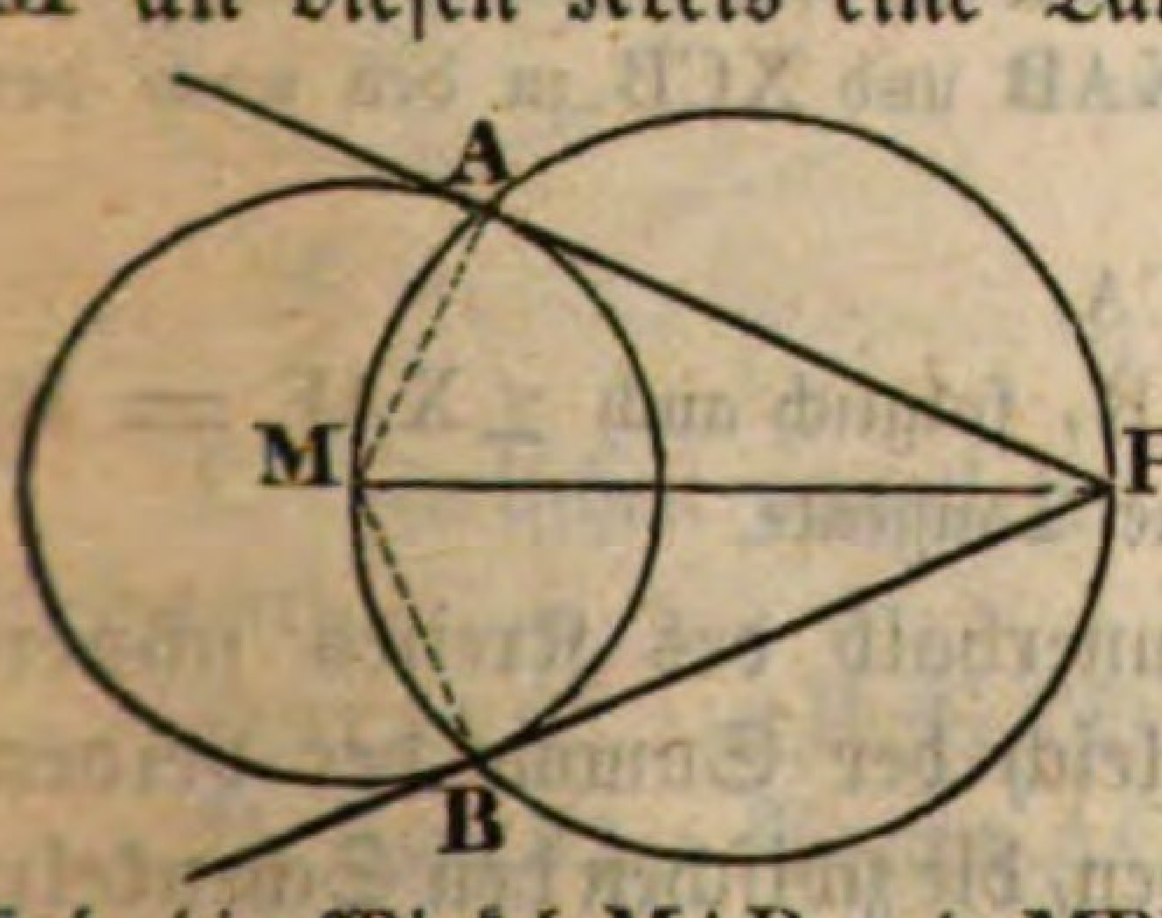
Der Satz »der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter« ist für die Constructionslehre wichtig. Eine Anwendung dieses Satzes zeigen folgende Aufgaben:

Aufgabe 1) Von einem Punkte A auf eine Linie NM eine Senkrechte zu fällen.



Aufl. Man verbinde A mit einem beliebigen Punkte C der Linie NM, schlage über AC einen Halbkreis (d. h. man halbire AC in F und schlage um F mit FA als Radius einen Halbkreis, dessen Durchmesser AC wird), welcher NM in B schneiden mag: so ist AB ⊥ NM, weil ∡ABC = R als Winkel im Halbkreise.

Aufgabe 2) Von einem Punkte P außerhalb des Kreises um M an diesen Kreis eine Tangente zu ziehen.



Aufl. Man ziehe PM, schlage um PM einen Kreis (dessen Durchmesser also PM wird) und ziehe von P nach den Durchschnittspunkten A und B dieses Kreises mit dem Kreise um M die Linien PA und PB: so sind diese Linien die von P an den Kreis um M gehenden Tangenten.

Bew. Zieht man MA und MB, so sind die Winkel MAP und MBP als Winkel im Halbkreise rechte Winkel.

§. 124.

Lehrsätze.

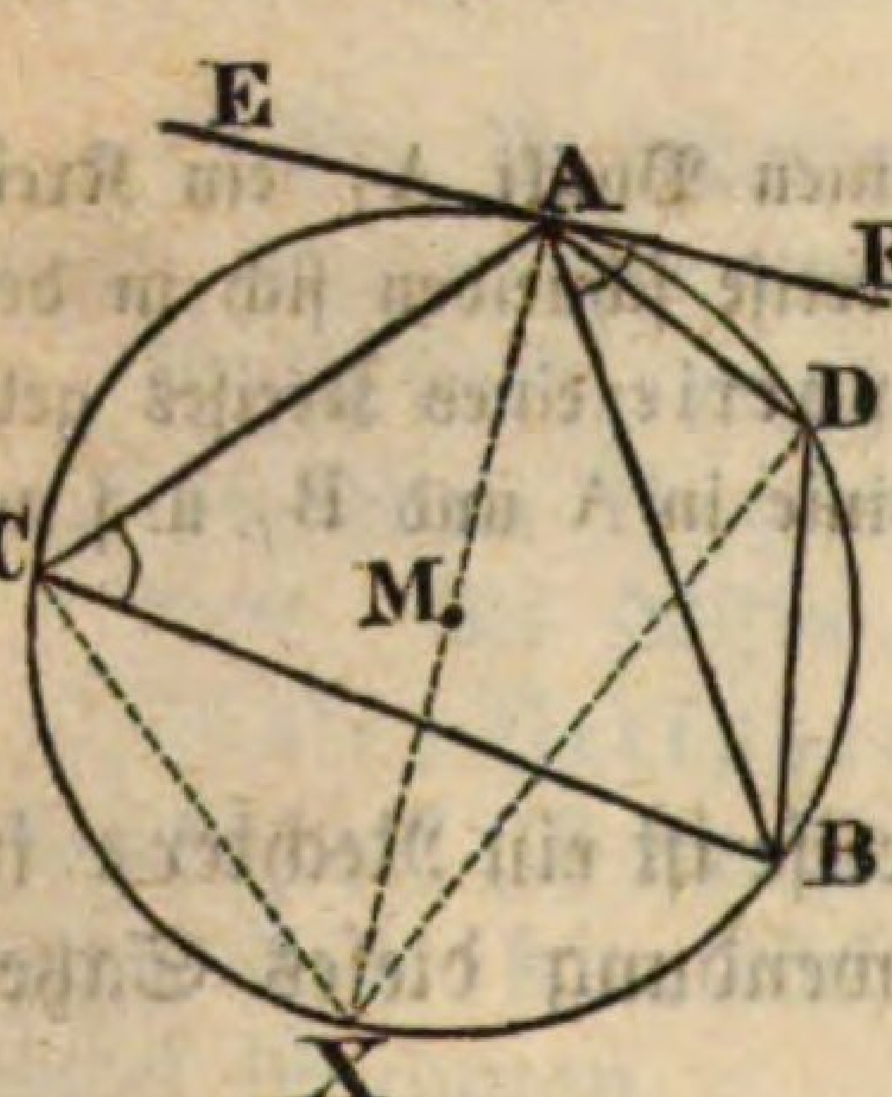
Alle Winkel, welche von Sehnen, Tangenten und Secanten eines Kreises gebildet werden, lassen sich auf Peripheriewinkel (also auch auf Centriwinkel) dieses Kreises reduciren. Von den folgenden Sätzen sind die ersten zwei die wichtigsten.

I. Der Winkel, den eine Tangente mit einer durch den Berührungspunkt gelegten Sehne bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel, welcher auf der Sehne steht, aber im entgegengesetzten Kreisabschnitt liegt.

Voraussf. EF berührt den Kreis um M in A.

Beh. $\measuredangle FAB = \measuredangle ACB$ und $\measuredangle EAB = \measuredangle ADB$.

Bew. Zieht man den Durchmesser AX und die Sehnen XC und XD, so ist $\measuredangle XAB = \measuredangle XCB$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen, und zieht man jeden dieser Winkel von dem rechten Winkel ab, von welchem er ein Theil ist ($\measuredangle$ XAF und XCA), so entsteht:



1) $\measuredangle FAB = \measuredangle ACB$.

Eben so ist $\measuredangle XAB = \measuredangle XDB$, und addirt man zu jedem dieser Winkel den anstoßenden rechten hinzu ($\measuredangle$ XAE und XDA), so entsteht:

2) $\measuredangle EAB = \measuredangle ADB$.

Ist AB selbst ein Durchmesser, so sind die Winkel, deren Gleichheit bewiesen werden soll, rechte Winkel.

Anmerk. Aus diesem Satze folgt noch: Von den beiden Winkeln, die eine Tangente mit einer durch den Berührungspunkt gelegten Sehne bildet, ist der spitze gleich dem halben zur Sehne gehörigen concaven Centriwinkel, und der stumpfe gleich dem halben zur Sehne gehörigen convexen Centriwinkel.

II. Ist der Winkel, welchen eine durch den Endpunkt einer Sehne gelegte Linie mit der Sehne bildet, gleich dem Peripheriewinkel, welcher auf der Sehne steht, aber im entgegengesetzten Kreisabschnitt liegt: so ist die Linie eine Tangente des Kreises.

Voraussf. (Figur zu I.) $\measuredangle FAB = \measuredangle ACB$.

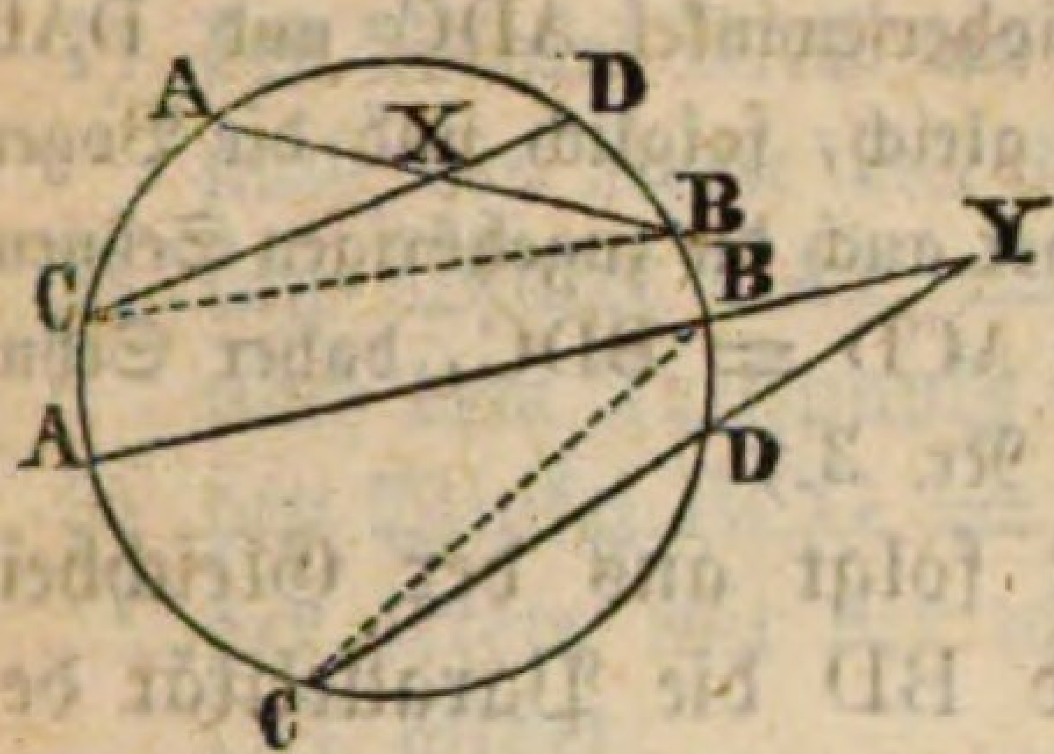
Behaupt. AF berührt den Kreis um M in A.

Bew. Addirt man die gleichen Winkel XAB und XCB zu den nach der Voraussetzung gleichen Winkeln hinzu, so folgt

$$\measuredangle XAF = \measuredangle XCA.$$

Es ist aber als Winkel im Halbkreise $\measuredangle XCA = R$, folglich auch $\measuredangle XAF = R$, und da XA ein Durchmesser ist, so ist AF eine Tangente.

III. Der Winkel, den zwei sich innerhalb des Kreises schneidende Sehnen mit einander bilden, ist gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel, welche auf den Bogen stehen, die zwischen den Schenkeln



dieses Winkels und seines Scheitelwinkels liegen. — Schneiden sich aber die Sehnen außerhalb des Kreises (Secanten), so ist er gleich der Differenz der beiden Peripheriewinkel, welche auf den zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Bogen stehen.

Bew. Als Außenwinkel (§. 15. II.) ist $\measuredangle AXC = \measuredangle ABC + \measuredangle BCD$; aus demselben Satze folgt aber auch: $\measuredangle AYC = \measuredangle ABC - \measuredangle BCD$.

IV. Der Winkel, den eine Tangente mit einer Secante bildet ($\measuredangle ABD$ in der Figur zu §. 130.), ist gleich der Differenz der Peripheriewinkel, welche auf den Bogen stehen, die vom Berührungspunkt bis zu den Durchschnittspunkten der Secante mit der Peripherie reichen ($\measuredangle ABD = \measuredangle ACD - \measuredangle ADC$).

Bew. durch die Sätze: §. 15. II. und Nr. I. dieses §.

V. Der dem Kreise zugekehrte Winkel, den zwei Tangenten mit einander bilden, ist gleich der Differenz der Peripheriewinkel, welche auf den Bogen stehen, in welche die Peripherie durch die Berührungspunkte zerlegt wird.

Bew. wie der zu IV., wenn man die Berührungspunkte verbindet.

VI. Der dem Kreise zugekehrte Winkel, welchen zwei Tangenten mit einander bilden, ist immer concav.

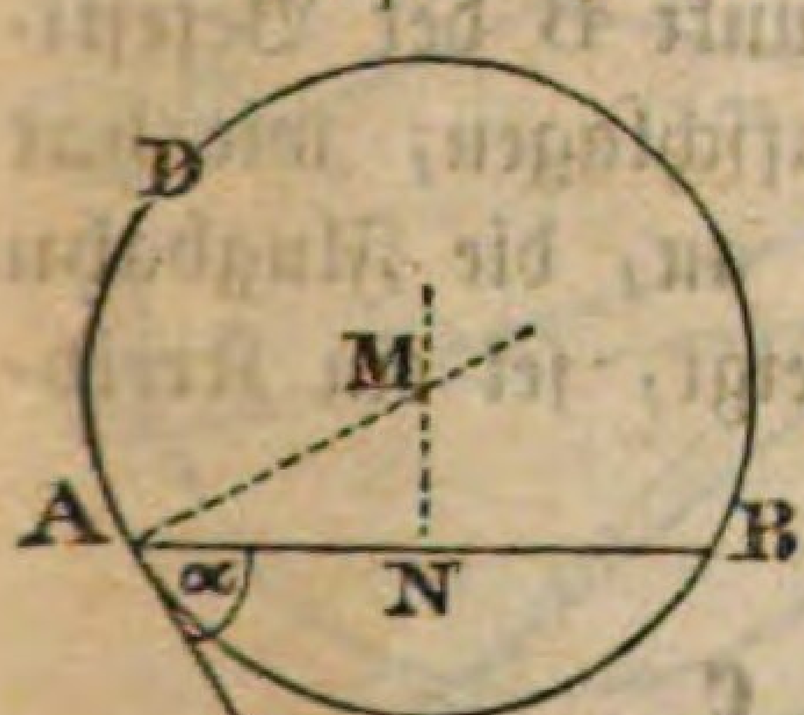
Bew. folgt aus V. und §. 122. Nr. 3.

§. 125.

Aufgabe.

Durch die Endpunkte einer Linie AB einen solchen Kreisbogen zu zeichnen, daß der Peripheriewinkel über der Sehne AB einem gegebenen Winkel α gleich wird.

Aufl. Man trage an AB in einem Endpunkte den Winkel α an, etwa $\measuredangle BAC = \alpha$, errichte $AM \perp AC$ und im Mittelpunkt der Linie AB, $NM \perp AB$. Der Durchschnittspunkt M der beiden Senkrechten ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, MA der Radius und ADB der verlangte Bogen.



Bew. §. 111. IX.; §. 113. Nr. 3. und §. 124. I.

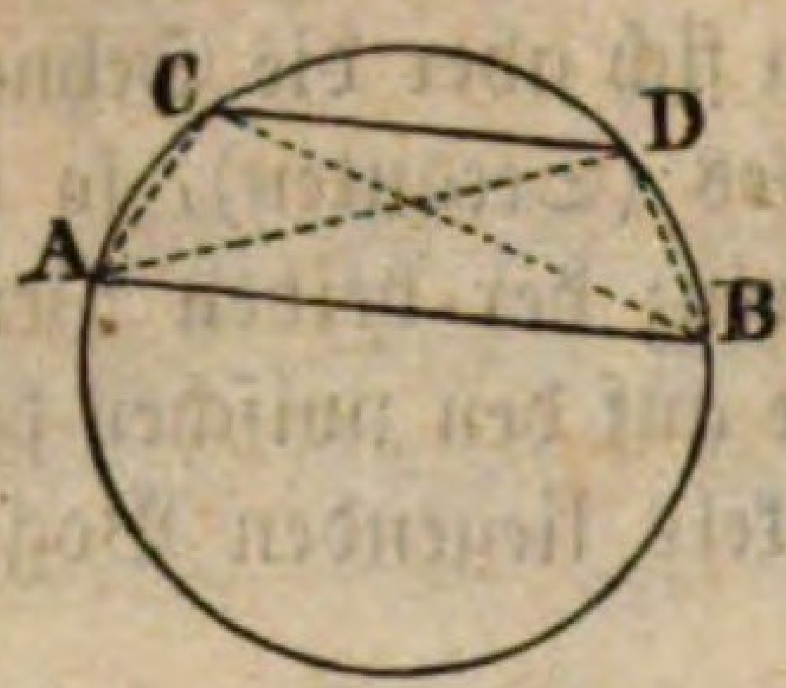
§. 126.

Lehrsätze.

I. Zwischen parallelen Sehnen liegen gleiche Bogen (und gleiche Sehnen).

Voraussf. $AB \parallel CD$.

Behaupt. Bogen $AC = BD$ (Sehne $AC = BD$, $AD = BC$).



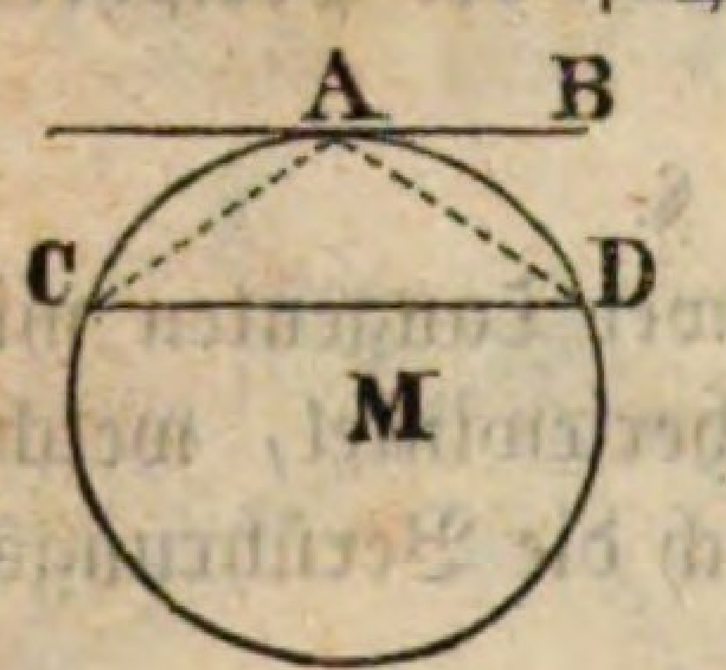
Bew. Die Peripheriewinkel ADC und DAB sind als Wechselwinkel gleich; folglich sind die Bogen AC und BD gleich, daher auch die zugehörigen Sehnen. Ferner ist auch Bogen ACD = BDC, daher Sehne AD = BC (§. 118. Nr. 3.)

II. Umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Bogen AC und BD die Parallelität der Sehnen AB und CD.

Bew. durch Wechselwinkel, welche als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleich sind.

III. Die mit einer Sehne parallele Tangente halbirt im Berührungspunkt den zur Sehne gehörigen Bogen.

Bew. Es ist ∡ADC = ∡ACD, weil jeder dieser Winkel dem ∡BAD gleich ist (als Wechselwinkel und resp. Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt). Aus der Gleichheit dieser Winkel folgt die Gleichheit der Bogen AC und AD.



IV. Die Tangente AB durch den Mittelpunkt A eines Bogens CD ist der zum Bogen gehörigen Sehne CD parallel.

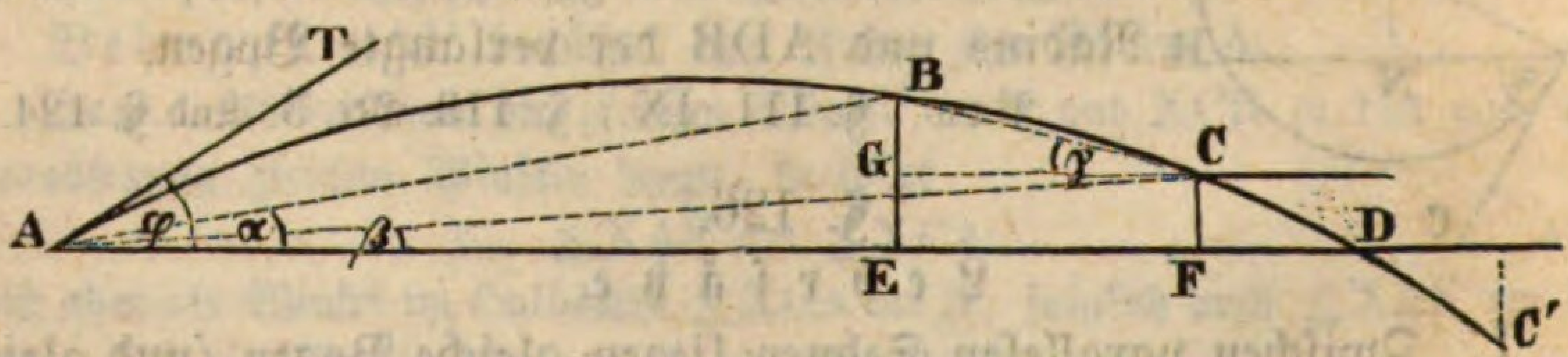
Bew. Der Radius MA steht sowohl auf AB, als auch auf CD senkrecht.

§. 127.

Eine Anwendung.

Im Allgemeinen weicht die Kurve, in welcher sich eine aus einem Geschütz geworfene Kugel bewegt, von der Kreislinie sehr ab. Bei flachen Schüssen aber (z. B. beim Ricochettiren) ist diese Abweichung so gering, daß die Annahme, die Flugbahn sei ein Kreis, für die Praxis brauchbare Resultate giebt. Ein solches Resultat zeigt folgender Fall:

A sei die Geschützmündung, AT die Richtung des Geschützrohres. Die Kugel soll unmittelbar über den höchsten Punkt B der Befestigung (Krete) fortfliegend zuerst im Punkte C aufschlagen; wie hat man das Geschütz zu richten? Nehmen wir nun an, die Flugbahn ABC, deren Fortsetzung CDC′ die Figur noch zeigt, sei ein Kreis-



bogen, den AT in A berührt, und in der Ebene dieses Kreisbogens sei AD die durch A gehende wagerechte Linie; nehmen wir ferner folgende Winkel als bekannt an:

1) den Winkel BAE $= \alpha$, welchen die Richtung von der Mündung nach der Krete mit der wagerechten Linie AD bildet;
2) den Winkel CAF $= \beta$, den die Richtung von der Mündung nach dem Treffpunkt C mit der wagerechten Linie AD bildet, und
3) den Winkel BCG $= \gamma$, den die Richtung vom Treffpunkt nach der Krete mit der wagerechten, also mit AD parallelen Linie CG bildet:

so ist, wenn φ den Elevationswinkel TAD des Geschützes bezeichnet,

$$\varphi = \alpha + \beta + \gamma.$$

Bew. Setzt man statt β den ihm gleichen Wechselwinkel GCA, so ist $\beta + \gamma$ der Peripheriewinkel auf dem Bogen AB; α ist der Peripheriewinkel auf dem Bogen BCD, folglich ist $\alpha + \beta + \gamma$ dem Peripheriewinkel auf dem Bogen ABCD gleich (§. 122. Nr. 6.). Da aber der Winkel φ von der Tangente AT und der Sehne AD gebildet wird, so ist φ ebenfalls dem Peripheriewinkel auf dem Bogen ABCD gleich; daher ist $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$.

Anmerk. Befindet sich der Treffpunkt unterhalb AD, z. B. in C′, so daß dann β auf der andern Seite von AD liegt, so findet man $\varphi = \alpha - \beta + \gamma$.

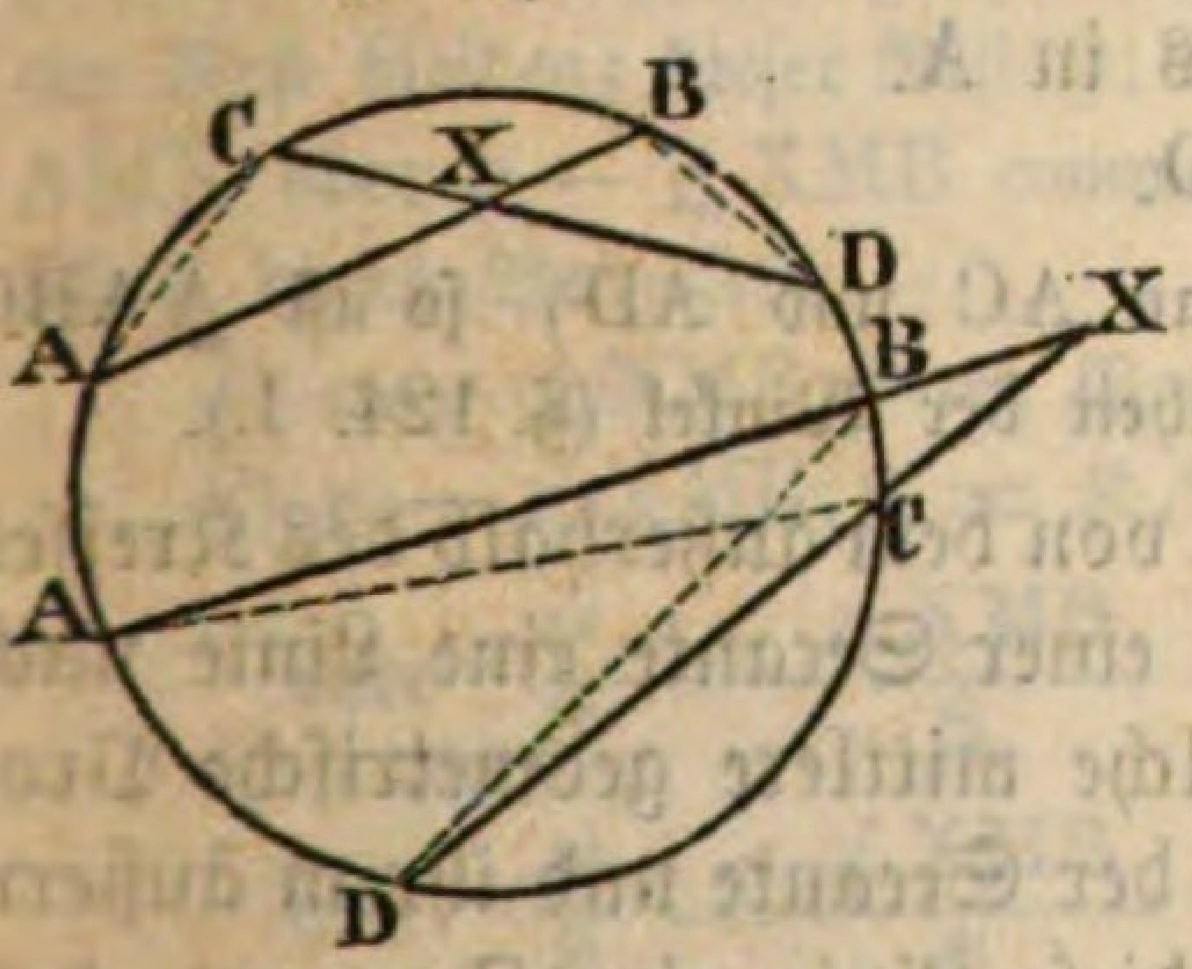
Proportionen beim Kreise.

§. 128.

Lehrsätze.

I. Wenn sich zwei Sehnen innerhalb oder außerhalb des Kreises schneiden, so ist das Product der (innern oder äußern) Abschnitte der einen Sehne gleich dem Product der Abschnitte der andern (die Abschnitte sind umgekehrt proportional).

Behaupt. AX.BX = CX.DX.



Bew. Zieht man AC und BD, so ist ΔAXC $\backsim$ ΔDXB aus Gleichheit der Winkel.

II. Wenn zwei sich zwischen ihren Endpunkten oder auch in ihren Verlängerungen schneidende Linien (AB und CD) in ihrem Durchschnittspunkte so in Abschnitte zerlegt werden, daß das Product der Abschnitte der einen Linie gleich dem Product der Abschnitte der andern ist (XA.XB = XC.XD): so liegen die vier Endpunkte beider Linien (A, B, C, D) in der Peripherie eines Kreises.

Bew. (indirect). Durch drei Punkte kann man einen Kreis legen, z. B. durch A, B und C. Gesetzt, dieser Kreis schnitte CD nicht in D, sondern in Z, so folgt aus I.: XA . XB = XC . XZ, und hieraus in Verbindung mit der Voraussetzung der Widerspruch: XD = XZ.

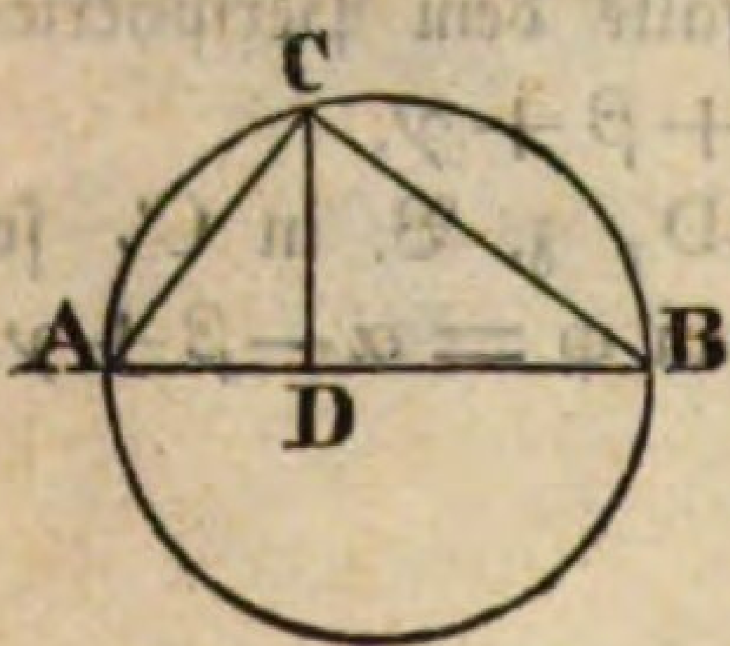
§. 129.

Lehrsätze.

I. Das Loth im Halbkreise (d. h. jede von einem Punkt der Peripherie auf einen Durchmesser gefällte Senkrechte) ist mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

Voraussf. CD ⊥ AB.
Behaupt. AD : DC = DC : DB.

II. Die Sehne im Halbkreise (d. h. jede vom Endpunkt eines Durchmessers ausgehende Sehne) ist mittlere geometrische Proportionale zwischen ihrer Projection auf den Durchmesser und dem ganzen Durchmesser.



Voraussf. CD ⊥ AB.
Behaupt. AD : AC = AC : AB und
BD : BC = BC : BA.

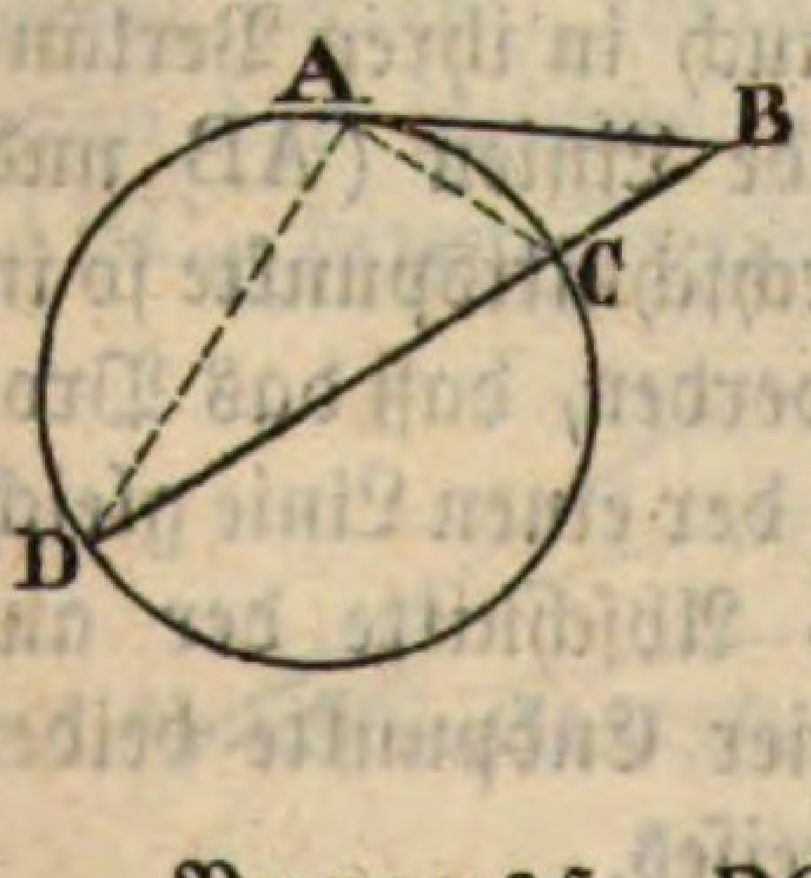
Die Beweise beider Sätze folgen daraus, daß ∡ACB als Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel ist (vergl. §. 88. Nr. 1. und 2.).

§. 130.

Lehrsätze.

I. Legt man von einem Punkt außerhalb eines Kreises eine Tangente an denselben und eine Secante durch denselben, so ist die Tangente mittlere geometrische Proportionale zwischen der Secante und ihrem äußeren Theil.

Voraussf. AB berührt den Kreis in A.
Behaupt. BC : BA = BA : BD.



Bew. Zieht man AC und AD, so ist △ABC ∾ △DBA aus Gleichheit der Winkel (§. 124. I.).

II. Zieht man von dem außerhalb des Kreises liegenden Endpunkt einer Secante eine Linie nach der Peripherie, welche mittlere geometrische Proportionale zwischen der Secante und ihrem äußern Theile ist, so ist diese Linie eine Tangente des Kreises.

Voraussf. BC : BA = BA : BD.
Behaupt. BA berührt den Kreis in A.

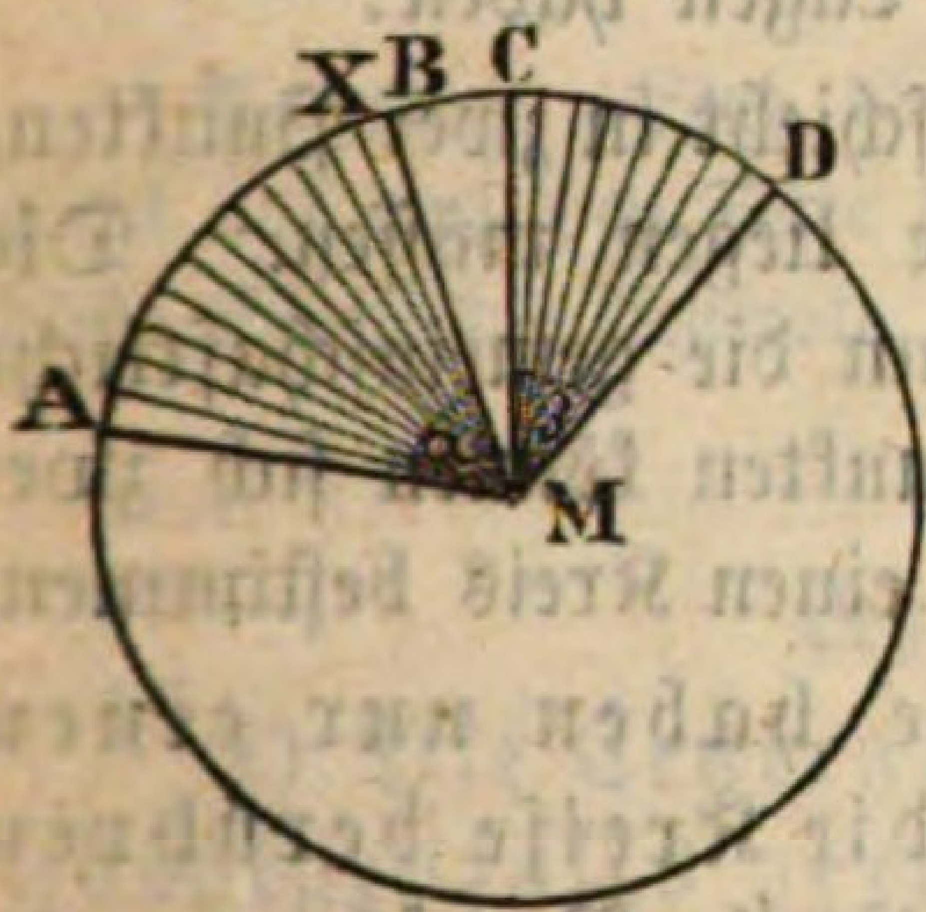
Beweis aus Aehnlichkeit der △△ABC und DBA, aus welcher ∡BAC = ∡BDA folgt; daher ist nach §. 124. II. BA Tangente.

§. 131.
Lehrsatz.

Zwei Centriwinkel eines Kreises verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Bogen und Kreisausschnitte. — Bezeichnet α den Centriwinkel AMB und β den Centriwinkel CMD, so ist:

Behaupt. $\alpha : \beta =$ Bogen AB : CD
$=$ Kreis-Ausschnitt AMB : CMD.

Bew. 1) Wenn α und β commensurabel sind. Ist der Winkel ε der gemeinschaftliche aliquote Theil von α und β, und ist ε in α m mal und in β n mal enthalten, so denke man sich α in m gleiche Theile, β aber in n gleiche Theile zerlegt. Jeder Theil ist ε, und da zu gleichen Centriwinkeln auch gleiche Bogen und Kreisausschnitte gehören, so ist dann auch Bogen AB in m gleiche Bogen und CD in n gleiche, eben so große Bogen zerlegt; eben so ist der Kreisausschnitt AMB in m gleiche Kreisausschnitte und CMD in n gleiche, eben so große Kreisausschnitte zerlegt. Bezeichnet also e den zu ε gehörigen Bogen und E den zu ε gehörigen Kreisausschnitt, so hat man:



$$\frac{\alpha = m \cdot \varepsilon; \quad \beta = n \cdot \varepsilon;}{\alpha : \beta = m : n;} \qquad \frac{\text{Bogen AB} = m \cdot e; \quad \text{Bogen CD} = n \cdot e;}{AB : CD = m : n;} \qquad \frac{\text{K.-A. AMB} = m \cdot E \quad \text{K.-A. CMD} = n \cdot E}{AMB : CMD = m : n.}$$

Hieraus erkennt man die Richtigkeit der Behauptung.

2) Wenn α und β incommensurabel sind. Man denke sich den einen Winkel β in n gleiche Theile zerlegt und trage nun den nten Theil von β auf α so oft wie möglich ab. Da α und β incommensurabel sind, so muß ein Rest bleiben; dieser Rest sei der Winkel XMB. Da nun die Winkel β und AMX oder $\alpha - \measuredangle XMB$ commensurabel sind, so verhält sich nach dem ersten Theil dieses Beweises:

1) $\alpha - \measuredangle XMB : \beta =$ Bogen AB $-$ XB : CD,

2) $\alpha - \measuredangle XMB : \beta =$ K.-Aussch. AMB $-$ XMB : CMD;

$$\text{oder} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\measuredangle XMB}{\beta} = \frac{\text{Bogen AB}}{CD} - \frac{\text{Bogen XB}}{CD}$$

$$\text{und} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\measuredangle XMB}{\beta} = \frac{\text{K.-A. AMB}}{CMD} - \frac{\text{K.-A. XMB}}{CMD}.$$

In beiden Gleichungen sind die Minuenden auf beiden Seiten bestimmte unveränderliche Zahlen, während die Subtrahenden dadurch, daß man n immer größer und größer nimmt, also β in immer mehr und mehr gleiche Theile theilt, der Null beliebig nahe gebracht werden können (vergl. den Beweis in §. 51.); es müssen daher die Minuenden nach §. 50. einander gleich sein, was zu beweisen war.

Zwei Kreise.

§. 132.

Erklärung.

Haben zwei Kreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, so heißen sie concentrisch, haben sie verschiedene Mittelpunkte: excentrisch; die Verbindungslinie der Mittelpunkte heißt dann die Centrale beider Kreise.

Zwei Kreise können zu einander folgende Lagen haben:

1) Die Kreise schneiden sich. Dies geschieht in zwei Punkten, welche auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen müssen. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte ist dann die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise. In mehr als zwei Punkten können sich zwei Kreise nicht schneiden, weil schon drei Punkte einen Kreis bestimmen.

2) Die Peripherien beider Kreise haben nur einen Punkt gemeinschaftlich; man sagt dann: die Kreise berühren sich in diesem Punkte, und der Punkt selbst heißt ihr Berührungspunkt. Zwei Kreise berühren sich von außen, wenn alle Punkte jedes Kreises mit Ausnahme des Berührungspunktes außerhalb des andern Kreises liegen; sie berühren sich von innen, wenn alle andern Punkte des einen Kreises innerhalb des andern liegen.

3) Die Peripherien beider Kreise haben keinen Punkt gemeinschaftlich. In diesem Falle liegt der eine Kreis entweder ganz außerhalb, oder ganz innerhalb des andern.

§. 133.

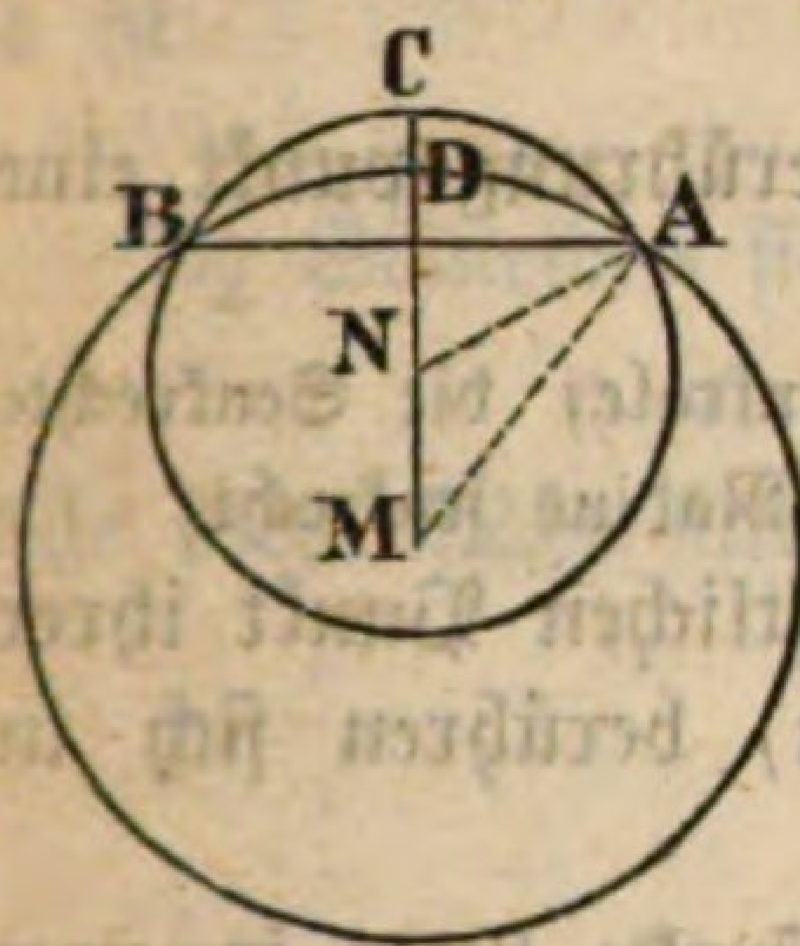
Lehrsätze.

1) Die Centrale zweier sich schneidenden Kreise steht auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht und halbirt sie.

Bew. unmittelbar aus §. 28. III.

2) Schneiden sich zwei Kreise mit ungleichen Radien, und liegen ihre Mittelpunkte auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Sehne, so muß auf der andern Seite dieser Sehne der dem kleineren Radius zugehörige Bogen den andern Bogen umschließen, also größer als dieser sein. Auf der Seite der Sehne, auf welcher die Mittelpunkte liegen, findet das Umgekehrte Statt.

Bew. Der Mittelpunkt N des Kreises mit dem kleineren Radius NA liegt der gemeinschaftlichen Sehne AB näher, als der Mittelpunkt M des Kreises mit dem größeren Radius MA (§. 23. Nr. 1.). Schneidet nun MN, gehörig ver-



längert, die beiden Bogen AB in C und D, und gehört der Bogen ACD zum Mittelpunkt N, aber ADB zu M: so ist nachzuweisen, daß ACB den Bogen ADB umschließt. Schneiden können sich die Bogen zwischen A und B nicht, da sie dies schon in A und B thuen; folglich genügt es, nachzuweisen, daß ein Punkt, z. B. C, des Bogens ACB außerhalb des Kreises um M liegt. Es fragt sich also: ist $NC > ND$? Aber im $\triangle MNA$ ist

$$NA > MA - MN, \text{ folglich}$$
$$NC > MD - MN, \text{ also}$$
$$NC > ND.$$

Anmerk. Sind die Radien der Kreise gleich, so können die Mittelpunkte nicht auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Sehne liegen; es halbirt vielmehr diese Sehne die Centrale.

§. 134.

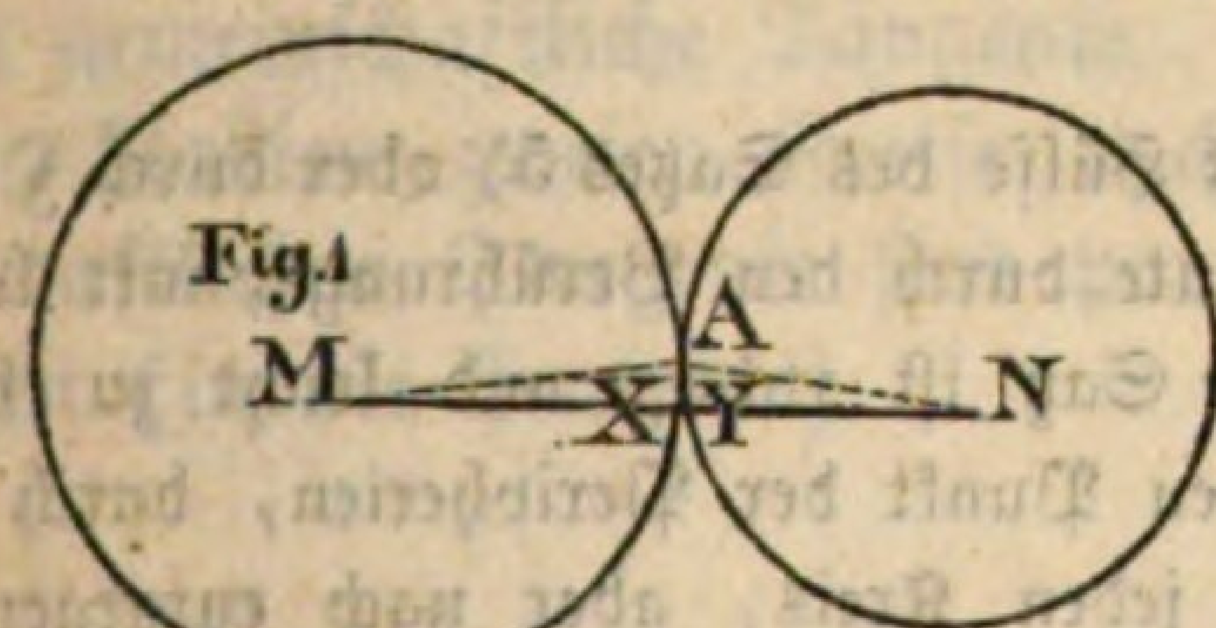
Lehrsätze über Berührungskreise.

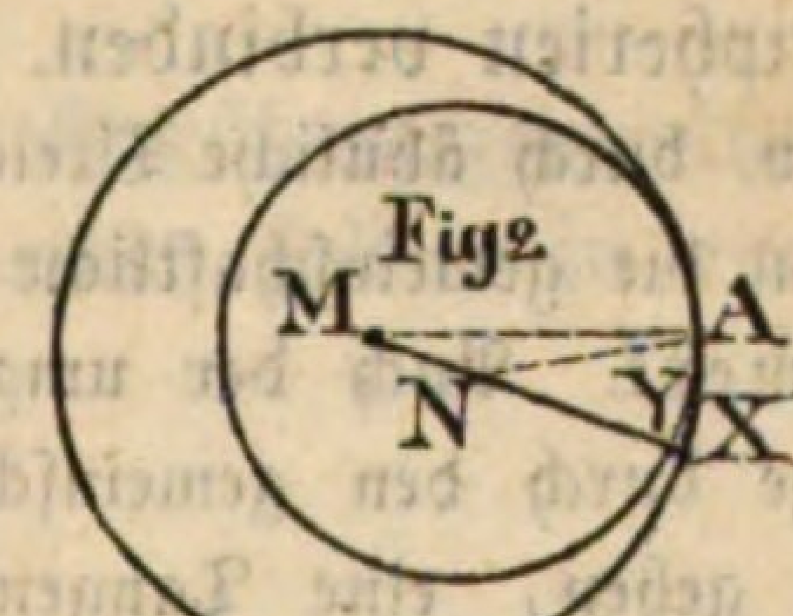
1) Die Centrale zweier sich berührenden Kreise geht, nöthigenfalls verlängert, durch den Berührungspunkt.

Vorausf. Die Kreise um M und N berühren sich in A.

Behaupt. MN geht durch A.

Bew. Angenommen, MN ginge nicht durch A, so würde diese Linie die Kreise um M und N in zwei verschiedenen Punkten X und Y schneiden müssen. Zieht man dann MA und NA, so erhält man in Fig. 1. $MA = MX$, $NA = NY$,





folglich $MA + NA = MX + NY$; d. h. im $\triangle MNA$ wäre die Summe zweier Seiten um das Stück XY kleiner als die dritte Seite. Zu einem ähnlichen Widerspruch führt die in Fig. 2. dargestellte Lage der Kreise. Man erhält: $MA - NA = MX - NY$; d. h. es wäre im $\triangle MNA$ die Differenz zweier Seiten um das Stück XY größer als die dritte Seite. Diese Widersprüche zeigen, daß M, A und N in einer geraden Linie liegen müssen.

2) Geht die Centrale zweier Kreise durch einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Peripherien, so berühren sich die Kreise in diesem Punkte.

Bew. Nimmt man an, die Peripherien hätten noch einen Punkt gemeinschaftlich, und verbindet man ihn mit den Mittelpunkten beider Kreise: so erhält man, je nachdem sich die Kreise von außen, oder von innen berühren, den

Widerspruch, daß in einem Dreieck die Summe, oder die Differenz zweier Seiten der dritten Seite gleich sein müßte.

3) Zwei sich berührende Kreise haben im Berührungspunkt eine gemeinschaftliche Tangente.

Bew. Der Berührungspunkt ist ein Punkt der Centrale; die Senkrechte auf dem einen Radius steht daher auch auf dem andern Radius senkrecht.

4) Zwei Kreise, welche in einem gemeinschaftlichen Punkt ihrer Peripherien eine gemeinschaftliche Tangente haben, berühren sich in diesem Punkt.

Bew. Die Radien nach dem gemeinschaftlichen Punkte liegen in einer Richtung, weil beide auf der Tangente senkrecht stehen.

5) Von jeder durch den Berührungspunkt zweier Kreise gelegten Linie (unbegrenzten Secante) schneiden die Kreise Sehnen ab, die sich zu einander wie die zugehörigen Radien verhalten.

Bew. durch ähnliche Dreiecke, wenn man die Radien nach den Endpunkten der Sehnen zieht.

Anmerk. Auch der umgekehrte Satz ist richtig und leicht zu beweisen (Nr. 2.), verlangt aber als Voraussetzung noch die Neben-Bedingung, daß die Mittelpunkte der Kreise auf verschiedenen Seiten der Secante, oder auf derselben Seite sich befinden, je nachdem die abgeschnittenen Sehnen neben einander liegen, oder in einander.

6) Legt man durch den Berührungspunkt zweier sich berührenden Kreise zwei unbegrenzte Secanten, so sind die Sehnen parallel, welche in beiden Kreisen die andern Durchschnittspunkte der Secanten und der Peripherien verbinden.

Bew. durch ähnliche Dreiecke mit Hülfe des Satzes 5) oder durch §. 124. I., wenn man die gemeinschaftliche Tangente durch den Berührungspunkt legt.

Anmerk. Auch der umgekehrte Satz ist richtig und leicht zu beweisen. Man lege durch den gemeinschaftlichen Punkt der Peripherien, durch den die Secanten gehen, eine Tangente an jeden Kreis, aber nach entgegengesetzten Richtungen, und wende §. 124. I., §. 9. Nr. 10. und §. 134. Nr. 4. an.

§. 135.

Größe der Centrale.

Bezeichnet c die Centrale zweier Kreise mit den Radien r und ϱ, so folgt unmittelbar aus der Anschauung:

1) Berühren sich die Kreise von außen, so ist

$$c = r + \varrho.$$

2) Berühren sie sich von innen, und ist $r > \varrho$, so ist

$$c = r - \varrho.$$

3) Liegt jeder Kreis ganz außerhalb des andern, so ist

$$c > r + \varrho.$$

4) Liegt der Kreis mit dem Radius ρ ganz innerhalb des andern, so ist

$$c < r - \rho.$$

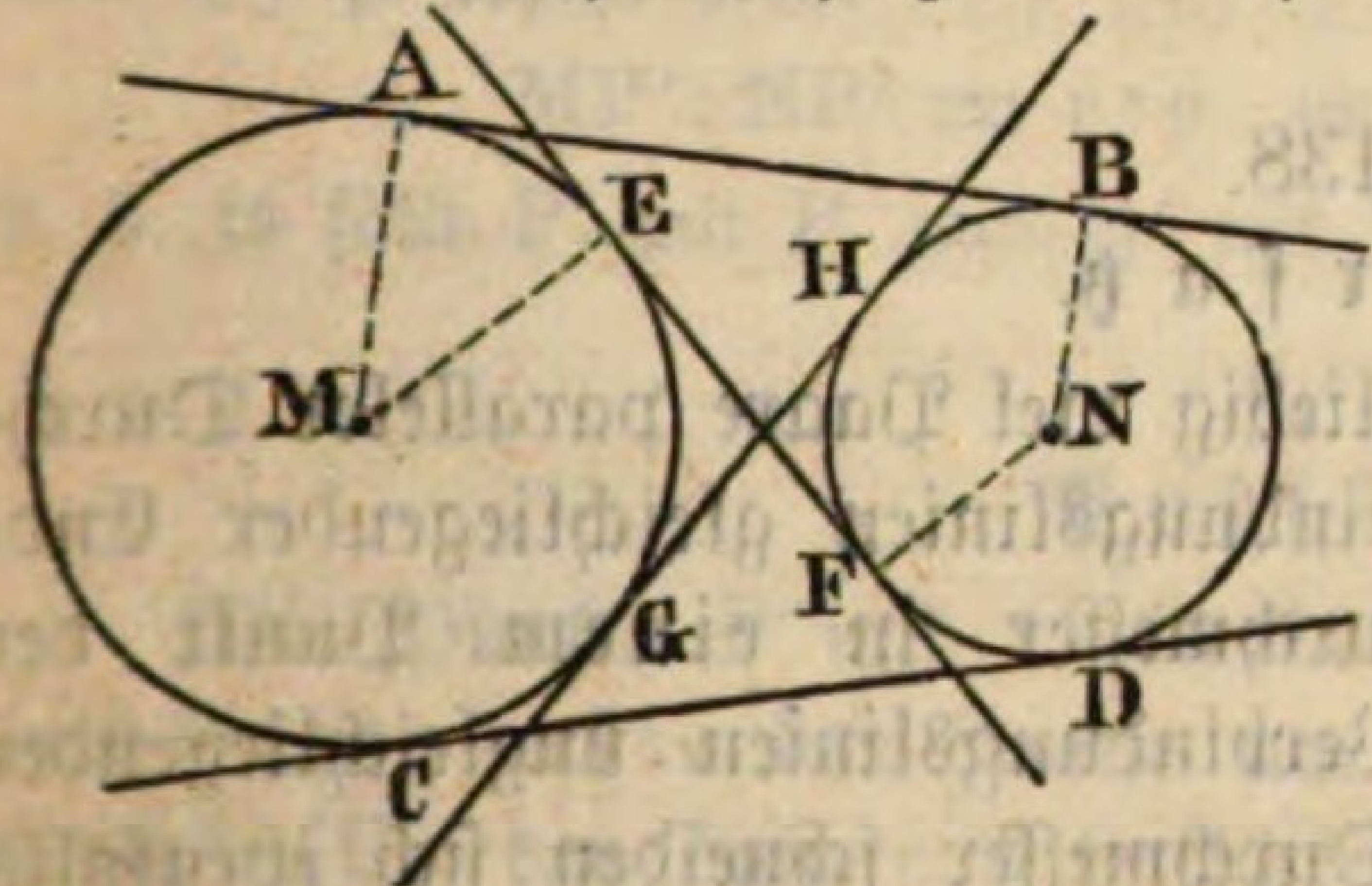
5) Schneiden sich die Kreise, so ist

$$c < r + \rho \quad \text{und zugleich} \quad c > r - \rho.$$

Alle diese Sätze sind auch umgekehrt wahr.

§. 136.
Erklärung.

Eine Linie, welche zwei Kreise berührt, heißt eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise und zwar eine äußere, oder innere, je nachdem die Kreise auf derselben Seite der Tangente liegen, oder auf verschiedenen Seiten.



Liegt jeder Kreis ganz außerhalb des andern, wie die Kreise um M und N, so haben sie zwei äußere Tangenten (AB und CD) und zwei innere (EF und GH). Berühren sie sich von außen, so haben sie zwei äußere Tangenten und eine innere; schneiden sie sich, so haben sie nur zwei äußere Tangenten; berühren sie sich von innen, so haben sie nur eine äußere Tangente; liegt der eine Kreis ganz innerhalb des andern, so haben sie keine gemeinschaftliche Tangente.

Die Radien zweier Kreise nach den Berührungspunkten einer gemeinschaftlichen Tangente sind parallel, oder fallen in eine Linie zusammen (in die Centrale).

Harmonische Theilung bei Kreisen. Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise.

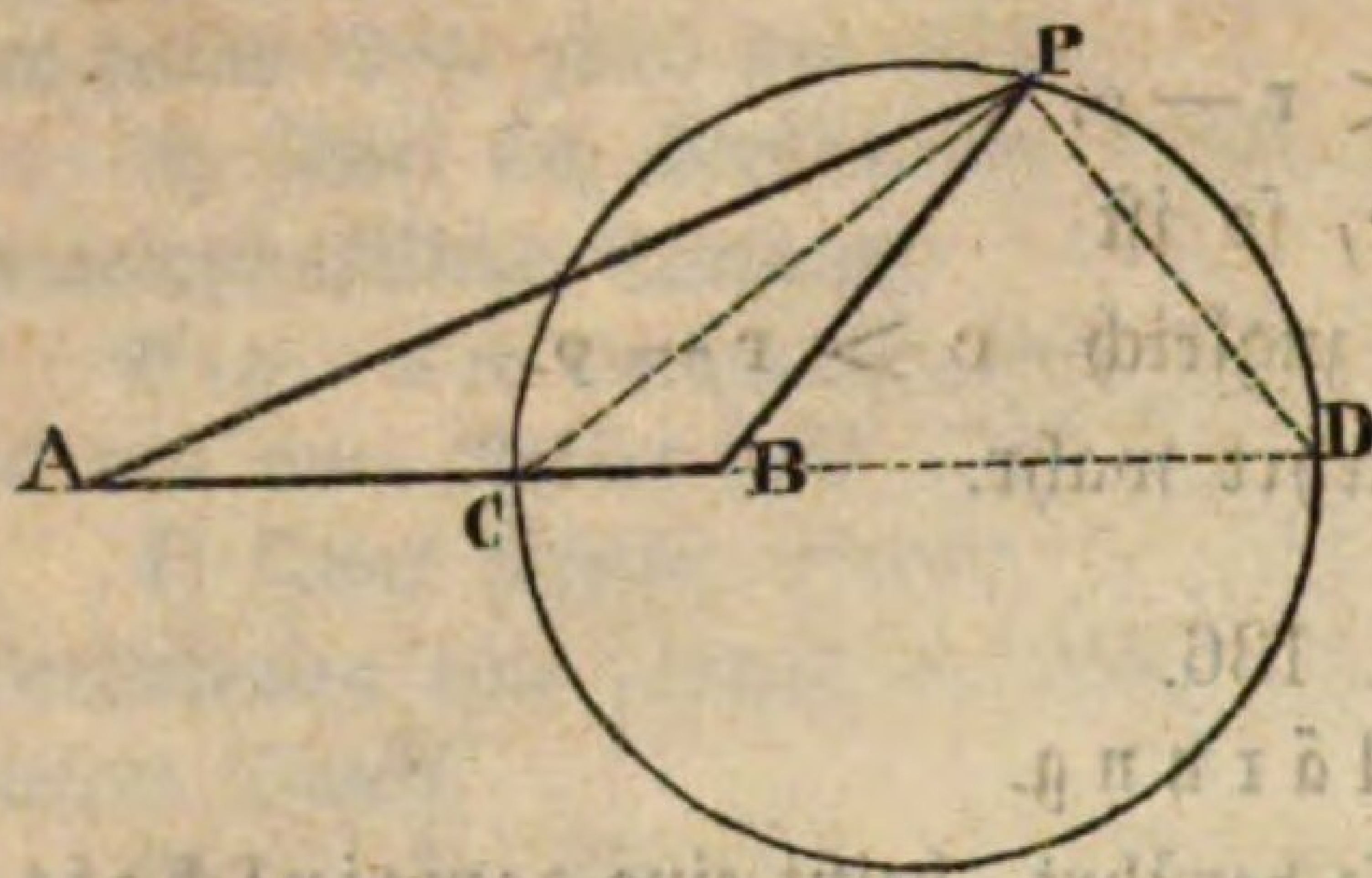
§. 137.
Lehrsatz.

Theilt man eine Linie AB harmonisch in den Punkten C und D und beschreibt durch die conjugirten Punkte C und D einen Kreis, dessen Durchmesser CD ist, so verhalten sich die Abstände jedes Punktes seiner Peripherie von A und B zu einander, wie die zugehörigen inneren (oder äußeren) Abschnitte der Linie AB.

Voraussf. AC : BC = AD : BD und CD Durchmesser.

Behaupt. AP : BP = AC : BC.

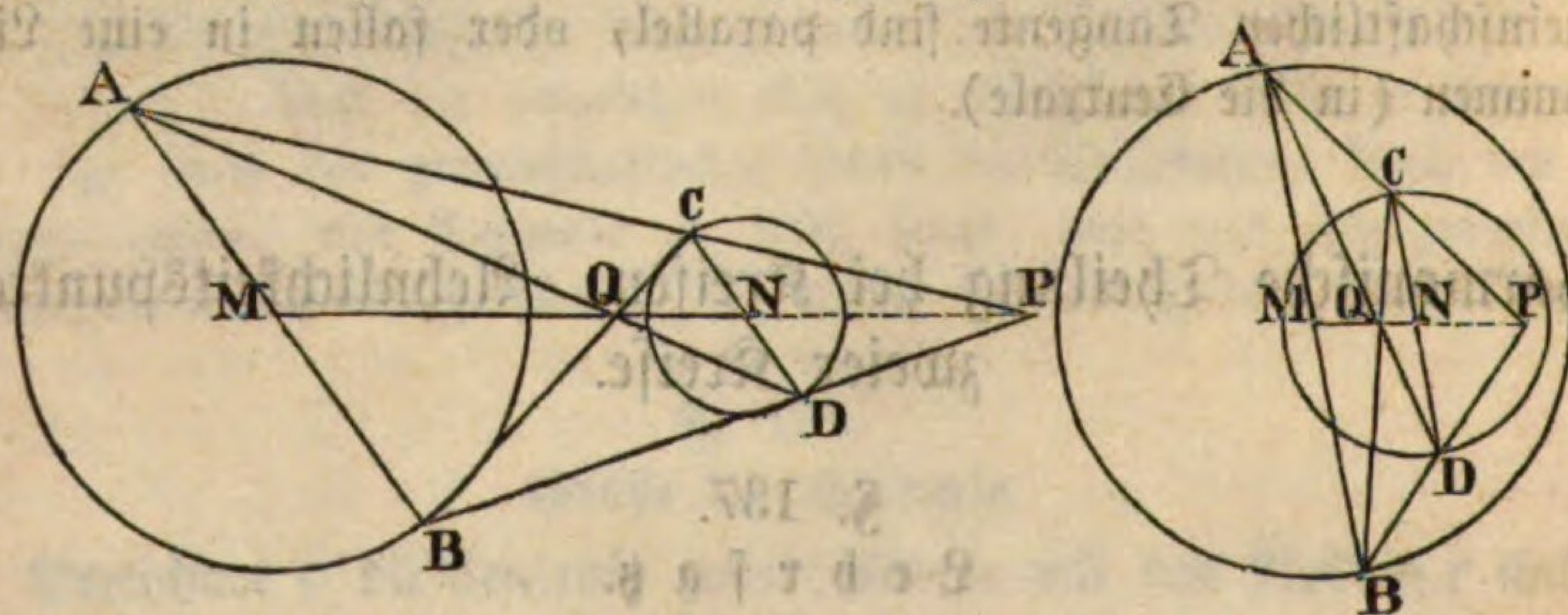
Bew. Verbindet man den beliebigen Punkt P der Peripherie mit den 4 harmonischen Punkten A, B, C und D, so erhält man 4 harmonische Strahlen; und weil zwei conjugirte derselben, nämlich PC und PD, auf einander senkrecht stehen (∡ im Halbkreis), so muß PC den Winkel APB nach §. 105. II. halbiren; daher findet die Proportion AP : BP = AC : BC nach §. 72. Nr. 1. Statt.



§. 138.
Lehrsatz.

Zieht man in zwei Kreisen beliebig viel Paare paralleler Durchmesser, so schneiden sich die Verbindungslinien gleichliegender Endpunkte aller zwei parallelen Durchmesser in einem Punkt der verlängerten Centrale, und die Verbindungslinien ungleichliegender Endpunkte aller zwei parallelen Durchmesser schneiden sich ebenfalls in einem Punkt, der in der Centrale selbst liegt. Diese beiden Punkte zerlegen die Centrale in zwei resp. äußere und innere Abschnitte, die sich zu einander wie die Radien der Kreise verhalten; es sind sonach diese beiden Punkte und die Mittelpunkte der Kreise vier harmonische Punkte.

Bew. Ziehen wir in den Kreisen um M und N zunächst nur ein Paar paralleler Durchmesser, AB und CD, so müssen sich AC und BD in einem



Punkte P der verlängerten Centrale schneiden, weil sich verhält: AM : MB = CN : ND (§. 80. V.; vergl. auch Anm. 2.). Eine Ausnahme findet nur Statt, wenn AM = CN ist; dann sind AC, MN, BD parallel. Hingegen schneiden sich AD, BC und MN immer in einem Punkt Q (nach demselben Satze, oder nach §. 107. Anmerk., oder nach §. 109. Nr. 9.). — Da nun $\Delta MAP \sim \Delta NCP$ und $\Delta MAQ \sim \Delta NDQ$ ist, so verhält sich, wenn MA durch r und NC durch ϱ bezeichnet wird:

$$MP : NP = r : \varrho$$
$$MQ : NQ = r : \varrho; \text{ folglich auch}$$
$$MP : NP = MQ : NQ;$$

es sind daher M, N, Q, P vier harmonische Punkte. — Der Beweis, daß die Verbindungslinien gleichliegender und ungleichliegender Endpunkte jedes anderen parallelen Durchmesser-Paares auch durch resp. P und Q gehen, folgt daraus, daß sich P und Q von der Lage der parallelen Durchmesser zur Centrale ganz unabhängig ergeben haben. Wiederholt man also für zwei andere parallele Durchmesser den obigen Beweis und bezeichnet die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien gleich- und ungleichliegender Endpunkte mit der Centrale mit P′ und Q′, so erhält man:

$$MP' : NP' = r : \varrho \text{ und } MQ' : NQ' = r : \varrho;$$

d. h. es fällt P′ mit P, und Q′ mit Q zusammen (§. 71. Nr. 1. und 2.).

§. 139.

Erklärung.

Die Punkte P und Q in der vorigen Figur heißen die **Aehnlichkeitspunkte** der Kreise um M und N, und zwar heißt der Punkt (P) der äußere Aehnlichkeitspunkt, in welchem die Centrale von allen Verbindungslinien der Endpunkte zweier parallelen Radien, die auf derselben Seite der Centrale liegen, geschnitten wird; hingegen heißt der Punkt (Q) der innere Aehnlichkeitspunkt, in welchem die Centrale von allen Verbindungslinien der Endpunkte zweier parallelen Radien, die auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen, geschnitten wird.

§. 140.

Folgerungen.

1) Die Mittelpunkte zweier Kreise und die beiden Aehnlichkeitspunkte derselben sind vier harmonische Punkte.

2) Der äußere Aehnlichkeitspunkt liegt in der Verlängerung der Centrale über den Mittelpunkt des kleineren Kreises hinaus; der innere Aehnlichkeitspunkt liegt zwischen den Mittelpunkten beider Kreise. — Sind die Kreise gleich, so existirt ein äußerer Aehnlichkeitspunkt nicht oder er liegt unendlich weit von den Kreisen entfernt.

3) Liegen die Kreise ganz aus einander, so liegen beide Aehnlichkeitspunkte außerhalb beider Kreise; liegt der eine Kreis ganz innerhalb des andern, so liegen die Aehnlichkeitspunkte innerhalb beider Kreise; schneiden sich die Kreise, so liegt der äußere Aehnlichkeitspunkt außerhalb, der innere innerhalb beider Kreise.

4) Berühren sich die Kreise von außen, oder von innen, so ist ihr Berührungspunkt resp. der innere, oder äußere Aehnlichkeitspunkt.

5) Jede äußere gemeinschaftliche Tangente geht durch den äußeren, jede innere durch den innern Aehnlichkeitspunkt.

Bew. Die Radien nach den Berührungspunkten sind parallel.

6) Legt man durch einen Aehnlichkeitspunkt eine Secante durch den einen Kreis, so schneidet sie, nöthigenfalls verlängert, auch den andern Kreis, und zieht man in jedem Kreise die Radien nach den Durchschnittspunkten, so sind diese paarweise parallel.

Bew. indirect.

7) Legt man durch einen Aehnlichkeitspunkt eine Tangente an den einen Kreis, so berührt sie auch den andern Kreis.

Bew. indirect.

8) Hieraus ergiebt sich eine Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise. Man construirt mittelst paralleler Durchmesser die Aehnlichkeitspunkte und legt durch sie Tangenten an den einen Kreis, so werden diese die gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise.

9) Zieht man in zwei Berührungskreisen ein Paar paralleler Durchmesser, so gehen die Verbindungslinien ungleichliegender, oder gleichliegender Endpunkte durch den Berührungspunkt, je nachdem die Kreise sich von außen, oder von innen berühren.

Bew. Der Berührungspunkt ist ein Aehnlichkeitspunkt.

10) Wenn sich zwei Kreise von außen berühren, so ist der Theil der gemeinschaftlichen äußeren Tangente, welcher zwischen den Berührungspunkten liegt, mittlere geometrische Proportionale zwischen den Durchmessern der Kreise.

Bew. durch ähnliche Dreiecke und Nr. 9.

Geradlinige Figuren im Kreise und um den Kreis.

§. 141.

Erklärung.

Jede geradlinige Figur, deren Ecken in der Peripherie eines Kreises liegen, deren Seiten also Sehnen dieses Kreises sind, heißt eine Figur im Kreise, und man sagt von solcher Figur, um sie lasse sich ein Kreis beschreiben. — Jede Figur, deren Seiten sämmtlich Tangenten eines Kreises sind, heißt eine Figur um einen Kreis, und der Kreis heißt dann in die Figur eingeschrieben.

Das Dreieck.

§. 142.

Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist auch der Mittelpunkt des Dreiecks (§. 28. IV.), also der Durchschnittspunkt der drei Senkrechten, welche auf die Seiten in ihren Mittelpunkten errichtet sind. — Sind α, β, γ die Winkel des Dreiecks, und man verbindet die Ecken mit dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so bilden die Radien die drei Centriwinkel 2α, 2β und 2γ. — Ist das Dreieck rechtwinklig, so ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises der Mittelpunkt der Hypotenuse; daher ist der Radius dieses Kreises der halben Hypotenuse gleich. Man drückt diesen Satz auch so aus: der Halbkreis über der Hypotenuse geht durch die Spitze des rechten Winkels (§. 122. Nr. 3.). — Ist das Dreieck spitzwinklig, so liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb desselben, ist es stumpfwinklig: außerhalb. Es geht dies aus der Betrachtung der Centriwinkel hervor, welche mit den Winkeln des Dreiecks auf denselben Bogen stehen. — Da es nur einen Kreis um jedes Dreieck giebt, so muß auch sein Radius durch jede drei Stücke bestimmt sein, durch welche das Dreieck bestimmt ist, z. B. durch die drei Seiten. Der folgende Lehrsatz giebt ein Mittel, den Radius aus den drei Seiten mittelbar zu berechnen, nämlich durch den Inhalt des Dreiecks.

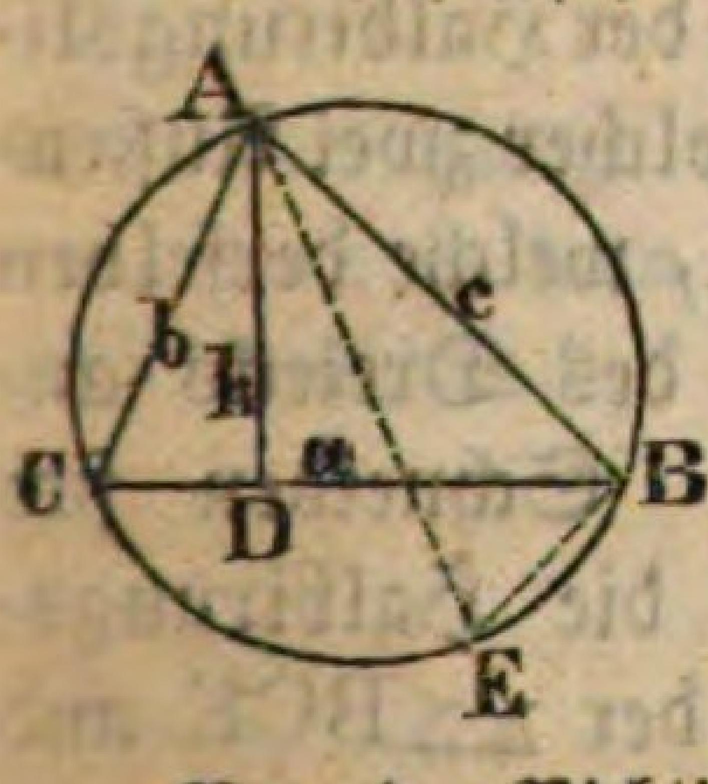
§. 143.

Lehrsatz.

Der Inhalt (F) jedes Dreiecks ist gleich dem Product der drei Seiten (a, b, c) dividirt durch den vierfachen Radius (r) des umschriebenen Kreises; oder

$$F = \frac{abc}{4r}.$$

Analytischer Beweis. Bezeichnet h die Höhe auf a, so ist der Inhalt



des $\triangle ABC = \frac{ah}{2}$; soll also der Lehrsatz richtig sein, so muß

$$\frac{ah}{2} = \frac{abc}{4r}$$ sein; oder

$$h = \frac{bc}{2r},$$ woraus folgt:

$$h : b = c : 2r.$$

Von der Richtigkeit dieser Proportion hängt also die Richtigkeit des Satzes ab. Versuchen wir nun, die Richtigkeit der Proportion aus ähnlichen Dreiecken zu beweisen. Ziehen wir den Durchmesser AE und verbinden E mit B, so enthalten die $\triangle\triangle$ ACD und AEB die Glieder obiger Proportion als Seiten. Da aber beide Dreiecke rechtwinklig sind, und noch ein Paar gleicher Winkel, ACD

und AEB, haben, so sind sie ähnlich, und die Proportion $h : b = c : 2r$, also auch der Satz, ist richtig.

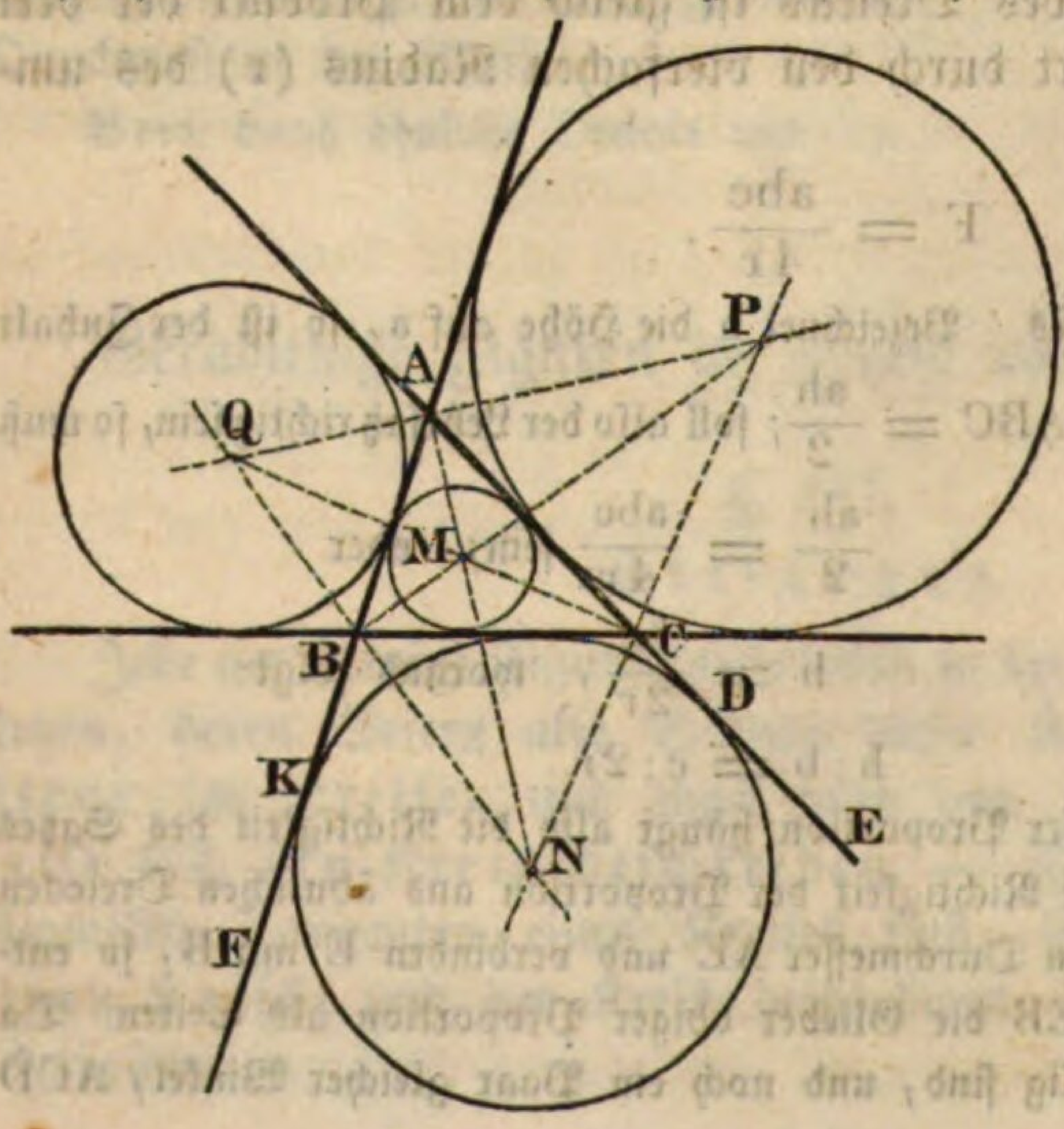
Der Leser möge hiernach den synthetischen Beweis führen.

§. 144.

Die Kreise, welche die Seiten eines Dreiecks berühren.

Jedes Dreieck liegt auch um einen Kreis; denn wir haben in §. 28. IX. bewiesen, daß der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der drei Winkel jedes Dreiecks von den Seiten gleich weit absteht. Dieser Durchschnittspunkt ist also der Mittelpunkt des Kreises im Dreieck, und sein Abstand von jeder Seite ist der Radius dieses Kreises. — Bezeichnen α, β, γ die Winkel des Dreiecks, so bilden die Radien des eingeschriebenen Kreises nach den Berührungspunkten die Winkel $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$; denn jeder Centriwinkel liegt mit einem Umfangswinkel des Dreiecks in einem Viereck, dessen zwei andere Winkel rechte sind. — Verbindet man aber die Ecken des Dreiecks mit dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises, so entstehen die Centriwinkel $180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$, $180° - \frac{\alpha + \gamma}{2}$, $180° - \frac{\beta + \gamma}{2}$, für welche man nach der Reihe setzen kann: $90° + \frac{\gamma}{2}$, $90° + \frac{\beta}{2}$, $90° + \frac{\alpha}{2}$.

Außer dem in das Dreieck eingeschriebenen Kreise giebt es noch drei Kreise, welche die Richtungen der drei Seiten berühren. Sie liegen außerhalb des Dreiecks, und jeder berührt eine Seite und die Verlängerungen der beiden andern Seiten über diese Seite hinaus. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die Durchschnittspunkte der Halbirungslinien solcher zwei Außenwinkel, welche derselben Seite des Dreiecks anliegen. Schneiden sich z. B. die Halbirungslinien der ∡∡BCE und CBF in N, so ist nach §. 28. VII. N von den Schenkeln jedes Winkels gleichweit entfernt; woraus folgt, daß N Mittel-



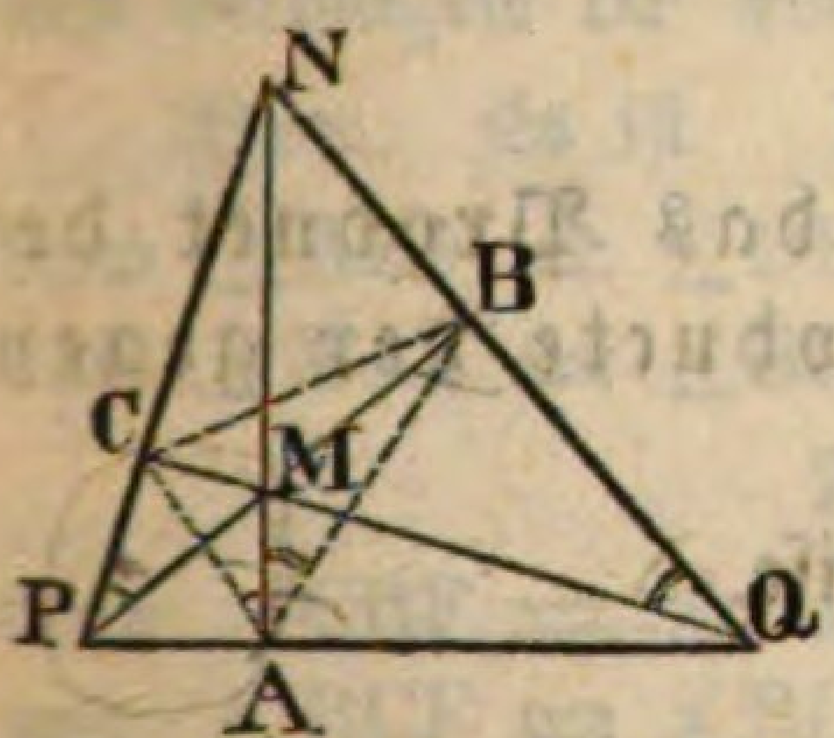
punkt eines Kreises ist, der diese Schenkel berührt. Weil aber CE und BF in den Richtungen der Schenkel des Winkels BAC liegen, so liegt auch N in der Halbirungslinie dieses Winkels; woraus folgt, daß A, M und N in einer geraden Linie liegen. Dasselbe gilt natürlich auch für B, M und P, und für C, M und Q. — Der Leser möge noch auf eine Eigenschaft der Figur achten. Berührt der Kreis um N die Linie CE in D und die Linie BF in K, so ist nicht nur AD = AK, sondern es ist auch AD + AK dem Umfange des ΔABC gleich (§. 114. Nr. 3.).

§. 145.
Zusatz.

Die Linien AN, BP und CQ in der vorigen Figur, welche die Winkel des ΔABC halbiren, sind die Höhen des ΔNPQ (§. 9. Nr. 6.). Kehrt man diesen Satz um, so kommt man zu folgendem

Lehrsatz: Die Höhen eines Dreiecks halbiren die Winkel des Dreiecks, dessen Ecken die Fußpunkte der Höhen sind.

Bew. Es soll bewiesen werden, daß die Höhen des ΔNPQ, nämlich NA, PB und QC, die Winkel des ΔABC halbiren. Zuerst soll gezeigt werden, daß NA den Winkel BAC halbirt. Die vier Punkte P, A, M, C liegen in der Peripherie eines Kreises; denn die Winkel PAM und PCM sind rechte; folglich geht der Kreis, welcher PM zum Durchmesser hat, durch A und C. Hieraus folgt, daß als Peripheriewinkel auf demselben Bogen



$$1)\ \measuredangle MAC = \measuredangle MPC$$

ist. Ganz eben so kann man beweisen, daß die vier Punkte Q, A, M, B in der Peripherie eines Kreises liegen (der QM zum Durchmesser hat); folglich ist

$$2)\ \measuredangle MAB = \measuredangle MQB.$$

Da nun die Winkel MPC und MQB als Complemente des $\measuredangle$PNQ gleich sind, so folgt aus 1) und 2):

$$\measuredangle MAC = \measuredangle MAB,$$

d. h. NA halbirt den Winkel BAC.

Eben so kann man zeigen, daß PB und QC resp. die Winkel ABC und ACB halbiren.

Das Viereck.

§. 146.
Lehrsätze.

1) **In jedem Viereck im Kreise ist die Summe je zweier gegenüberliegenden Winkel = 2R.**

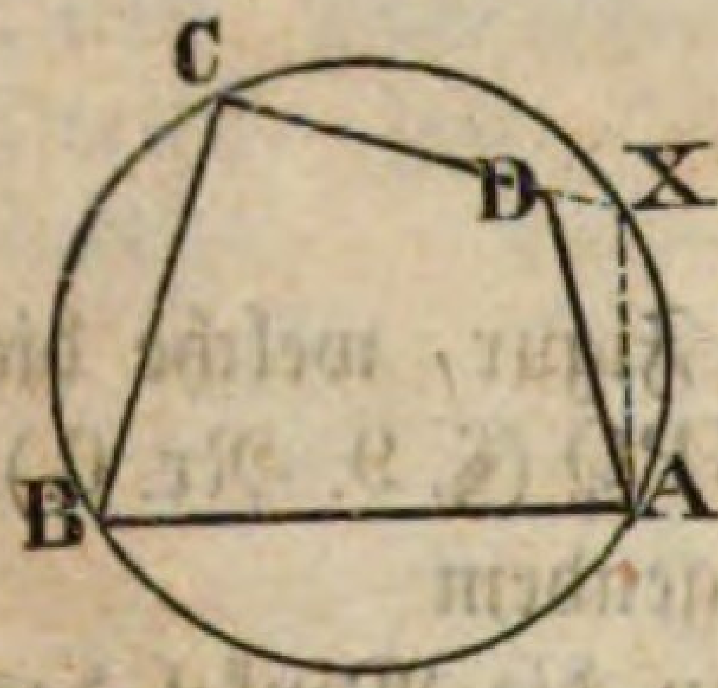


Bew. Die zu den Peripheriewinkeln A und C gehörigen Centriwinkel betragen zusammen 4R, folglich ist $\measuredangle A + \measuredangle C = 2R$; daher auch $\measuredangle B + \measuredangle D = 2R$.

2) **Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel gleich 2R, so läßt sich um das Viereck ein Kreis beschreiben.**

Voraussf. $\measuredangle B + \measuredangle D = 2R$ (also auch $\measuredangle A + \measuredangle C = 2R$).

Behaupt. $\square$ABCD ist ein Viereck im Kreise.



Bew. Durch drei Ecken des Vierecks kann man immer einen Kreis legen, z. B. durch A, B und C. Gesetzt, dieser Kreis ginge nicht durch D, sondern schnitte die nöthigenfalls verlängerte CD in X, so ziehe man AX. Im Kreis-Viereck ABCX ist dann $\measuredangle B + \measuredangle X = 2R$, und hieraus folgt in Verbindung mit der Voraussetzung der Widerspruch $\measuredangle D = \measuredangle X$ (§. 15. II.). Es muß daher der durch A, B, C gelegte Kreis auch durch D gehen.

Anm. Betragen in einem Viereck zwei gegenüberliegende Winkel nicht 2R, so liegt dasselbe nach Nr. 1. nicht in einem Kreise, z. B. das Viereck mit einspringender Ecke.

§. 147.

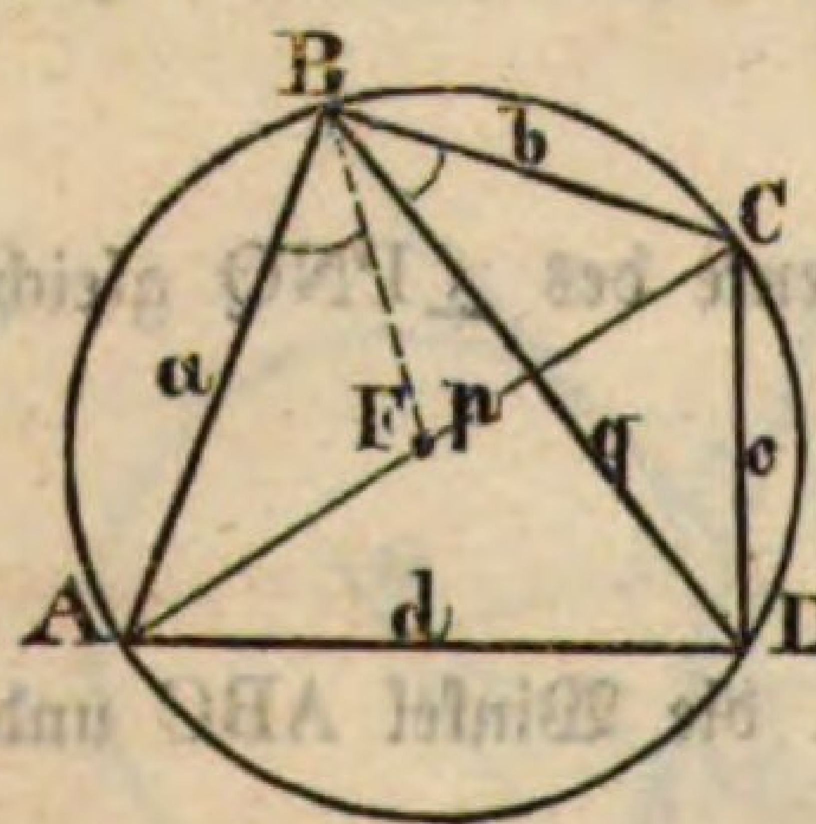
Der Ptolemäische Lehrsatz.

I. **In jedem Viereck im Kreise ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten.**

Voraussf. ABCD ist ein Viereck im Kreise.

Behaupt. $p.q = a.c + b.d$.

Bew. 1. Analysis. Von der Behauptung $pq = ac + bd$ ausgehend können wir zum Beweise zwei Wege einschlagen. Der erste besteht darin, daß wir die linke Seite in eine Summe zweier Producte zu zerlegen und dann zu beweisen suchen, daß jeder Summand einem Summanden der rechten Seite gleich ist. Zerlegen wir den Factor p in zwei vorläufig beliebige Theile AF und FC, so wäre zu beweisen:



$$(AF + FC)q = ac + bd \text{ oder}$$
$$AF.q + FC.q = ac + bd.$$

Angenommen nun, diese Gleichung sei richtig, so folgt aus ihr keineswegs, daß ein Summand der linken Seite einem Summanden der rechten gleich sein muß; hingegen ist der umgekehrte Schluß sicher richtig: kann man beweisen, daß etwa

$$AF.q = a.c \quad \text{und} \quad FC.q = b.d$$

ist, so folgt die Richtigkeit der vorhergehenden Gleichung, also des Satzes. Die letzten beiden Gleichungen führen zu den Proportionen:

$$AF : a = c : q \quad \text{und} \quad FC : b = d : q.$$

Sehen wir zu, ob beide sich etwa durch ähnliche Dreiecke begründen lassen. Die Glieder der ersten Proportion finden wir als Seiten in den Dreiecken ABF und DBC, die ein Paar gleicher Winkel haben, $\angle A = \angle D$. Sind diese Dreiecke ähnlich? In der That können sie es gar nicht sein, so lange der Punkt F ein beliebiger Punkt von p ist; allein gerade die uns frei stehende Wahl des Punktes F, bei der alles Entwickelte richtig bleibt, auch $\angle A$ seine Größe nicht ändert, giebt uns die Möglichkeit, die Dreiecke ähnlich zu machen. Wir wählen den Punkt F so, daß $\angle ABF = \angle DBC$ wird; dann ist $\triangle ABF \sim \triangle DBC$, und die Proportion $AF : a = c : q$ ist richtig, weil die homologen Glieder der Proportion auch homologe Seiten der Dreiecke sind. — Untersuchen wir nun die zweite Proportion $FC : b = d : q$. Da der Punkt F jetzt fest liegt und die erste Proportion richtig ist, so muß diese zweite Proportion richtig sein, falls der Lehrsatz richtig ist. Die Glieder dieser Proportion finden wir als Seiten in den Dreiecken CBF und DBA, und diese Dreiecke sind ähnlich; denn es ist $\angle C = \angle D$, weil beide auf dem Bogen AB stehen, und es ist $\angle CBF = \angle DBA$, weil beide aus gleichen Theilen bestehen. Da nun die Glieder der Proportion $FC : b = d : q$ in diesen Dreiecken homologe Seiten sind, so ist die Proportion richtig, also auch der Lehrsatz.

Synthesis. Hülfsconstruction. Man mache $\angle ABF = \angle DBC$ und verlängere BF bis zum Durchschnittspunkte F mit AC.

Bew. Es ist 1) $\triangle ABF \sim \triangle DBC$,

denn $\angle ABF = \angle DBC$ nach der Hülfsconstruction,

und $\angle BAF = \angle BDC$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen. Ferner ist

2) $\triangle CBF \sim \triangle DBA$;

denn $\angle CBF = \angle DBA$, weil sie aus gleichen Theilen bestehen,

und $\angle BCF = \angle BDA$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen. Aus 1) und 2) folgt:

$$AF : a = c : q \quad \text{und} \quad CF : b = d : q; \quad \text{oder}$$

$$AF \cdot q = ac$$

$$CF \cdot q = bd; \quad \text{addirt:}$$

$$(AF + CF) \cdot q = ac + bd; \quad \text{oder}$$

$$p \cdot q = ac + bd.$$

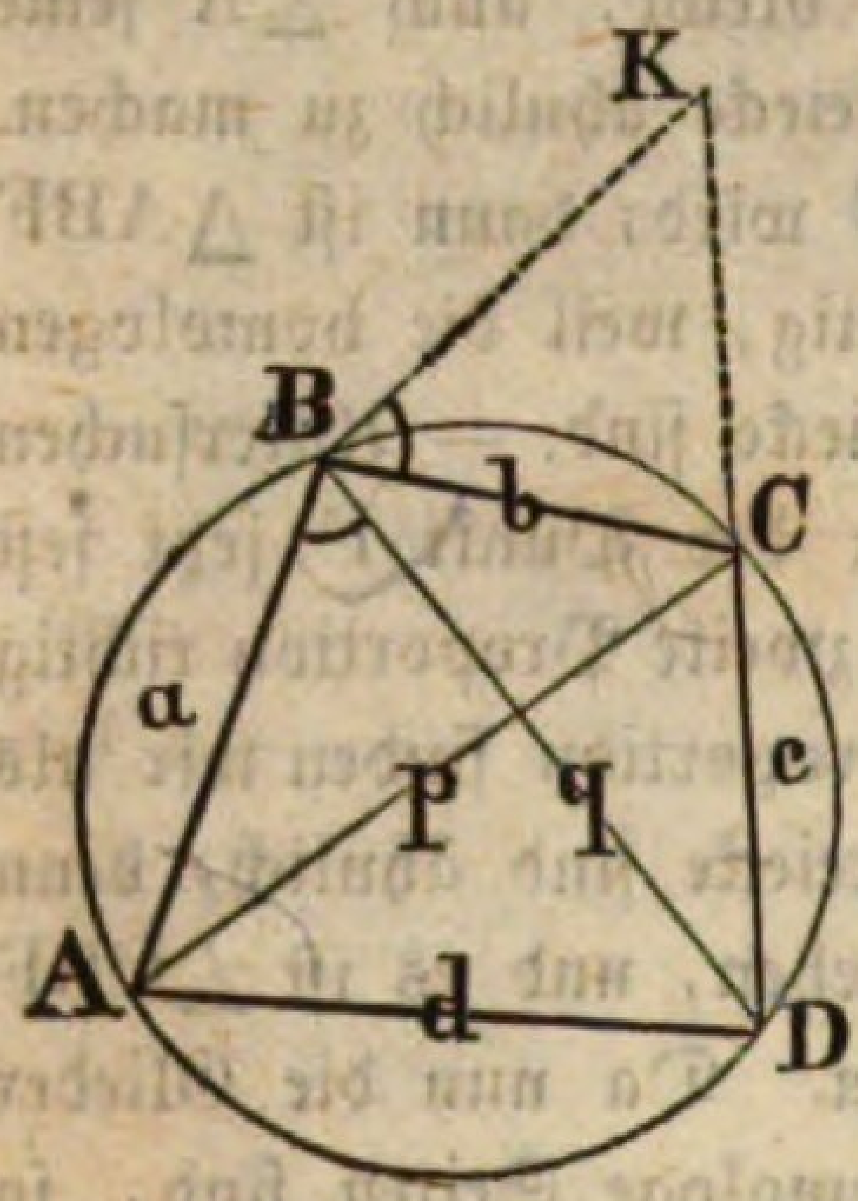
Bew. 2. Analysis. Der zweite Weg, den wir von der Behauptung $pq = ac + bd$ ausgehend einschlagen können, ist folgender: wir suchen die rechte Seite der Gleichung in ein Product zweier Factoren zu verwandeln. Die Gleichung führt dann unmittelbar zu einer Proportion, deren Richtigkeit etwa durch ähnliche Dreiecke zu begründen wäre. Angenommen also, es wäre $pq = ac + bd$, so müßte auch

$$p \cdot q = a\left(c + \frac{bd}{a}\right)$$

sein, woraus die Proportion folgen würde:

$$(1.) \quad a : p = q : c + \frac{bd}{a}.$$

Es käme also jetzt darauf an, zwei ähnliche Dreiecke zu finden, in welchen die Glieder dieser Proportion homologe Seiten sind. Wenden wir uns also zur Figur, so finden wir a und p als Seiten des $\triangle ABC$ und hätten nun ein diesem Dreieck ähnliches zu suchen, welches q und $c + \frac{bd}{a}$ zu Seiten hat.



Weil aber die Figur die Linie $c + \frac{bd}{a}$ nicht enthält, so müssen wir diese Linie zu construiren suchen. Da nun q und c in D zusammenstoßen, so wollen wir uns c über C hinaus verlängert, die Verlängerung CK aber $= \frac{bd}{a}$ gemacht denken. Verbinden wir dann B mit K, so enthält $\triangle DBK$ die Seiten q und $c + \frac{bd}{a}$. Die Dreiecke DBK und ABC haben aber ein Paar gleicher Winkel: $\measuredangle BDK = \measuredangle BAC$; wenn also der Satz richtig ist, also auch die Proportion (1), so sind diese Dreiecke wirklich ähnlich; denn sie haben dann ein Paar gleicher Winkel und die einschließenden Seiten proportional. Umgekehrt: Können wir K so bestimmen, daß $\triangle DBK \sim \triangle ABC$ wird, so muß, falls nur der Lehrsatz richtig ist, $CK = \frac{bd}{a}$ werden. Endlich aber folgt hieraus noch der Schluß: Können wir $\triangle DBK \sim \triangle ABC$ construiren und dann beweisen, daß $CK = \frac{bd}{a}$ ist, so ist der Lehrsatz richtig. Da nun $\measuredangle BDK = \measuredangle BAC$ ist, so braucht man nur $\measuredangle DBK = \measuredangle ABC$ zu machen, oder, weil $\measuredangle DBC$ ein gemeinschaftlicher Theil beider Winkel ist, man braucht nur $\measuredangle CBK = \measuredangle ABD$ zu machen, um $\triangle DBK \sim \triangle ABC$ zu erhalten. — Das Bedenken, ob bei dieser Construction BK auch die Verlängerung der DC über C hinaus schneiden wird, erledigt sich leicht. Es ist $\measuredangle KCB = \measuredangle BAD$, weil beide Supplemente des $\measuredangle BCD$ sind; folglich ist $\measuredangle KCB + \measuredangle KBC = \measuredangle BAD + \measuredangle ABD$, daher kleiner als 2R. — Es ist jetzt noch zu untersuchen, ob $CK = \frac{bd}{a}$ ist. Angenommen, dies wäre richtig, so müßte sich verhalten

$$b : CK = a : d,$$

und von der Richtigkeit dieser Proportion hängt jetzt die Richtigkeit des Satzes ab. Suchen wir aber Dreiecke auf, in welchen die Glieder dieser Proportion Seiten sind, so finden wir die Dreiecke BCK und BAD. Diese Dreiecke sind aber ähnlich, weil wir oben gefunden haben $\measuredangle BCK = \measuredangle BAD$ und weil wir $\measuredangle CBK = \measuredangle ABD$ gemacht haben. Da nun die Glieder der vorstehenden Proportion in diesen Dreiecken homologe sind, so ist die Proportion, also auch der Lehrsatz richtig.

Synthesis. Hülfsconstruction. Man mache $\measuredangle CBK = \measuredangle ABD$ und verlängere BK bis zum Durchschnittspunkte K mit der Verlängerung von DC.

Bew. Es ist $\Delta DBK \sim \Delta ABC$,
denn $\measuredangle DBK = \measuredangle ABC$, folgt aus der Hülfsconstruction,
und $\measuredangle BDK = \measuredangle BAC$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen. Hieraus folgt:

$$q : DK = a : p; \text{ folglich}$$
$$p \cdot q = a \cdot DK \text{ oder}$$
$$(1.) \quad p \cdot q = a(c + CK).$$

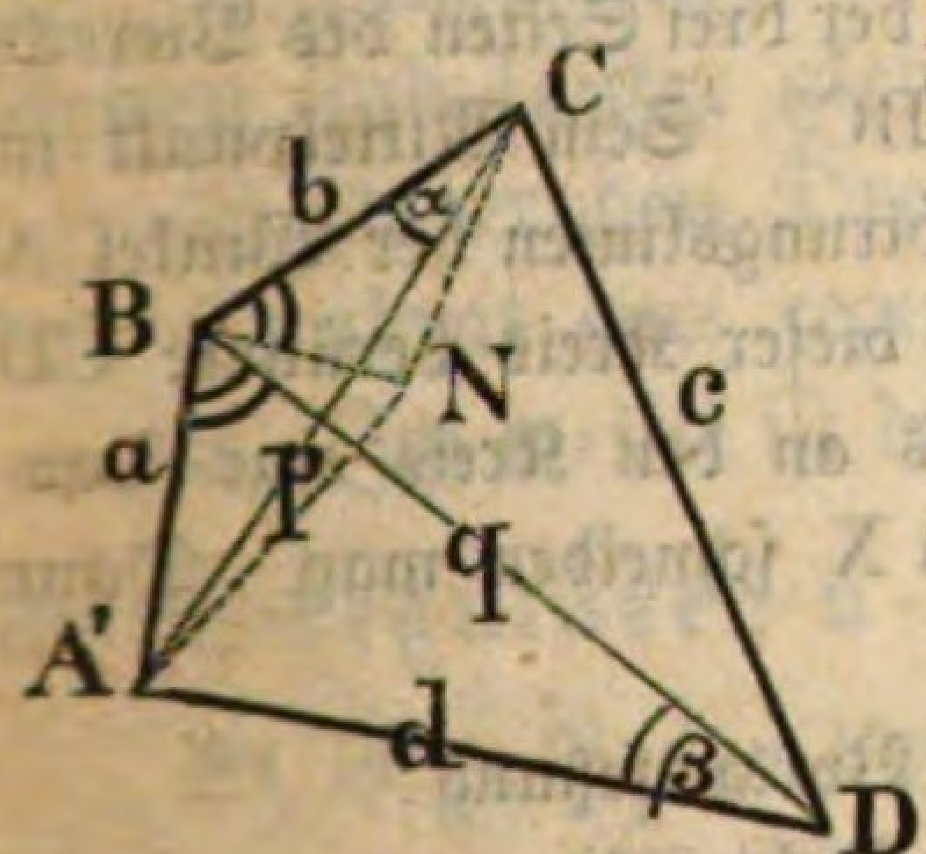
Ferner ist $\Delta BCK \sim \Delta BAD$,
denn $\measuredangle CBK = \measuredangle ABD$ nach der Hülfsconstruction,
und $\measuredangle BCK = \measuredangle BAD$ als Supplemente des $\measuredangle BCD$. Hieraus folgt:

$$b : CK = a : d, \text{ folglich}$$
$$(2.) \quad CK = \frac{bd}{a}.$$

Setzt man den Werth von CK aus (2.) in (1.), so folgt:

$$p \cdot q = a\left(c + \frac{bd}{a}\right) \text{ oder}$$
$$p \cdot q = ac + bd, \text{ w. z. b. w.}$$

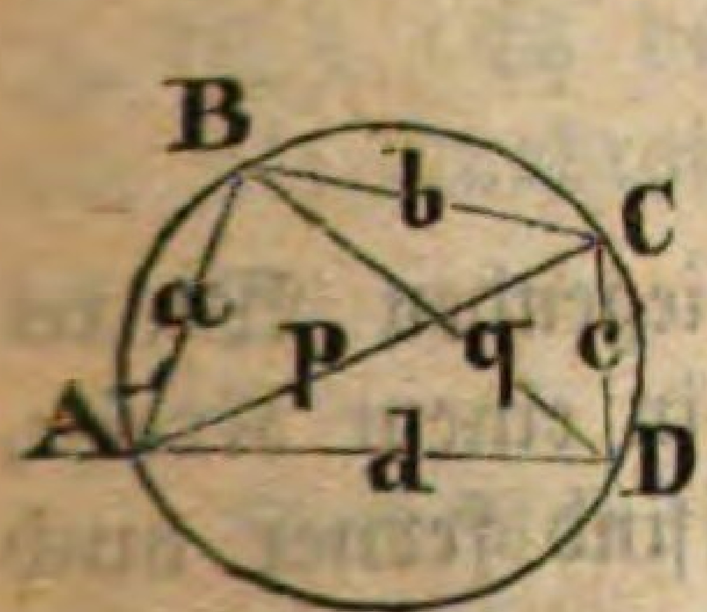
Anmerk. Der umgekehrte Satz »ABCD ist ein Viereck im Kreise, wenn $pq = ac + bd$ ist« kann indirect bewiesen werden. Wäre $\alpha = \beta$, so wäre der Satz richtig. Gesetzt, es sei α ungleich β, so kann man $\measuredangle BCN = \beta$ machen; wird dann noch $\measuredangle CBN = \measuredangle DBA$ gemacht und AN gezogen, so ist $\Delta CBN \sim \Delta DBA$, folglich $b : CN = q : d$, daher (1.) $CN \cdot q = bd$. Aus der Aehnlichkeit der vorstehenden Dreiecke folgt noch $b : q = BN : a$; daher leicht: $\Delta CBD \sim \Delta NBA$, folglich $q : c = a : AN$, also (2.) $q \cdot AN = ac$. Aus (1) und (2.) folgt $q(AN + CN) = ac + bd$, und vergleicht man hiermit die Voraussetzung, so folgt der Widerspruch $p = AN + CN$.



II. **Bei jedem Viereck im Kreise verhalten sich die Diagonalen zu einander wie die Summen der Producte der in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Seiten, oder**

$$p : q = ad + bc : ab + cd.$$

Bew. Das Viereck ABCD wird durch die Diagonale p in zwei Dreiecke zerlegt, und die Summe der Inhalte beider Dreiecke giebt sonach den Inhalt des Vierecks. Denselben Inhalt erhält man aber auch durch Addition der Inhalte der beiden Dreiecke, in welche die Diagonale q das Viereck zerlegt. Drückt man nun den Inhalt jedes Dreiecks durch den Satz §. 143. aus, und bezeichnet den Radius des Kreises um das Viereck mit r, so entsteht die Gleichung



$$\frac{abp}{4r} + \frac{cdp}{4r} = \frac{adq}{4r} + \frac{bcq}{4r}, \text{ oder}$$

$$p(ab + cd) = q(ad + bc), \text{ daher}$$

$$p : q = ad + bc : ab + cd.$$

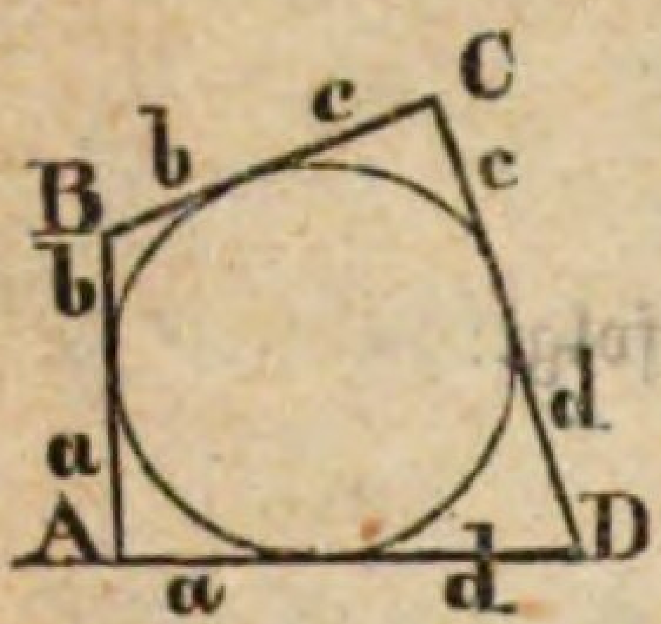
§. 148.

Lehrsätze.

1) In jedem Viereck um einen Kreis sind die Summen gegenüberliegender Seiten einander gleich, also

$$AB + CD = AD + BC.$$

Bew. Die Theile zweier Tangenten, welche zwischen ihrem Durchschnittspunkt und den Berührungspunkten liegen, sind einander gleich; folglich sind die durch gleiche kleine Buchstaben bezeichneten Theile der vier Seiten einander gleich, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

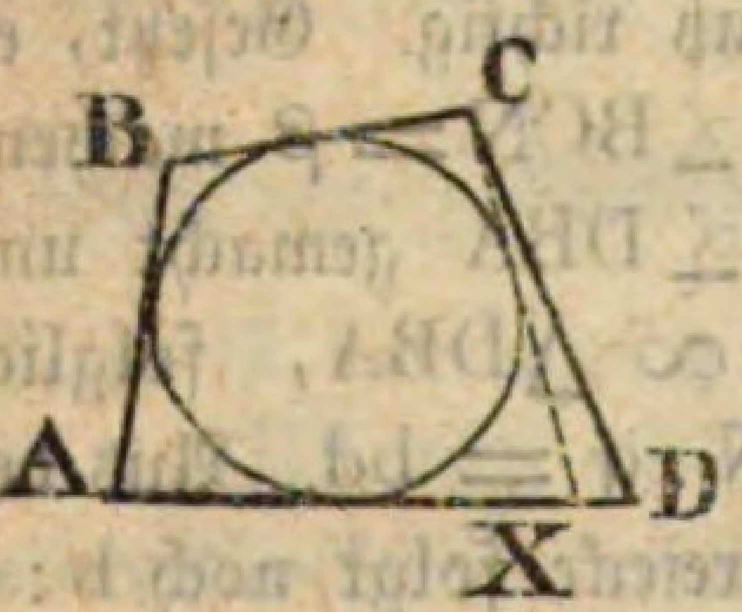


2) Jedes Viereck liegt um einen Kreis, wenn es nur concave Winkel hat, und die Summen gegenüberliegender Seiten einander gleich sind.

Voraussf. $AB + CD = AD + BC$.

Behaupt. ABCD liegt um einen Kreis.

Bew. Man kann immer einen Kreis construiren, der drei Seiten des Vierecks berührt, z. B. AD, AB und BC. Sein Mittelpunkt ist der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der Winkel A und B (§. 28. VII.). Gesetzt, dieser Kreis berührte CD nicht, so kann man von C aus an den Kreis eine Tangente CX legen, welche AD in X schneiden mag. Dann ist aus Nr. 1.:



$AX + BC = AB + CX$, und nach der Voraussetzung:
$AD + BC = AB + CD$; folglich durch Subtraction:

$AD - AX = CD - CX$ oder $XD = CD - CX$.

Diese Gleichung zeigt den Widerspruch, daß im ΔCXD eine Seite der Differenz der beiden andern gleich sein müßte. Hieraus folgt, daß CD auch den Kreis berühren muß.

Anmerk. Ein Viereck mit einem convexen Winkel kann nach §. 124. VI. überhaupt nicht um einen Kreis liegen. Hat es lauter concave Winkel, erfüllt es aber die andere Bedingung des Satzes 2) nicht, so folgt indirect aus dem Satze 1), daß es nicht um einen Kreis liegen kann.

§. 149.

Das Parallelogramm.

In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich; folglich liegt nur dasjenige Parallelogramm in einem Kreise, dessen Winkel rechte sind. — Im Parallelogramm sind ferner auch die gegenüberliegenden Seiten gleich; folglich liegt nur dasjenige

Parallelogramm um einen Kreis, in welchem auch die anstoßenden Seiten einander gleich sind, also überhaupt alle Seiten.

Hieraus folgt: Nur das Quadrat und das Rechteck liegt in einem Kreise; nur das Quadrat und der Rhombus liegt um einen Kreis; das Quadrat allein liegt in einem Kreise und zugleich auch um einen Kreis.

Jedes Paralleltrapez in einem Kreise ist ein symmetrisches (§. 126. I.).

Anmerk. Die beiden Sätze §. 146. Nr. 1. und §. 148. Nr. 1. lassen sich erweitern und auf Vielecke von gerader Seitenzahl anwenden. Bei einem solchen Vieleck im Kreise ist die Summe des 1ten, 3ten, 5ten u. s. w. Winkels gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten u. s. w. Man findet nämlich, daß bei einem 2n-Eck die Bogen, auf welchen die Winkel jeder Summe stehen, zusammen gerade die Peripherie n — 1mal geben. — Bei dem Vieleck um den Kreis gilt das Gesetz für die Seiten.

Die regulären Vielecke.

§. 150.

Erklärung. Folgerungen.

1) Eine geradlinige Figur heißt regulär, wenn sie lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat.

2) Unter den Dreiecken ist das gleichseitige, unter den Vierecken das Quadrat eine reguläre Figur.

3) Im n-Eck ist die Summe aller Winkel $= (n-2)2R$; folglich ist im regulären n-Eck jeder Umfangswinkel $= \frac{n-2}{n} 2R$.

Es ist z. B. der Umfangswinkel

im regulären	Fünfeck	$= 108°$
» »	Sechseck	$= 120°$
» »	Siebeneck	$= 128° \; 34' \; 17\frac{1}{7}''$
» »	Achteck	$= 135°$
» »	Neuneck	$= 140°$
» »	Zehneck	$= 144°$.

4) Reguläre Vielecke von gleicher Seitenzahl sind congruent, wenn eine Seite des einen einer Seite des anderen gleich ist.

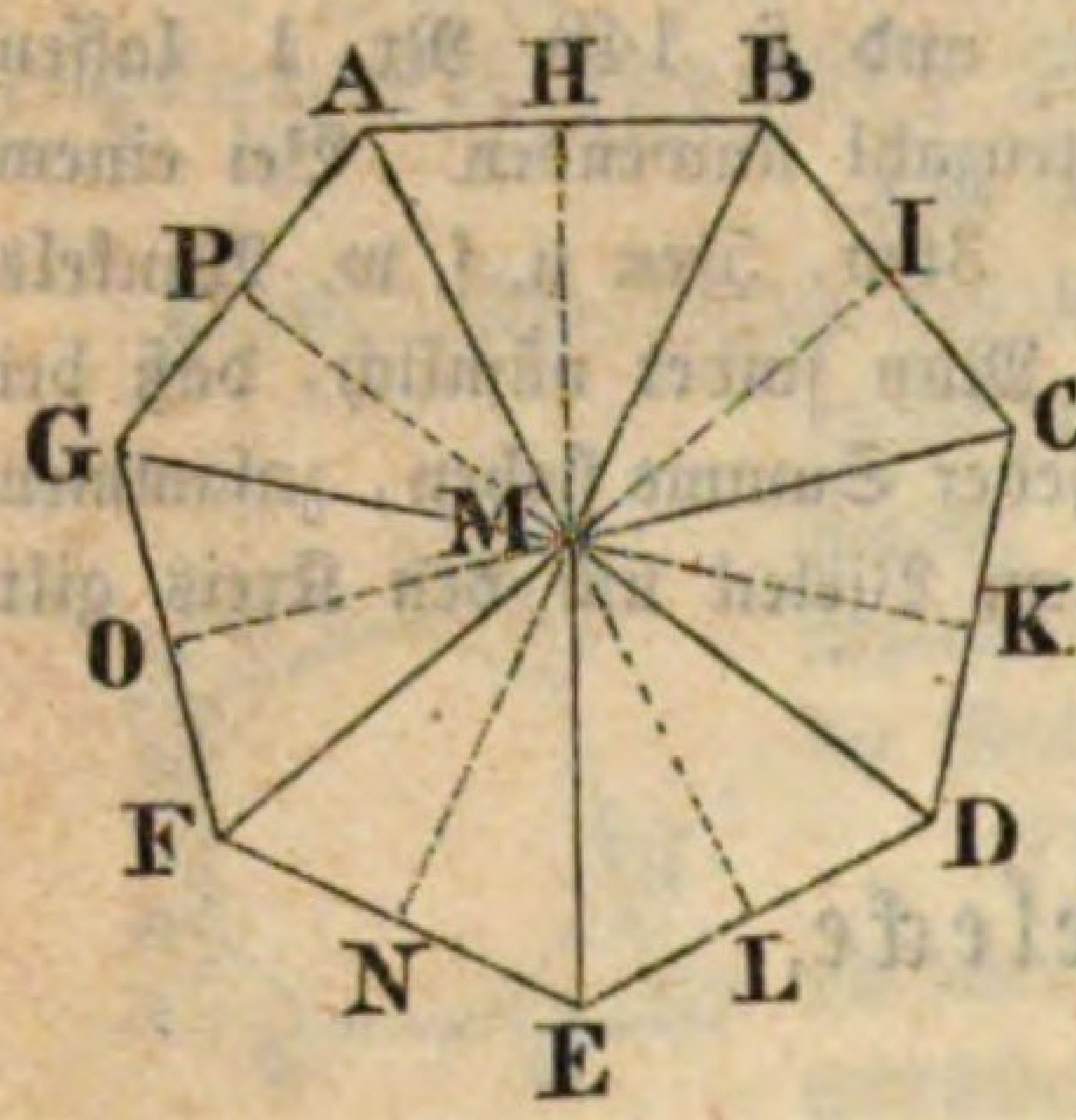
5) Reguläre Vielecke von gleicher Seitenzahl sind immer ähnlich (§. 76.). Es verhalten sich also zwei reguläre n-Ecke zu einander wie die Quadrate ihrer Seiten.

§. 151.

Lehrsatz.

Jedes reguläre Vieleck liegt in einem Kreise und um einen Kreis. Beide Kreise sind concentrisch, und ihr gemeinschaft-

licher Mittelpunkt ist daher von allen Ecken gleich weit entfernt, und dann auch von allen Seiten. Dieser Punkt wird auch der **Mittelpunkt des Vielecks** genannt, und in ihm schneiden sich sowohl die Perpendikel, in den Mittelpunkten der Seiten auf diese Seiten errichtet, als auch die Halbirungslinien aller Winkel des Vielecks. Zwei solche Linien, wenn sie nur nicht in eine Richtung zusammenfallen, sind also zur Construction des Mittelpunktes ausreichend.



Bew. Wenn man in dem regulären Polygon ABCDEFG zwei Seiten halbirt, am bequemsten zwei an einander stoßende, z. B. AB in H und BC in I, und dann HM $\perp$ AB und IM $\perp$ BC errichtet, so wird behauptet, daß M der Mittelpunkt des regulären Polygons ist. Zum Beweise halbire man auch die andern Seiten: CD in K, DE in L u. s. w., und verbinde nun M so wohl mit allen Ecken, als auch mit den Mittelpunkten aller Seiten. Man hat zu beweisen:

1) $MA = MB = MC = MD = ME = MF = MG$;

2) $MH = MI = MK = ML = MN = MO = MP$.

Zunächst folgt aus der Construction, daß MBA und MBC gleichschenklige Dreiecke sind; folglich ist $MA = MB = MC$, daher auch aus Gleichheit der drei Seiten

$$\triangle MBA \cong \triangle MBC.$$

Hieraus folgt $\measuredangle MBA = \measuredangle MBC$, d. h. **MB halbirt den Winkel bei B.** Sonach ist $\measuredangle MBC$ der halbe Umfangswinkel, daher auch der Winkel MCB, und weil alle Umfangswinkel gleich sind, so ist $\measuredangle MCD$ auch der halbe Umfangswinkel, und **MC halbirt den Winkel bei C.** Aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels ist nun

$$\triangle MCB \cong \triangle MCD;$$

folglich ist $\triangle MCD$ auch gleichschenklig, und also

$$MC = MD.$$

Genau so, wie man eben vom $\triangle MBC$ zum $\triangle MCD$ übergegangen ist und die Congruenz beider Dreiecke bewiesen hat, geht man vom $\triangle MCD$ zum $\triangle MDE$ über, dann vom $\triangle MDE$ zum $\triangle MEF$ u. s. w. rings herum und beweist die Congruenz aller dieser Dreiecke. Da nun also alle die Dreiecke, welche auf den Seiten des Polygons stehen und M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, congruent und gleichschenklig sind, so ist die Behauptung Nr. 1. bewiesen. In congruenten Dreiecken sind aber homologe Höhen gleich; und weil im gleichschenkligen Dreieck die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundlinie eine Höhe ist, so ist auch die Behauptung Nr. 2. bewiesen.

§. 152.
Folgerungen.

1) Die Verbindungslinien des Mittelpunkts eines regulären n-Ecks mit allen Ecken zerlegen das Polygon in n congruente Dreiecke, so daß jedes dieser Dreiecke der nte Theil des Polygons ist.

2) Diese Verbindungslinien bilden um den Mittelpunkt herum n gleiche Winkel, von denen also jeder der nte Theil von 4R (oder 360°) ist.

3) Fällt man noch vom Mittelpunkt auf alle Seiten Perpendikel, so werden die Seiten halbirt, und das Polygon wird in 2n congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

4) Um den Mittelpunkt herum liegen jetzt 2n gleiche Winkel, von denen jeder der 2nte Theil von 360° und Complement des halben Umfangswinkels ist.

5) Die Verbindungslinie des Mittelpunktes eines regulären Polygons mit jeder Ecke, also der Radius des umschriebenen Kreises, soll der **großе Radius** des Polygons genannt werden; der Abstand des Mittelpunkts von jeder Seite, also der Radius des eingeschriebenen Kreises, soll der **kleine Radius** des Polygons heißen.

6) Bezeichnet F den Inhalt, a die Seite und ϱ den kleinen Radius eines regulären n-Ecks, so ist $F = n \times \frac{1}{2} a\varrho = \frac{1}{2}(na)\varrho$. Nun ist aber na der Umfang des Polygons; folglich ist der **Inhalt jedes regulären Polygons gleich dem halben Product aus dem Umfange und dem kleinen Radius.**

7) Bezeichnet noch r den großen Radius, so ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatz $r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, so daß aus zwei dieser Größen die dritte gefunden werden kann. — Uebrigens sei der Leser darauf aufmerksam gemacht, daß hiermit nicht gesagt sein soll, daß je zwei dieser Größen von einander unabhängig sind. Im Gegentheil: ist die Seite a eines regulären n-Ecks gegeben, so ist das n-Eck vollkommen bestimmt (man kennt alle Seiten und alle Winkel), und r und ϱ müssen sich berechnen lassen. Diese Berechnung kann allgemein aber erst später gelehrt werden. Statt a kann auch r oder ϱ gegeben sein.

8) Die Inhalte zweier regulären Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer großen oder kleinen Radien, die Umfänge aber wie diese Radien selbst.

Bew. Der Grund liegt darin, daß nicht nur diese Vielecke, sondern auch die Dreiecke ähnlich sind, welche in beiden von einer Seite und den beiden zugehörigen großen Radien gebildet werden (Gleichheit der Winkel). Die Vielecke verhalten sich zunächst wie diese Dreiecke (ihre gleichvielten Theile), und die

Dreiecke verhalten sich wieder wie die Quadrate homologer Seiten oder Höhen. Die großen Radien sind aber homologe Seiten, die kleinen Radien homologe Höhen. — Der Beweis für die Umfänge ist ähnlich zu führen.

§. 153.

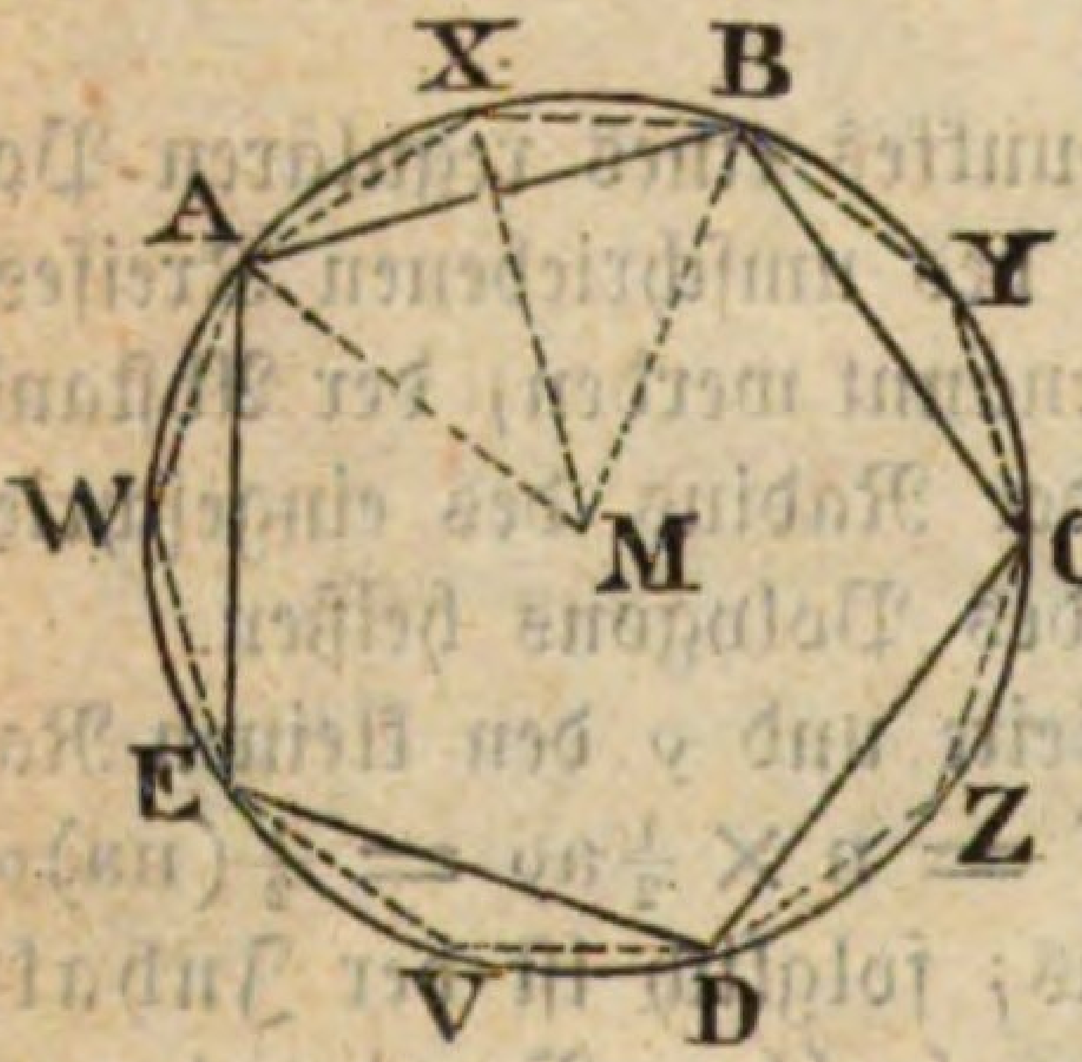
Aufgabe.

In einem Kreise ist ein eingeschriebenes reguläres Polygon gegeben; man soll

I. ein reguläres Polygon von doppelter Seitenzahl in diesen Kreis einschreiben, und

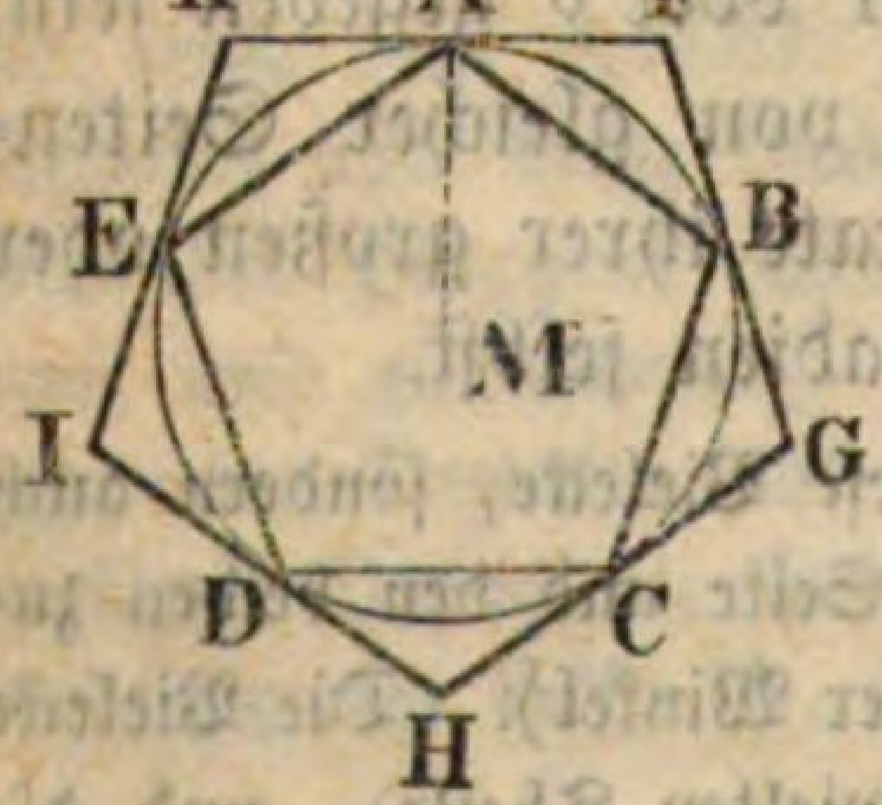
II. ein reguläres Polygon von derselben Seitenzahl um diesen Kreis legen.

Auflösung zu I. Es sei ABCDE das gegebene reguläre n-Eck. Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bogen; folglich zerlegen die Ecken



die Peripherie in n gleiche Bogen. Halbirt man jeden Bogen, AB in X, BC in Y, u. s. w., und verbindet jeden Theilpunkt mit den beiden benachbarten Ecken: so erhält man das verlangte in den Kreis eingeschriebene reguläre 2n-Eck AXBYCZDVEW. Die Seiten desselben sind gleich, weil sie zu gleichen Bogen gehören, und die Winkel sind gleich, weil sie auf gleichen Bogen stehen, nämlich jeder auf einem Bogen, der gleich $\frac{n-1}{n}$ der Peripherie ist (oder aus Congruenz der $\triangle\triangle$ AXB, BYC, u. s. w.). Um aber einen Bogen zu halbiren, z. B. AB, weiß man, daß der Radius MX, welcher den Mittelpunkt des Bogens mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, den Centriwinkel AMB halbirt, auf der Sehne AB senkrecht steht und auch diese Sehne halbirt. Eine dieser Eigenschaft kann man zur Construction benutzen.

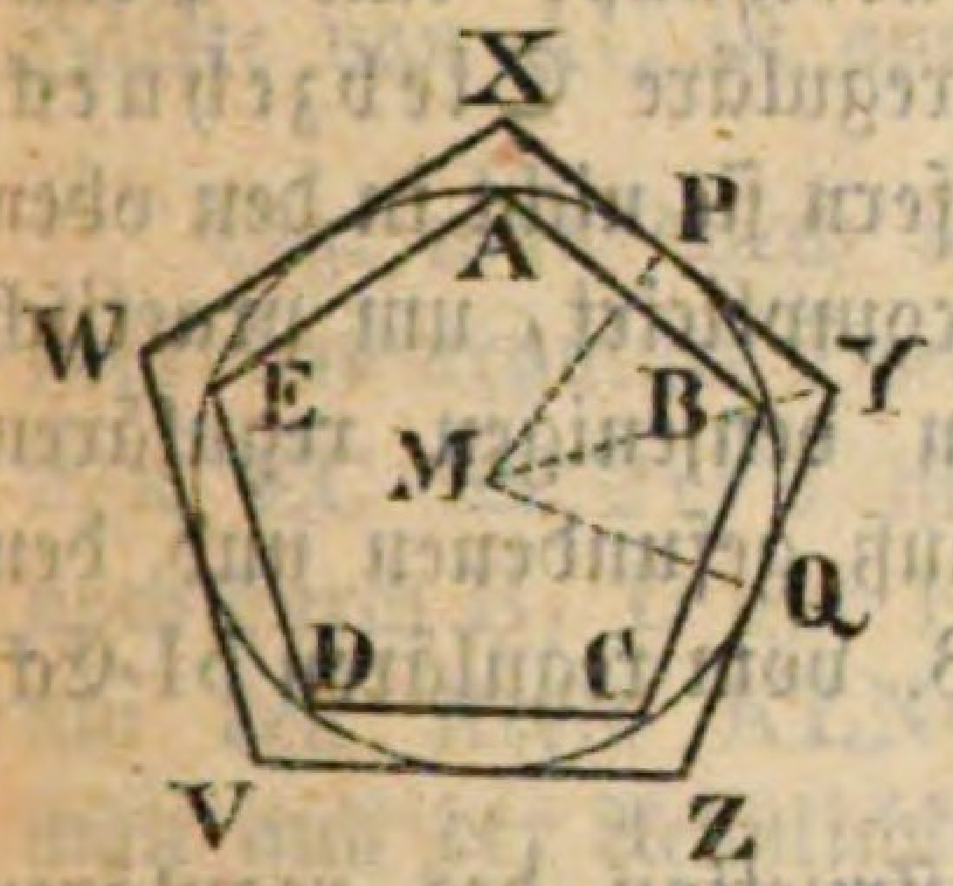
Auflösung zu II. Ist ABCDE das reguläre n-Eck im Kreise um M, so kann das reguläre n-Eck um diesen Kreis auf zwei Arten construirt werden.



1) Man lege durch jede Ecke des eingeschriebenen Polygons eine Tangente an den Kreis und verlängere jede Tangente bis zu ihren Durchschnittspunkten mit den beiden benachbarten Tangenten. So entsteht das reguläre n-Eck um den Kreis FGHIK.

Bew. Die gleichschenkligen Dreiecke FAB, GBC, HCD, u. s. w. sind congruent; denn sie haben gleiche

Grundlinien und gleiche Winkel an diesen Grundlinien, weil jeder dieser Winkel das Complement des halben Umfangswinkels des Polygons im Kreise ist (z. B. $\measuredangle FAB = 90° - \measuredangle MAB$). Hieraus folgt die Gleichheit aller Winkel des Polygons um den Kreis, und auch die Gleichheit aller Seiten, weil ihre Hälften gleich sind.



2) Man halbire alle zu den Seiten des eingeschriebenen regulären n-Ecks gehörigen Bogen (z. B. AB in P) und lege durch den Mittelpunkt jedes Bogens an den Kreis eine Tangente, die man bis zu den Durchschnittspunkten mit den benachbarten Tangenten zu verlängern hat. So entsteht das reguläre n-Eck um den Kreis XYZVW.

Bew. Die Tangenten sind mit den Seiten des eingeschriebenen Polygons parallel (z. B. XY ╪ AB) nach §. 126. IV. (woraus schon folgt, daß das umschriebene Polygon gleiche Winkel hat; denn sie sind den Winkeln des eingeschriebenen Polygons der parallelen Schenkel wegen gleich). Um nun zu beweisen, daß XYZVW regulär ist, hat man zu zeigen, daß die Radien nach den Ecken des eingeschriebenen Polygons, gehörig verlängert, durch die Ecken des umschriebenen gehen. Ist dies der Fall, so sind beide Polygone ähnlich (§. 92. Zusatz 2.), und weil das eingeschriebene regulär ist, so ist es dann auch das andere. Daß aber z. B. der Radius MB verlängert durch Y geht, folgt so: MB halbirt den Winkel PMQ (§. 118. Nr. 3.), und MY halbirt diesen Winkel auch (§. 114. Nr. 3.); folglich fallen MB und MY in eine Linie zusammen.

§. 154.

Construction regulärer Vielecke in und um einen Kreis.

Die Aufgabe »in einen Kreis ein reguläres n-Eck einzuzeichnen« fällt mit der Aufgabe »die Peripherie in n gleiche Theile zu theilen« zusammen, weil zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören. Allgemein ist diese Aufgabe durch elementare Construction nicht zu lösen; namentlich aber sind es verhältnißmäßig nur wenig reguläre Polygone, deren Construction mit Zirkel und Lineal einfach genug ist, um practisch anwendbar zu sein.

Im vorigen §. ist gezeigt worden, daß, wenn man in einen Kreis ein reguläres n-Eck einzeichnen kann, dann auch das reguläre 2n-Eck, also auch das reguläre 4n-Eck, 8n-Eck, u. s. w., überhaupt das reguläre $2^a . n$-Eck (wenn a ganz und positiv ist) in und dann auch um den Kreis zu construiren ist. Zu jedem construirbaren regulären Polygon gehört also immer eine ganze Folge construirbarer regulärer Polygone, und geben wir von jeder solchen Gruppe nur das Grundpolygon an (welches die kleinste Seitenzahl hat), so sind folgende

regulären Polygone elementar construirbar: das reguläre Dreieck, Viereck, Fünfeck und Fünfzehneck. Die Construction dieser Polygone finden wir schon in Euklids Elementen; zu ihnen hat Gauß am Anfange dieses Jahrhunderts noch diejenigen regulären Polygone hinzugefügt, deren Seitenzahl überhaupt eine Primzahl von der Form $2^n + 1$ ist, z. B. das reguläre Siebzehneck. Die Construction dieser letzteren aber (in so fern sie nicht in den oben angegebenen schon enthalten sind) ist viel zu complicirt, um practisch brauchbar zu sein. Dasselbe gilt dann von denjenigen regulären Vielecken, welche mittelbar aus den von Gauß gefundenen und den schon früher bekannten sich bilden lassen, z. B. vom regulären 51-Eck, 255-Eck u. s. w. (Vergl. §. 202.)

Nachstehend folgt die sehr einfache Construction des regulären Dreiecks, Vierecks und Sechsecks. Das siebente Kapitel enthält die Construction des Fünfecks, Zehnecks, Fünfzehnecks u. s. w. in Verbindung mit der Berechnung des Umfangs und Inhalts aller dieser Polygone.

1) Das Quadrat. Der Mittelpunkt desselben ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen, und da diese auf einander senkrecht stehen, so construirt man in einen Kreis ein Quadrat, wenn man die Endpunkte zweier auf einander senkrechten Durchmesser AC und BD verbindet. Legt man durch diese Endpunkte Tangenten, so entsteht das Quadrat um den Kreis. Letzteres ist doppelt so groß, als das eingeschriebene. Bezeichnet r den Radius des Kreises, so ist (§. 63. Nr. 1.).



die Seite des Quadrats im Kreise $= r\sqrt{2}$;
die Seite des Quadrats um den Kreis $= 2r$.

2) Das gleichseitige Dreieck und reguläre Sechseck. Ist ABCDEF das in den Kreis um M eingeschriebene reguläre Sechseck, so ist $\measuredangle AMB = \frac{360°}{6} = 60°$, und weil $MA = MB$, so ist ΔMAB gleichseitig; also ist die Seite des regulären Sechsecks im Kreise dem Radius gleich, woraus die höchst einfache Construction dieses Sechsecks folgt. — Das ΔACE ist das in den Kreis



eingeschriebene reguläre Dreieck, und seine Construction folgt aus der des Sechsecks. Um die Seite AC aus dem Radius r zu finden, kann man den Satz §. 68. Nr. 2. auf den Rhombus ABCM anwenden und erhält $AC^2 + r^2 = 4r^2$; folglich $AC^2 = 3r^2$ oder $AC = r\sqrt{3}$. (Die Hälfte von AC ist auch als Höhe des $\Delta MAB = \frac{r}{2}\sqrt{3}$).

Legt man durch A, C und E Tangenten an den Kreis, so entsteht das reguläre Dreieck um den Kreis GHI, dessen Seite IG gleich $2 \times EC = 2r\sqrt{3}$ ist (sein Inhalt $= 4. \Delta ACE$). — Zieht man noch durch B, D und F Tangenten, so entsteht das reguläre Sechseck um den Kreis KLNOPQ. Die halbe Seite AL desselben findet man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MAX und ALX, aus welcher folgt $MA : MX = AL : AX$ oder $r : \frac{r}{2}\sqrt{3} = AL : \frac{r}{2}$; daher $AL = \frac{r}{\sqrt{3}}$, folglich $KL = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$. Es ist also KL der dritte Theil von IG und $\frac{2}{3}$ von AC. Es ist also gefunden:

die Seite des regulären Dreiecks im Kreise $= r\sqrt{3}$
» » » » Sechsecks » » $= r$
» » » » Dreiecks um den Kreis $= 2r\sqrt{3}$
» » » » Sechsecks » » » $= \frac{2}{3}r\sqrt{3}$.

§. 155.

Zusatz.

Umgekehrt kann man leicht aus der Seite a des regulären Dreiecks, Vierecks und Sechsecks den großen Radius r und kleinen Radius ϱ dieser Figuren finden.

1) Das gleichseitige Dreieck. Die Transversalen von den Ecken nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten sind zugleich die Höhen des Dreiecks und halbiren die Winkel; daher ist (nach §. 63. Nr. 4. und §. 87. Nr. 1.) $r + \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $r : \varrho = 2 : 1$. Hieraus folgt (Arithm. §. 147.):

$$r = \frac{a}{3}\sqrt{3}\,; \qquad \varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

2) Das Quadrat. $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,; \qquad \varrho = \frac{a}{2}$.

3) Das reguläre Sechseck. $r = a\,; \qquad \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Berechnung des Kreises und seiner Peripherie, der Bogen, der Kreisausschnitte und Kreisabschnitte.

§. 156.
Lehrsätze.

I. **Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Radien oder Durchmesser.** Bezeichnen P und p die Peripherien, r und ϱ die zugehörigen Radien, so heißt die Behauptung:

$$P : p = r : \varrho.$$

Bew. Man denke sich in jeden Kreis ein reguläres n-Eck eingezeichnet und bezeichne ihre Umfänge resp. durch U und u, so verhält sich $U : u = r : \varrho$ (§. 152. Nr. 8.). Nun ist $P > U$ und $p > u$; bezeichnet man den Theil von P, um welchen U von P übertroffen wird, mit A, und den Theil von p, um welchen u von p übertroffen wird, mit a, so ist

$$U = P - A \text{ und } u = p - a;$$

folglich verhält sich $P - A : p - a = r : \varrho$, woraus folgt:

$$\frac{P-A}{r} = \frac{p-a}{\varrho} \text{ oder}$$

$$\frac{P}{r} - \frac{A}{r} = \frac{p}{\varrho} - \frac{a}{\varrho}.$$

Die Minuenden beider Seiten sind bestimmte unveränderliche Zahlen, während die Subtrahenden von n, d. h. von der Seitenzahl der eingeschriebenen Polygone, abhängig, also veränderlich sind und der Null beliebig nahe gebracht werden können. Denn denkt man sich n verdoppelt, vervierfacht, verachtfacht u. s. w., so wird die Differenz $P - U$, d. h. A, und die Differenz $p - u$, d. h. a, immer kleiner und kleiner und nähert sich immer mehr und mehr der Null. Es muß daher nach §. 50. $\frac{P}{r} = \frac{p}{\varrho}$ sein, oder $P : p = r : \varrho$.

II. **Die Inhalte zweier Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.** Bezeichnen F und f die Inhalte, r und ϱ die Radien, so heißt die Behauptung:

$$F : f = r^2 : \varrho^2.$$

Bew. Man denke sich in jeden Kreis ein reguläres n-Eck eingezeichnet und bezeichne ihre Inhalte resp. durch I und i, so verhält sich $I : i = r^2 : \varrho^2$ (§. 152. Nr. 8.). Nun ist $F > I$ und $f > i$; bezeichnen wir $F - I$ durch A und $f - i$ durch a, so ist

$$I = F - A \text{ und } i = f - a;$$

folglich verhält sich $F - A : f - a = r^2 : \varrho^2$, woraus folgt:

$$\frac{F-A}{r^2} = \frac{f-a}{\varrho^2} \text{ oder}$$

$$\frac{F}{r^2} - \frac{A}{r^2} = \frac{f}{\varrho^2} - \frac{a}{\varrho^2}.$$

Wieder sind (wie im Beweise zu I.) die Minuenden unveränderliche Zahlen, während die Subtrahenden von n abhängig, also veränderlich sind und durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl der eingeschriebenen Polygone der Null beliebig nahe gebracht werden können. Hieraus folgt aber nach §. 50.

$$\frac{F}{r^2} = \frac{f}{\varrho^2} \text{ oder } F : f = r^2 : \varrho^2.$$

III. **Jeder Kreis ist einem Dreieck gleich, welches seine Peripherie zur Grundlinie und seinen Radius zur Höhe hat.** Bezeichnet F den Inhalt, P die Peripherie und r den Radius des Kreises, so heißt die Behauptung:

$$F = \tfrac{1}{2}Pr.$$

Bew. Denkt man sich in den Kreis ein reguläres n-Eck eingeschrieben und bezeichnet seinen Inhalt durch I, seinen Umfang durch U und seinen kleinen Radius durch ϱ, so ist nach §. 152. Nr. 6.:

$$I = \tfrac{1}{2}U\varrho.$$

Nun ist $F > I$, $P > U$ und $r > \varrho$, und bezeichnet man $F - I$ durch A, $P - U$ durch a, $r - \varrho$ durch α, so folgt:

$$I = F - A, \quad U = P - a, \quad \varrho = r - \alpha;$$

folglich ist $F - A = \frac{1}{2}(P - a)(r - \alpha)$ oder

$$F - A = \tfrac{1}{2}Pr - \tfrac{1}{2}(P\alpha + ra - a\alpha).$$

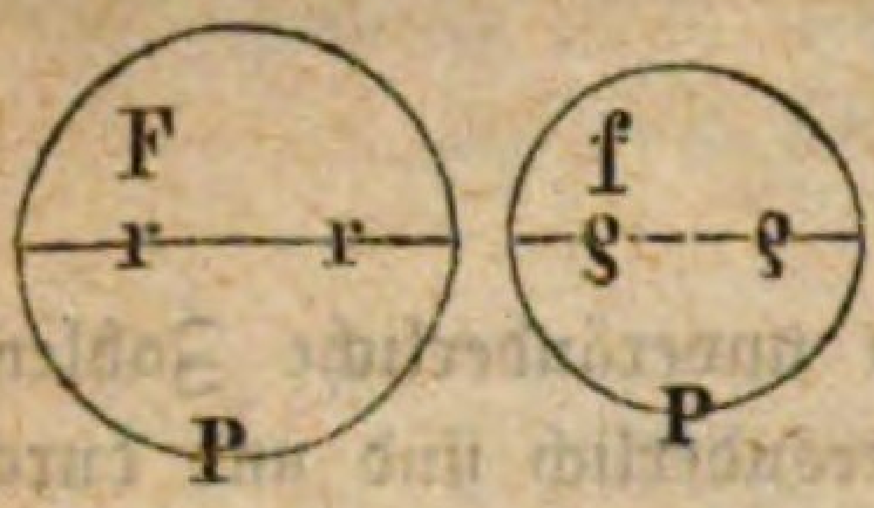
Denkt man sich nun die Seitenzahl des eingeschriebenen Polygons verdoppelt, vervierfacht u. s. w., so rückt I immer näher an F, U an P, ϱ an r, und die Unterschiede $F - I$ oder A, $P - U$ oder a, $r - \varrho$ oder α nähern sich mehr und mehr der Null. Die vorstehende Gleichung zeigt also abermals zwei gleiche Differenzen, deren Minuenden bestimmte unveränderliche Größen sind, während die Subtrahenden veränderlich sind und der Null beliebig nahe gebracht werden können. Es müssen daher nach §. 50. die Minuenden gleich sein, d. h. $F = \frac{1}{2}Pr$.

§. 157.

Lehrsatz.

Bei jedem Kreise ist das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser, und auch das Verhältniß des Inhaltes zum Quadrate des Radius, constant, d. h. vom Radius, von der Peripherie und vom Inhalt unabhängig, also in allen Kreisen dasselbe, und diese beiden Verhältnisse sind auch immer einander gleich.

Bew. Der Lehrsatz folgt unmittelbar aus den Sätzen des vorigen §.



Bezeichnen F und f die Inhalte, P und p die Peripherien und r und ϱ die Radien zweier Kreise, so folgt aus dem Satze I. des vorigen §.:

$$P:p = 2r:2\varrho \text{ oder } P:2r = p:2\varrho.$$

Es ist also das Verhältniß $P:2r$ in jedem Kreise dasselbe, d. h. $\frac{P}{2r}$ ist eine constante Zahl.

Aus II. folgt:

$$F:f = r^2:\varrho^2 \quad \text{oder} \quad F:r^2 = f:\varrho^2.$$

Es ist also das Verhältniß $F:r^2$ in jedem Kreise dasselbe, d. h. $\frac{F}{r^2}$ ist eine constante Zahl.

Aus III. folgt: $F = \frac{1}{2}Pr$, daher, wenn man beide Seiten durch r^2 dividirt:

$$\frac{F}{r^2} = \frac{P}{2r},$$

d. h. die beiden constanten Verhältnisse $\frac{F}{r^2}$ und $\frac{P}{2r}$ sind einander gleich.

§. 158.

Erklärung und Folgerungen.

Das constante Verhältniß der Peripherie P jedes Kreises zu seinem Durchmesser und das constante Verhältniß des Inhaltes F jedes Kreises zum Quadrate seines Radius (von welchem wir eben bewiesen haben, daß es jenem Verhältniß gleich ist) bezeichnet man in der Mathematik allgemein durch den griechischen Buchstaben π, d. h. es ist

$$\frac{P}{2r} = \pi \quad \text{und} \quad \frac{F}{r^2} = \pi.$$

Hieraus ergeben sich, wenn man noch den Durchmesser des Kreises durch d bezeichnet, die zwei wichtigen Formeln:

I. Die Peripherie des Kreises $= 2r\pi = d\pi$.

II. Der Inhalt des Kreises $= r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi$.

§. 159.

Berechnung der Zahl π.

Zur Berechnung von π bieten sich folgende Wege dar:

1) Man giebt den Radius r eines Kreises und sucht die Peripherie P oder den Inhalt F zu berechnen. Kann man P oder F finden, so erhält man π durch die Division $P:2r$ oder $F:r^2$. Das Mittel aber, P oder

F zu finden, ist folgendes: Es liegt offenbar P zwischen dem Umfange des eingeschriebenen und dem Umfange des umschriebenen regulären n-Ecks. Man berechne also z. B. den Umfang des eingeschriebenen und des umschriebenen regulären Sechsecks, so ergiebt sich ersterer (§. 154. Nr. 2.) gleich 6r, letzterer $= 6 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{3} = 2r.3{,}46$. Hierdurch hat man Grenzen für P, und dividirt man durch 2r, so findet man die Grenzen für π: es liegt π zwischen 3 und 4,46. — Um nun diese Grenzen, zwischen welchen π liegt, näher an einander zu rücken, berechne man (durch Verdoppelung der Seitenzahl) den Umfang des regulären 12-Ecks, 24-Ecks, 48-Ecks, u. s. w. bis diese Umfänge auf eine bestimmte Anzahl Decimalstellen übereinstimmen; so weit würde dann π mit ihnen übereinstimmen müssen, also richtig sein. Es setzt diese Berechnung voraus, daß man aus der Seite des eingeschriebenen n-Ecks die des 2n-Ecks in Kreise und die des n-Ecks um den Kreis finden kann. Die Auflösung dieser Aufgabe folgt im 7ten Kapitel, wo also die Berechnung von π, wie hier angegeben, geschehen kann. Daß aber die Umfänge der regulären n-Ecke der Peripherie (und ihre Inhalte dem Kreise) für steigende Werthe von n immer näher kommen, erhellt wohl hinlänglich aus der Figur zu §. 154. Nr. 2. und aus §. 22. Nr. 4. und 5.

Ganz auf dieselbe Weise kann man π durch F berechnen. Nehmen wir z. B. das reguläre Sechseck, so ist der Inhalt des Sechsecks im Kreise $= 6 \cdot \frac{r^2}{4} \sqrt{3} = r^2.2{,}59$; und der Inhalt des Sechsecks um den Kreis (Fig. zu §. 154. Nr. 2.) $= 12.\Delta MAL = 12 \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{3} r \sqrt{3}$ $= 2r^2 \sqrt{3} = r^2.3{,}46$; folglich liegt der Inhalt des Kreises zwischen $r^2.2{,}59$ und $r^2.3{,}46$. Dividirt man durch r^2, so liegt π zwischen den Grenzen 2,59 und 3,46.

2) Man kann aber auch π dadurch berechnen, daß man die Peripherie P oder den Inhalt F des Kreises giebt und nun den zugehörigen Radius r zu berechnen sucht. Kann man r finden, so ist $\frac{P}{2r}$ oder $\frac{F}{r^2}$ gleich π. Diesen für die practische Ausrechnung bequemeren Weg wollen wir einschlagen, und zwar wollen wir P geben und r dazu suchen.

Als Vorbedingung dieser Berechnung fasse man Folgendes wohl auf: Denken wir uns ein reguläres n-Eck, dessen Umfang der Peripherie P eines Kreises mit dem Radius r gleich

ist, bezeichnet R seinen großen und ρ seinen kleinen Radius: so liegt r zwischen R und ρ, d. h. es ist

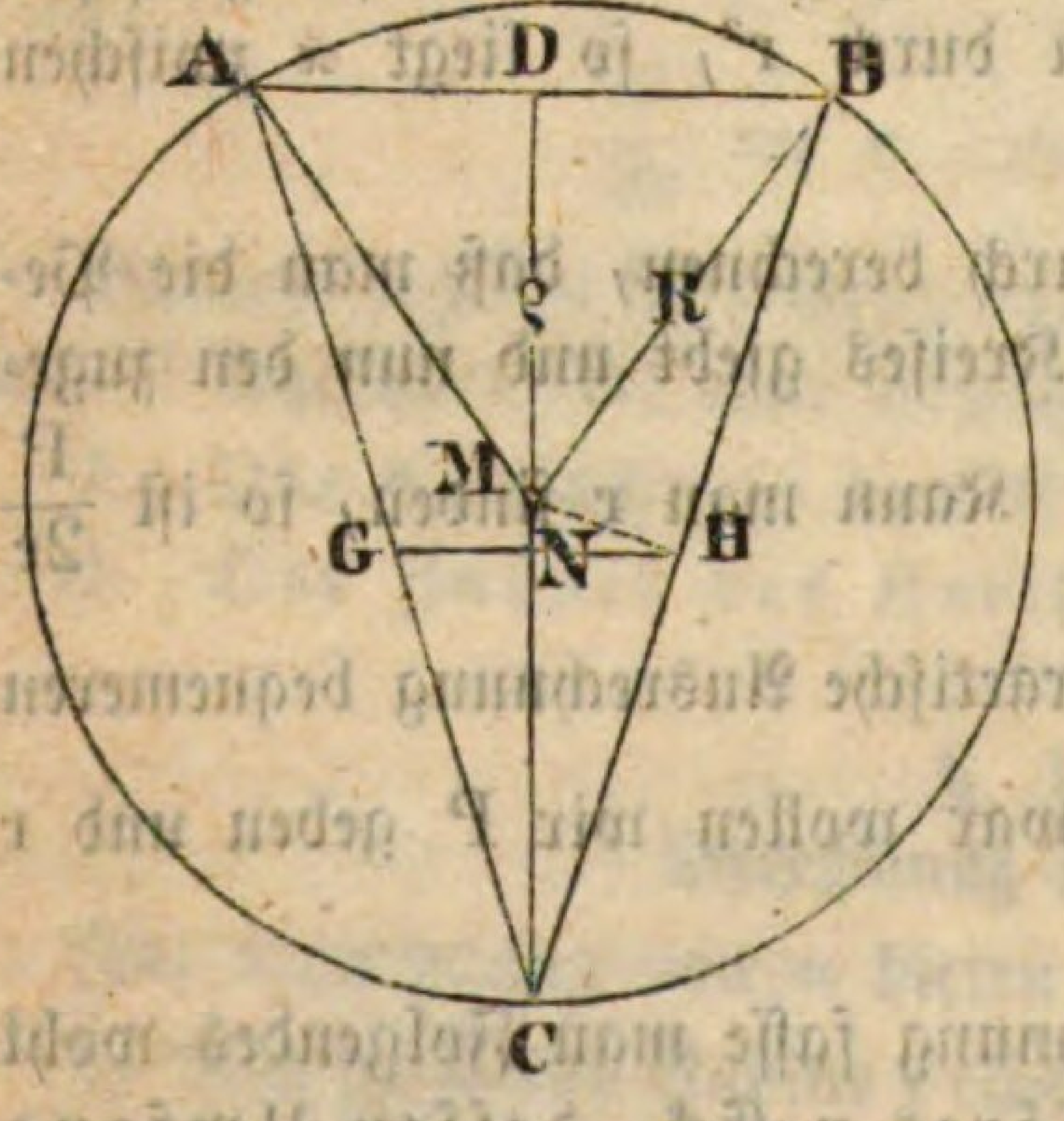
$$r < R \text{ und } r > \rho.$$

Der Grund ist der: es ist R Radius eines Kreises (nämlich des Kreises um das n-Eck), dessen Peripherie größer als P ist; folglich ist auch $R > r$; und dann ist noch ρ Radius eines Kreises (nämlich des Kreises im n-Eck), dessen Peripherie kleiner als P ist; folglich ist auch $\rho < r$. — Können wir also R und ρ berechnen, so haben wir zwei Grenzwerthe für r. Wie rücken wir diese Grenzwerthe einander immer näher? Dadurch, daß wir von dem regulären n-Eck mit dem Umfange P zu dem regulären 2n-Eck, 4n-Eck, 8n-Eck u. s. w. mit demselben Umfange P übergehen und für jedes derselben R und ρ berechnen. Je mehr Seiten das Polygon erhält, desto weniger sind R und ρ von einander verschieden; denn bei jedem folgenden Polygon wird R immer kleiner, aber ρ immer größer. Die Begründung liegt in dem nachfolgenden Lehrsatze, welcher zugleich ein einfaches Mittel giebt, R und ρ für jedes Polygon aus dem R und ρ des vorhergehenden zu berechnen.

Lehrsatz. Bezeichnet R den großen und ρ den kleinen Radius eines regulären Polygons, bezeichnet ferner R' den großen und ρ' den kleinen Radius des regulären Polygons von doppelter Seitenzahl, aber von demselben Umfange: so ist

$$\text{I.} \quad \rho' = \frac{R+\rho}{2}. \qquad \text{II.} \quad R' = \sqrt{R.\rho'}.$$

Bew. Es sei AB die Seite eines regulären n-Ecks, M sein Mittelpunkt, MB sein großer Radius R und MD sein kleiner Radius ϱ; man verlängere MD über M bis zum Durchschnittspunkt C mit der Peripherie des Kreises um das n-Eck, ziehe CA und CB, halbire CD in N und ziehe durch N die Linie GH $\neq$ AB: so ist GH die Seite eines regulären 2n-Ecks, welches mit dem n-Eck, dessen Seite AB ist, gleichen Umfang hat, C ist der Mittelpunkt dieses 2n-Ecks, CH sein großer Radius R' und CN sein kleiner Radius ϱ'. Denn es ist $\measuredangle$GCH $= \frac{1}{2}\measuredangle$AMB (Peripherie- und Centriwinkel), und da $\measuredangle$AMB der nte Theil von 360° ist, so ist $\measuredangle$GCH der 2nte Theil von 360°, und ΔCGH ist gleichschenklig, weil es dem ΔCAB ähnlich ist. Schlägt man also um C mit CG oder CH als Radius einen Kreis, so läßt sich GH in diesen Kreis als Sehne 2nmal eintragen, d. h.



GH ist die Seite des regulären 2n-Ecks in diesem Kreise, und CH ist der große, CN der kleine Radius dieses regulären 2n-Ecks. Ferner verhält sich GH : AB = CN : CD = 1 : 2, daher ist 2.GH = AB, also auch 2n.GH = n.AB, d. h. der Umfang des regulären 2n-Ecks, dessen Seite GH ist, ist dem Umfange des regulären n-Ecks, dessen Seite AB ist, gleich.

Um nun CH und CN durch R und ϱ auszudrücken, hat man

$$CN = \frac{CM + MD}{2} = \frac{R + \varrho}{2} \text{ oder } \varrho' = \frac{R + \varrho}{2}.$$

Zieht man nun noch MH, so ist MH $\perp$ CB, und weil im rechtwinkligen ΔCHM die HN $\perp$ CM ist, so folgt (§. 88. Nr. 1.).

$$CH^2 = CN.CM = \varrho'.R, \text{ also } CH = \sqrt{R.\varrho'} \text{ oder } R' = \sqrt{R.\varrho'}.$$

Weil nun $\varrho < R$ ist, so folgt aus $\varrho' = \frac{R + \varrho}{2}$, daß $\varrho' > \varrho$ sein muß. Zugleich folgt aber hieraus auch, daß $\varrho' < R$ ist; daher ergiebt sich aus $R' = \sqrt{R.\varrho'}$ noch, daß $R' < R$ ist. **Geht man also vom n-Eck zum 2n-Eck über, so wird ϱ größer, aber R kleiner.**

Wir können jetzt zur Berechnung von π schreiten. Da wir vom regulären Sechseck ausgehen wollen, so ist es bequem, den Umfang eines Kreises gleich 6 Einheiten anzunehmen; wir stellen also die Frage:

Wie groß ist der Radius r eines Kreises, dessen Umfang 6 Längeneinheiten hat?

Da die Rechnung den Radius in derselben Längeneinheit giebt, diese Einheit aber bei der Division P : 2r sich forthebt, so können wir sie unbeachtet lassen. Wir nehmen jetzt an, ein reguläres Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck, u. s. w. habe auch den Umfang 6, und berechnen den großen und den kleinen Radius jedes dieser Polygone. Zwischen diesen Radien liegt r.

Das reguläre Sechseck vom Umfange 6.

Hier ist R = 1 und $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86602540$.

Berechnung der Radien des regulären 12-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären Sechsecks.

Hier ist R = 1 und $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; folglich

$$\varrho' = \frac{R + \varrho}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = 0{,}93301270.$$

$$R' = \sqrt{1 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 0{,}96592582.$$

Berechnung der Radien des regulären 24-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 12-Ecks.

Hier ist R = 0,96592582 und $\varrho = 0{,}93301270$;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0,94946926$ und

$$R' = \sqrt{R \cdot \varrho'} = \sqrt{0,917116872} = 0,95766219.$$

Berechnung der Radien des regulären 48-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 24-Ecks.

Hier ist $R = 0,95766219$ und $\varrho = 0,94946926$;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0,95356573.$

$$R' = \sqrt{R \cdot \varrho'} = \sqrt{0,913193845} = 0,95561176.$$

Berechnung der Radien des regulären 96-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 48-Ecks.

Hier ist $R = 0,95561176$ und $\varrho = 0,95356573$;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0,95458875.$

$$R' = \sqrt{R \cdot \varrho'} = \sqrt{0,912216236} = 0,95510012.$$

Berechnung der Radien des regulären 192-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 96-Ecks.

Hier ist $R = 0,95510012$ und $\varrho = 0,95458875$;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0,95484444.$

$$R' = \sqrt{R \cdot \varrho'} = \sqrt{0,911972038} = 0,95497227.$$

Berechnung der Radien des regulären 384-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 192-Ecks.

Hier ist $R = 0,95497227$ und $\varrho = 0,95484444$;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0,95490836.$

$$R' = \sqrt{R \cdot \varrho'} = \sqrt{0,911911003} = 0,95494031.$$

Berechnung der Radien des regulären 768-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 384-Ecks.

Hier ist $R = 0,95494031$ und $\varrho = 0,95490836$;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0,95492434.$

$$R' = \sqrt{R \cdot \varrho'} = \sqrt{0,911895745} = 0,95493232.$$

Berechnung der Radien des regulären 1536-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 768-Ecks.

Hier ist $R = 0,95493232$ und $\varrho = 0,95492434$;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0,95492833.$

$$R' = \sqrt{R \cdot \varrho'} = \sqrt{0,911891925} = 0,95493032.$$

Berechnung der Radien des regulären 3072-Ecks vom Umfange 6 aus den Radien des regulären 1536-Ecks.

Hier ist R = 0,95493032 und ϱ = 0,95492833;

folglich $\varrho' = \frac{R+\varrho}{2} = 0{,}95492933.$

$R' = \sqrt{R \,.\, \varrho'} = \sqrt{0{,}911890970} = 0{,}95492982.$

Die bisher gefundenen Radien wollen wir zur bequemeren Uebersicht zusammenstellen.

Polygon.	Der kleine Radius.	Der große Radius.
6-Eck	0,86602540	1,00000000
12-Eck	0,93301270	0,96592582
24-Eck	0,94946926	0,95766219
48-Eck	0,95356573	0,95561176
96-Eck	0,95458875	0,95510012
192-Eck	0,95484444	0,95497227
384-Eck	0,95490836	0,95494031
768-Eck	0,95492434	0,95493232
1536-Eck	0,95492833	0,95493032
3072-Eck	0,95492933	0,95492982

Für diejenigen Leser, welche die Rechnung genauer verfolgen wollen, sei bemerkt, daß ohne Logarithmen gerechnet worden ist. Bei der Division $\frac{R+\varrho}{2}$ ist die letzte Ziffer im Zähler, wenn sie ungerade war, um 1 vermehrt worden. Die Multiplication R . ϱ' ist abgekürzt ausgeführt worden, mit Befolgung der für die letzte Ziffer jedes Partialproducts gegebenen Regel (Arithm. §. 102. III.), und die Wurzelausziehung ist mit Hülfe der Anmerkung zu §. 119. der Arithm. geschehen.

Aus den Radien für das reguläre 3072-Eck ergiebt sich nun, daß der Radius r des Kreises, dessen Peripherie = 6 ist, zwischen folgenden Werthen liegt:

$$r > 0{,}95492933 \quad \text{und} \quad r < 0{,}95492982.$$

Nun war $\pi = \frac{P}{2r}$, oder hier $\pi = \frac{3}{r}$; folglich liegt π zwischen den Grenzen:

$$\pi < \frac{3}{0{,}95492933} \quad \text{und} \quad \pi > \frac{3}{0{,}95492982}.$$

Rechnet man diese Werthe aus, so erhält man:

$$\pi < 3{,}1415937 \quad \text{und} \quad \pi > 3{,}1415921.$$

Hieraus ergiebt sich $\pi = 3{,}14159.....$ Genauer ist der Werth von π folgender

$$\pi = 3{,}\,14159\,26535\,89793\,.....$$

Aus den Grenzwerthen für r ergiebt sich leicht die Reciproke von π. Da $\pi = \frac{3}{r}$ ist, so folgt $\frac{1}{\pi} = \frac{r}{3}$; also liegt $\frac{1}{\pi}$ zwischen folgenden Grenzen:

$$\frac{1}{\pi} > 0{,}31830977... \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi} < 0{,}31830994...$$

Hieraus folgt $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309$ oder genauer $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$. Vollständiger ist

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}\,31830\,98861\,83790\,.....$$

Anmerk. Auf die in der Analysis angegebene bequemere Berechnung von π durch Reihen kommen wir im 7ten Kapitel zurück.

§. 160.

Näherungswerthe für π. Angabe practisch brauchbarer Zahlenwerthe, welche von π abhängen.

Verwandelt man 0,14159 in einen Kettenbruch, so findet man die ersten drei Näherungswerthe von π gleich $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ und $\frac{355}{113}$. Genau genommen sind diese Brüche nicht Näherungswerthe von π, sondern von 3,14159; d. h. von einer Zahl, die selbst nur annähernd gleich π ist. Wir können aber leicht prüfen, wie nahe diese Brüche der Zahl π kommen. Es ist

$$\frac{22}{7} = 3{,}1428... \quad ; \quad \frac{22}{7} - \pi < 0{,}0013.$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}141509... \quad ; \quad \pi - \frac{333}{106} < 0{,}000084.$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}141592920.. ; \quad \frac{355}{113} - \pi < 0{,}00000037.$$

Archimedes (287 — 212 vor Chr.) hat zuerst das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie zu bestimmen gesucht. Vom eingeschriebenen und umschriebenen regulären 6-Eck ausgehend und bis zum regulären 96-Eck fortschreitend fand er, daß dies Verhältniß zwischen 7 : 22 und 71 : 223 liegt. Aus diesem Grunde nennt man

das Verhältniß 7:22 häufig das Archimedische. — Das Verhältniß 113:355, leicht zu behalten, weil es jede der ersten drei ungeraden Zahlen doppelt enthält, die zu dreien abzutheilen sind (113 355), hat Peter Metius in der Mitte des 16ten Jahrhunderts gefunden. Dies Verhältniß ist so genau, daß $\frac{355}{113}$ in allen uns vorkommenden practischen Fällen unbedenklich statt π gesetzt werden kann. Auf eine größere Anzahl von Decimalstellen wurde π am Ende des 16ten Jahrhundert berechnet, von Vieta auf 10, von Ludolph van Ceulen (1586) auf 32 Decimalstellen. Nach Letzterem wird häufig π die Ludolphsche Zahl genannt. Hierdurch war π mit einer weit über jedes practische Bedürfniß hinausreichenden Genauigkeit gefunden. Wenn also in neuester Zeit π sogar auf 500 Decimalstellen berechnet worden ist, so mag diese Berechnung wohl einen Beleg dazu geben, wie viel die Analysis durch stark convergente Reihen zu leisten vermag; einen practischen Werth hat sie aber nicht.

Neben der Berechnung der Peripherie durch den Radius ist auch die annähernde Verwandlung der Peripherie in eine gerade Linie durch geometrische Construction von practischem Interesse. Folgende Construction ist für practische Fälle hinreichend genau: Um die Peripherie eines Kreises als eine gerade Linie darzustellen, addire man zu dem dreifachen Durchmesser den fünften Theil der Sehne des Quadranten. Um diese Construction zu prüfen, wissen wir, daß die Sehne des Quadranten (die Seite des Quadrats im Kreise) $= r\sqrt{2}$ ist; folglich sagt die vorstehende Regel: es ist

$$P = 6r + \frac{r}{5}\sqrt{2} = 2r\left(3 + \frac{1}{10}\sqrt{2}\right) = 2r\,.\,3{,}1414213.$$

Nun ist $\pi - 3{,}1414213 = 0{,}00017\,..$; folglich weicht die gerade Linie, welche man durch jene Construction erhält, noch nicht um $\frac{2}{10000}$ des Durchmessers von der Peripherie ab. — Construirt man über diese Linie ein Dreieck von der Höhe r, so hat man den Kreis annähernd in eine geradlinige Figur verwandelt. — Bemerkt sei noch, daß π eine irrationale Zahl ist; der Beweis liegt nicht in den Grenzen dieses Buches.

Die folgende Tafel enthält einige im practischen Rechnen vorkommende von π abhängige Zahlenwerthe.

π	3,1415927	$\frac{1}{\pi}$	0,3183099
2π	6,2831853	$\frac{2}{\pi}$	0,6366198
3π	9,4247780	$\frac{3}{\pi}$	0,9549297
4π	12,5663706	$\frac{4}{\pi}$	1,2732395
$\frac{4}{3}\pi$	4,1887902	$\frac{1}{6}\pi$	0,5235988
π^2	9,8696044	$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013212
π^3	31,0062767	$\frac{1}{\pi^3}$	0,0322515
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,5641896
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645919	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,6827840
$\log \pi$	0,4971499	$\log\left(\frac{1}{\pi}\right)$	0,5028501 — 1.

§. 161.

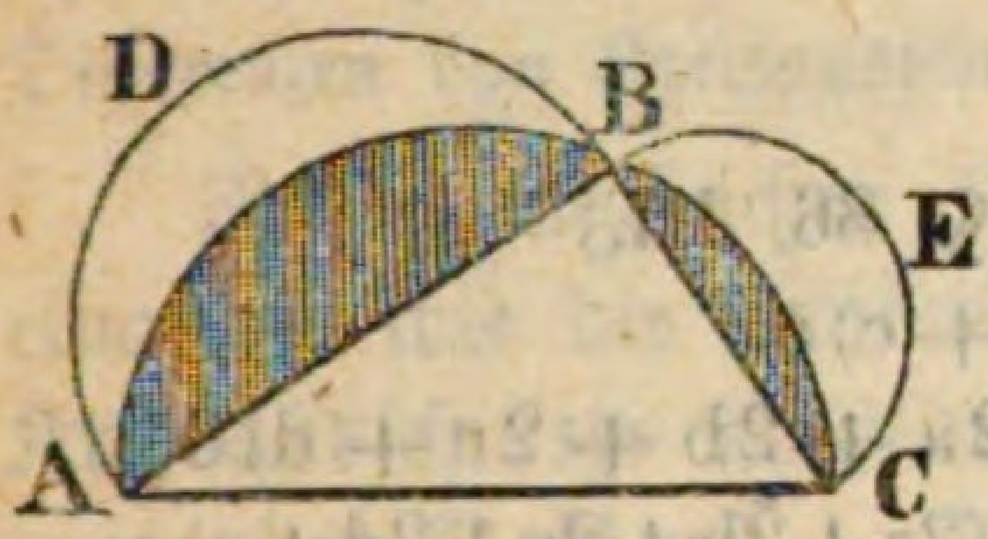
Zusatz.

Im vorigen §. wurde gezeigt, wie man einen Kreis annähernd in ein Dreieck verwandeln kann. Später werden wir zeigen, wie sich jede geradlinige Figur in ein Quadrat verwandeln läßt; daher werden wir auch jeden Kreis annähernd in ein Quadrat verwandeln können. Diese Verwandlung mit voller Genauigkeit auszuführen ist die Aufgabe der sogenannten **Quadratur des Kreises.** Während diese Aufgabe nicht auflösbar ist, lassen sich doch einzelne von Kreisbogen begrenzte Ebenen in geradlinige Figuren verwandeln, wie die nachfolgenden Beispiele zeigen.

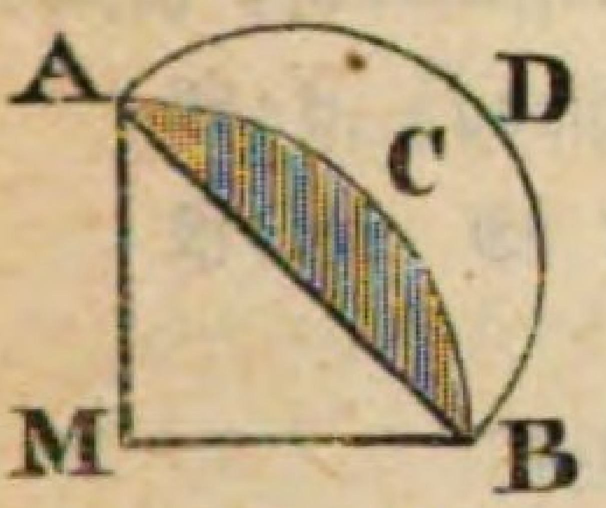
Vorausgeschickt sei, daß der Kreis, welcher die Hypotenuse a eines rechtwinkligen Dreiecks zum Durchmesser hat, gleich der Summe der Kreise ist, welche die Katheten b und c zu Durchmessern haben, weil aus $a^2 = b^2 + c^2$ folgt: $\frac{1}{4}a^2\pi = \frac{1}{4}b^2\pi + \frac{1}{4}c^2\pi$. **Der Pythagoreische Lehrsatz findet also auch auf Kreise und Halbkreise** (überhaupt auf gleichvielte Theile von Kreisen) **Anwendung,**

so daß man durch diesen Satz leicht die Summe und die Differenz zweier Kreise in einen Kreis verwandeln kann.

Beisp. 1. Construirt man über die Katheten des rechtwinkligen ΔABC die Halbkreise ADB und BEC, und dann auch über die Hypotenuse den Halbkreis ABC, der durch B geht: so ist der Halbkreis über AC gleich der Summe der Halbkreise über AB und BC. Zieht man von diesen beiden gleichen Räumen die beiden Segmente ab, welche die Katheten von dem Halbkreis über AC abschneiden, so ist die Summe der beiden mondförmigen Figuren ADB und BEC (die Lunulae des Hippokrates) dem ΔABC gleich.



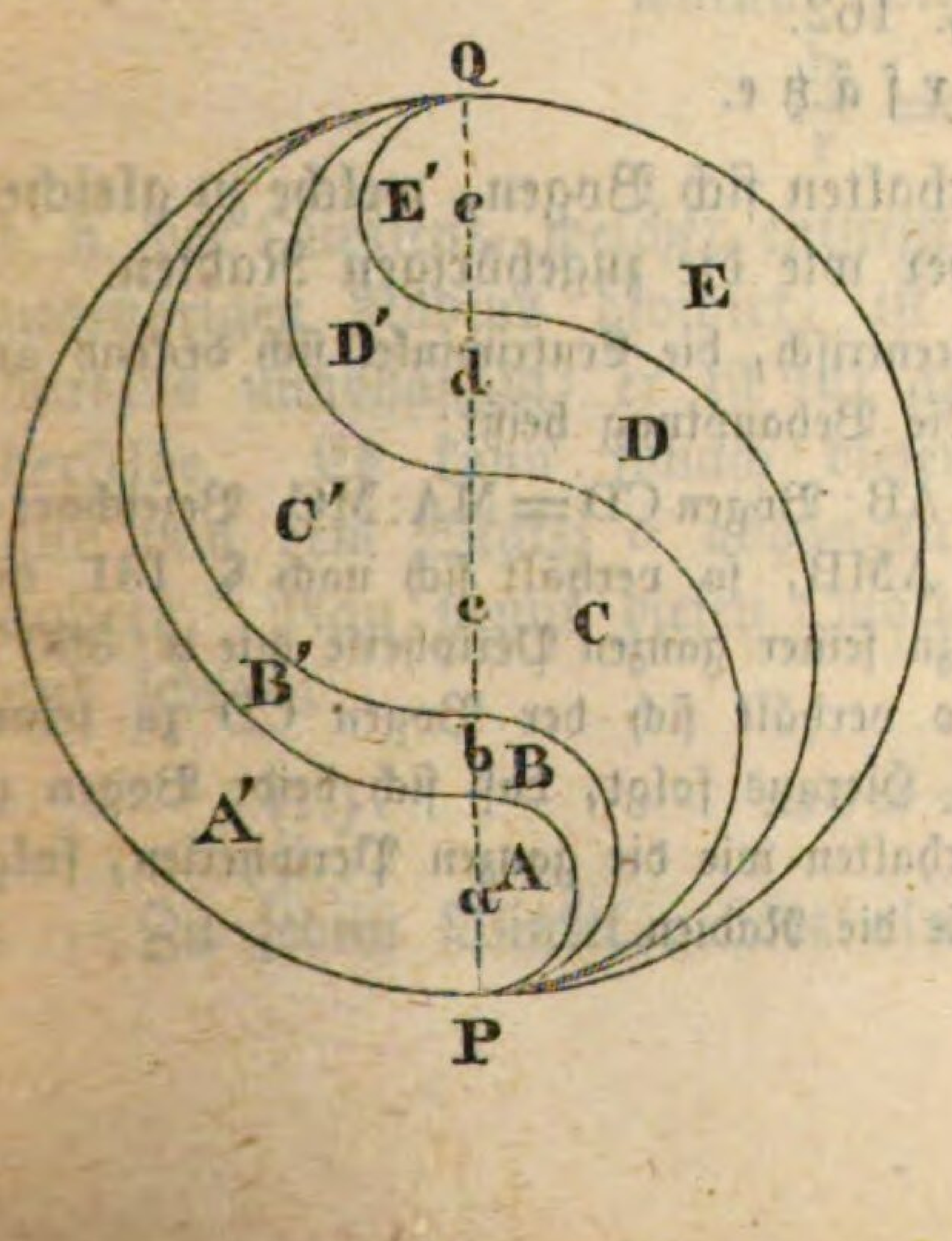
Beisp. 2. Es sei MACB ein Quadrant und über seine Sehne AB der Halbkreis ADB construirt. Der Halbkreis ist dem Quadranten gleich; denn bezeichnen wir MA mit r, so ist $AB = r\sqrt{2}$; folglich ist der Quadrant $= \frac{1}{4} r^2 \pi$, und der Halbkreis $= \frac{1}{8}(r\sqrt{2})^2 \pi = \frac{1}{4} r^2 \pi$. Zieht man von beiden Figuren das Segment ABC ab, so folgt, daß die mondförmige Figur ACBD dem ΔMAB gleich ist. (Wie folgt der Beweis aus Beisp. 1.?)



Die Construction eines Kreises, dessen Peripherie der Summe oder Differenz der Peripherien zweier gegebenen Kreise gleich sein soll, reducirt sich auf die Addition oder Subtraction zweier Linien; denn sind R, r und ϱ die Radien, so folgt aus $R = r \pm \varrho$, daß auch $2R\pi = 2r\pi \pm 2\varrho\pi$ ist, d. h. die Pheripherie zum Radius $r \pm \varrho$ ist gleich der Summe oder Differenz der Peripherien zu den Radien r und ϱ.

Während durch Construction die Theilung eines Kreises in gleiche Theile, oder nach gegebenem Verhältniß, durch gerade Linien allgemein nicht ausführbar ist, kann man eine solche Theilung durch Kreislinien allgemein ausführen. Das siebente Kapitel enthält hierüber das Nähere; zur Uebung mag hier ein besonderer Fall folgen.

Lehrs. Theilt man den Durchmesser PQ eines Kreises in beliebig viele und beliebig große Theile, z. B. in 5 Theile von der Größe a, b, c, d und e, und beschreibt nun auf der einen Seite von PQ Halbkreise über a, a+b, a+b+c und a+b+c+d, auf der andern Seite aber über e, e+d, e+d+c und e+d+c+b und denkt sich nun den Durchmesser PQ fort: so ist der Kreis in fünf Theile getheilt, deren Inhalte sich zu einander verhalten wie a : b : c : d : e, während ihre Umfänge nicht nur einander gleich, sondern auch alle der Peripherie des ganzen Kreises gleich sind.



Bew. Jeder Theil wird durch PQ in zwei Theile zerlegt. Die Theile rechts von PQ mögen durch A, B, C, D und E, die links von PQ durch A', B', C', D' und E' bezeichnet werden. Wir wollen nun diese Theile berechnen, aber überall den Factor $\frac{\pi}{8}$ fortlassen $\left(\text{Inhalt des Halbkreises} = \frac{\pi}{8} \times (2r)^2\right)$.

$A = a^2 = a \,.\, a$
$B = (a+b)^2 - a^2 = (2a+b)b$ (Arithm. §. 86. III.)
$C = (a+b+c)^2 - (a+b)^2 = (2a+2b+c)c$
$D = (a+b+c+d)^2 - (a+b+c)^2 = (2a+2b+2c+d)d$
$E = (a+b+c+d+e)^2 - (a+b+c+d)^2 = (2a+2b+2c+2d+e)e$
$A' = (a+b+c+d+e)^2 - (b+c+d+e)^2 = (a+2b+2c+2d+2e)a$
$B' = (b+c+d+e)^2 - (c+d+e)^2 = (b+2c+2d+2e)b$
$C' = (c+d+e)^2 - (d+e)^2 = (c+2d+2e)c$
$D' = (d+e)^2 - e^2 = (d+2e)d$
$E' = e^2 = e \,.\, e.$

Durch Addition entsteht nun:

$A + A' = 2 \,.\, PQ \,.\, a$
$B + B' = 2 \,.\, PQ \,.\, b$
$C + C' = 2 \,.\, PQ \,.\, c$
$D + D' = 2 \,.\, PQ \,.\, d$
$E + E' = 2 \,.\, PQ \,.\, e$; woraus folgt:
$A + A' : B + B' : C + C' : D + D' : E + E' = a : b : c : d : e.$

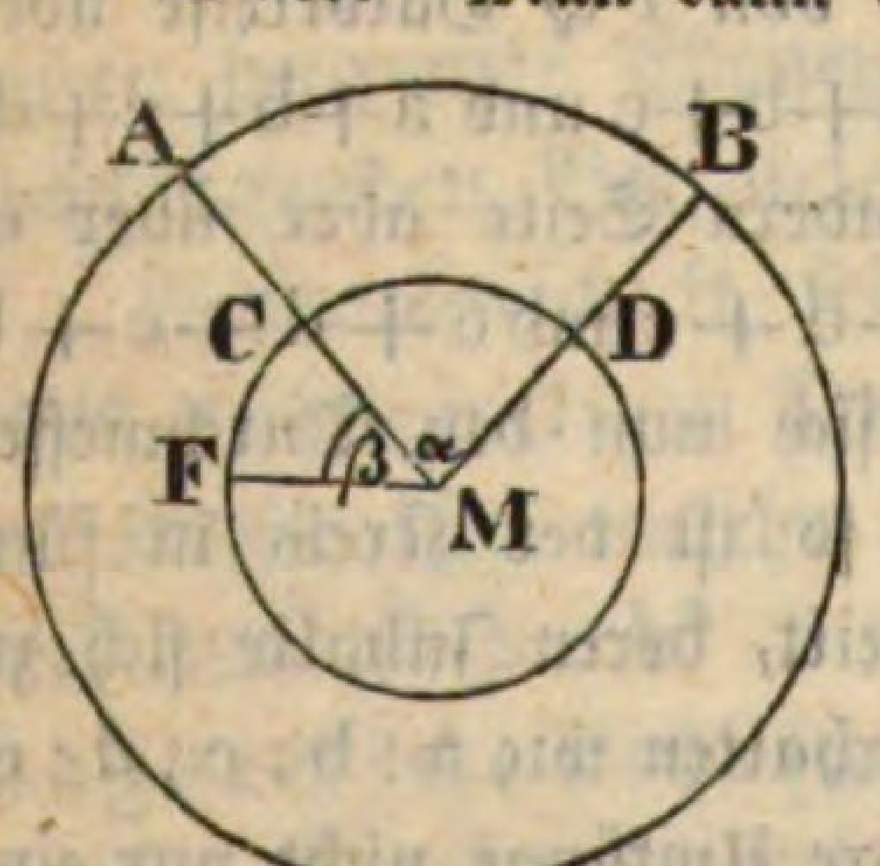
Der Theil des Satzes, welcher sich auf den Umfang jedes Theils bezieht, ist sehr leicht zu beweisen. Nehmen wir z. B. den Umfang von $B + B'$. Er besteht aus 4 halben Peripherien, nämlich über a, über $b + c + d + e$, über $a + b$ und über $c + d + e$. Die beiden ersten halben Peripherien zusammen und dann auch die beiden andern zusammen sind der halben Peripherie über PQ gleich. (Vergl. das oben hinter Beisp. 2. Gesagte.)

§. 162.

Lehrsätze.

1) In ungleichen Kreisen verhalten sich Bogen, welche zu gleichen Centriwinkeln gehören, zu einander wie die zugehörigen Radien.

Bew. Man kann die Kreise concentrisch, die Centriwinkel sich deckend annehmen. Die Behauptung heißt:



Bogen AB : Bogen CD = MA : MC. Bezeichnet α den Winkel AMB, so verhält sich nach §. 131. der Bogen AB zu seiner ganzen Peripherie wie $\alpha : 360°$, und eben so verhält sich der Bogen CD zu seiner Peripherie. Hieraus folgt, daß sich beide Bogen zu einander verhalten wie die ganzen Peripherien, folglich auch wie die Radien.

2) In ungleichen Kreisen verhalten sich Kreisausschnitte und Kreisabschnitte, welche zu gleichen Centriwinkeln gehören, zu einander wie die Quadrate der Radien.

Bew. wie zu Nr. 1. mit Hülfe des Satzes, daß sich Kreise wie die Quadrate ihrer Radien verhalten. Die Kreisabschnitte betrachtet man hierbei als Differenzen von Kreisausschnitten und Dreiecken (die ähnlich sind).

3) In ungleichen Kreisen verhalten sich zwei beliebige Bogen zu einander wie die Producte der zugehörigen Centriwinkel und Radien; Kreisausschnitte aber wie die Producte der Centriwinkel und Quadrate der Radien. — Der Satz setzt voraus, daß man so wohl für die Radien, als auch für die Centriwinkel die abstracten Zahlen setzt, welche, nachdem diese Größen auf gleiche Benennung gebracht sind, durch Fortlassen der Benennung entstehen.

Beh. (vorige Figur.). Bogen AB : Bogen $FC = MA.\alpha : MC.\beta$.

Bew. Es verhält sich Bogen AB : Bogen $CD = MA : MC$

Bogen CD : Bogen $FC = \alpha : \beta$,

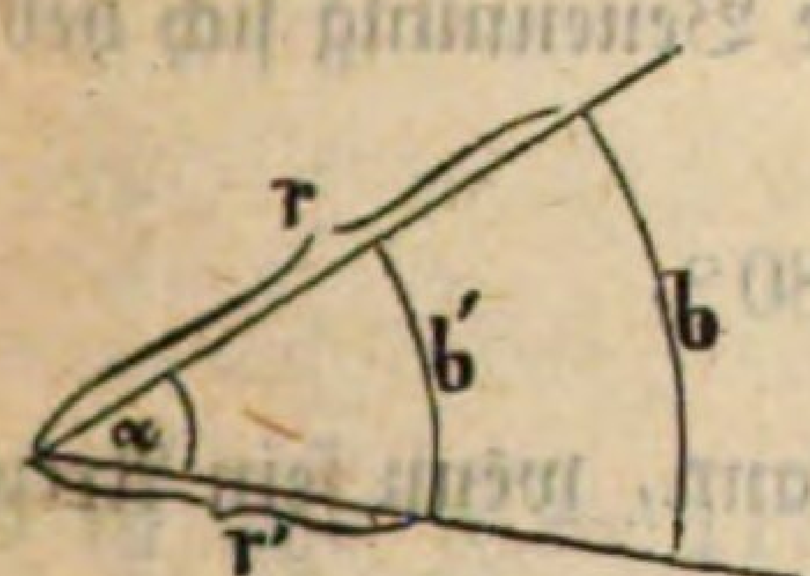
folglich: Bogen AB : Bogen $FC = MA.\alpha : MC.\beta$.

Eben so ist der Beweis für die Kreisausschnitte.

§. 163.

Erklärung des Arcus.

Schneidet man die Schenkel eines Winkels α durch zwei concentrische Bogen, welche den Scheitel von α zum Mittelpunkt haben, und bezeichnet man die Bogen zwischen den Schenkel des Winkels durch b und b', die Radien durch r und r', so verhält sich:



$$b : b' = r : r',$$

woraus folgt:

$$\frac{b}{r} = \frac{b'}{r'}$$

d. h. der Quotient, welcher entsteht, wenn man den Bogen durch den zugehörigen Radius dividirt, ist von der Länge des Bogens und Radius unabhängig; er ist für alle Bogen und zugehörigen Radien derselbe. Es kann sonach dieser Quotient (eine abstracte Zahl) nur von dem Winkel α abhängen und sich nur mit diesem Winkel ändern. Man nennt diesen Quotienten den Arcus des Winkels α und schreibt

$$(1.) \qquad \operatorname{arc} \alpha = \frac{b}{r}.$$

Zu jedem Winkel gehört ein Arcus und zu jedem Arcus nur

ein Winkel; folglich ist ein Winkel eben so durch seinen Arcus bestimmt, wie durch Grade, Minuten und Secunden.

Zunächst merke man:

(2.) $$\text{arc}\,\alpha + \text{arc}\,\beta = \text{arc}\,(\alpha + \beta),$$

denn es ist $\dfrac{AB}{MA} + \dfrac{BC}{MA} = \dfrac{AC}{MA}$. Eben so ist:



(3.) $$\text{arc}\,\alpha - \text{arc}\,\beta = \text{arc}\,(\alpha - \beta).$$

(4.) $$n.\text{arc}\,\alpha = \text{arc}\,(n\alpha).$$

(5.) $$\frac{\text{arc}\,\alpha}{n} = \text{arc}\,\frac{\alpha}{n}.$$

Da sich in demselben Kreise zwei Bogen wie die Centriwinkel verhalten, so findet man noch, wenn man beide Bogen durch den Radius dividirt:

(6.) $$\text{arc}\,\alpha : \text{arc}\,\beta = \alpha : \beta.$$

Mittelst dieser Proportion lassen sich die Arcus leicht berechnen. Zu 180° gehört der Bogen $r\pi$, folglich ist, wenn man durch r dividirt:

$$\text{arc}\,180^\circ = \pi.$$

Um nun arc α zu finden, hat man

$$\text{arc}\,\alpha : \pi = \alpha : 180^\circ; \text{ folglich ist}$$

(7.) $$\text{arc}\,\alpha = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi,$$

wobei α auf Grade gebracht sein muß, damit die Benennung sich hebt. Auch hat man aus (7):

(8.) $$\alpha = \frac{\text{arc}\,\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ,$$

so daß auch der Winkel leicht berechnet werden kann, wenn sein Arcus gegeben ist.

Ist $\alpha = \dfrac{n}{m}\,180^\circ$, so folgt aus (7.):

(9.) $$\text{arc}\left(\frac{n}{m} \cdot 180^\circ\right) = \frac{n}{m} \cdot \pi.$$

z. B. $\text{arc}\,40^\circ\ 20' = \dfrac{40\frac{1}{3}}{180}\pi = \dfrac{121}{540}\pi = 0{,}703949\ldots$

Es sei arc $\alpha = 0{,}585$; wie groß ist α?

$$\alpha = \frac{0{,}585}{\pi} \cdot 180^\circ = 0{,}186211 . 180^\circ = 33^\circ\ 31'\ 5''.$$

Für die Praxis merke man besonders:

$$\text{arc}\,360^\circ = 2\pi; \quad \text{arc}\,270^\circ = \frac{3}{2}\pi; \quad \text{arc}\,180^\circ = \pi;$$

$$\text{arc}\,120^\circ = \frac{2}{3}\pi;\quad \text{arc}\,90^\circ = \frac{\pi}{2};\quad \text{arc}\,60^\circ = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{arc}\,45^\circ = \frac{\pi}{4};\quad \text{arc}\,30^\circ = \frac{\pi}{6};\quad \text{arc}\,0^\circ = 0.$$

Die Logarithmentafeln enthalten auch die Arcus aller Winkel. Das practische Aufschlagen mögen zwei Beispiele erläutern.

Beisp. 1. Gesucht arc 175° 43′ 24″.

Aufl.

$$\begin{aligned} \text{arc}\,170^\circ &= 2{,}96705973 \\ \text{arc}\,5^\circ &= 0{,}08726646 \\ \text{arc}\,43' &= 0{,}01250819 \\ \text{arc}\,24'' &= 0{,}00011636 \\ \hline \text{arc}\,175^\circ\,43'\,24'' &= 3{,}06695074. \end{aligned}$$

Enthalten die Tafeln arc 175° unmittelbar, so fällt die Zerlegung arc 175° = arc 170° + arc 5° fort.

Beisp. 2. Es sei arc α = 2,0574; gesucht α.

Aufl.

$$\begin{aligned} \text{arc}\,\alpha &= 2{,}05740000 \\ & \ 1{,}91986218 = \text{arc}\,110^\circ \\ \hline & \ 0{,}13753782 \\ & \ 0{,}12217305 = \text{arc}\,7^\circ \\ \hline & \ 0{,}01536477 \\ & \ 0{,}01512619 = \text{arc}\,52' \\ \hline & \ 0{,}00023858 \\ & \ 0{,}00023756 = \text{arc}\,49'' \\ \hline & \ 0{,}00000102 \end{aligned}$$

Es ist also α = 117° 52′ 49″.

Um den Arcus eines Winkels zu finden, kann man Bogen und Radius durch irgend eine Längeneinheit messen und dann diese benannten Zahlen durch einander dividiren. Wählt man nun den Radius selbst als Längeneinheit, so ist dieselbe Zahl, welche die Länge des Bogens angiebt, zugleich der gesuchte Arcus, weil diese Zahl, durch 1 dividirt, unverändert bleibt. Dies erklärt es, wenn statt Arcus auch gesagt wird: der Bogen für den Radius 1. Zuweilen kommt auch der Ausdruck »einen Winkel im Längenmaß bestimmen« statt »einen Winkel durch seinen Arcus bestimmen« vor.

Anmerk. Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß ein Arcus kein Logarithmus ist. Soll also ein Ausdruck, welcher einen Arcus, etwa als Factor, enthält, mit Logarithmen berechnet werden, so ist zunächst der Arcus und dann von diesem Arcus der Logarithmus aufzuschlagen.

§. 164.

Berechnung der Bogen, Kreisausschnitte und Kreisabschnitte.

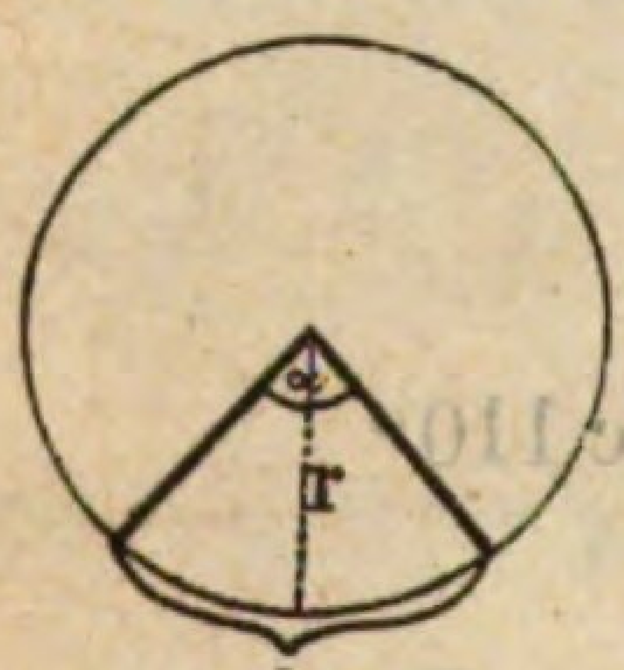
1) In einem Kreise zum Radius r gehöre der Bogen b zum Centriwinkel α. Da zwei Bogen desselben Kreises ihren Centriwinkeln proportional sind, und zum Centriwinkel 360° als Bogen die ganze Peripherie gehört, so hat man

$$\alpha^\circ : 360^\circ = b : 2r\pi; \text{ folglich } b = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2r\pi.$$

Man kann aber auch den Bogen mittelst des Arcus berechnen. Aus $\frac{b}{r} = \text{arc}\,\alpha$ folgt $b = r.\text{arc}\,\alpha$. Es ist also:

I. Der Bogen $= \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2r\pi = r.\text{arc}\,\alpha$.

2) Bezeichnet A den zu α gehörigen Kreisausschnitt, so folgt ganz wie in Nr. 1.



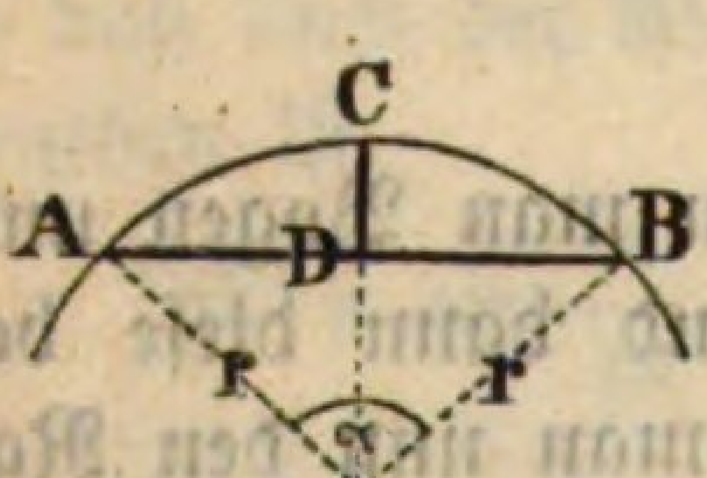
$$\alpha^\circ : 360^\circ = A : r^2\pi; \text{ folglich } A = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot r^2\pi.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $b = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2r\pi$,

so folgt: $\frac{A}{b} = \frac{r}{2}$ oder $A = \frac{1}{2}br$; d. h. der Kreisausschnitt ist einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie der Bogen und dessen Höhe der Radius ist. (Vergl. §. 156. III.). Man hat also die Formeln:

II. Kreisausschnitt $= \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot r^2\pi = \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}r^2.\text{arc}\,\alpha$.

3) Um den Inhalt eines Kreisabschnitts ABC zu berechnen, muß man vom Kreisausschnitt AMBC das Dreieck MAB abziehen. Die Berechnung dieses Dreiecks ist allgemein, d. h. für jeden Werth von α, jetzt noch nicht möglich; sie folgt im achten Kapitel. Die Sehne AB zerlegt den Kreis in zwei Abschnitte; soll der andere Kreisabschnitt berechnet werden, so muß man zu dem Kreisausschnitt, welcher dem convexen Winkel AMB zugehört, das ΔMAB addiren.



Anmerk. Ist der Winkel α nicht groß, namentlich unter 30°, so kann man das Segment ABC nach einer Näherungsformel berechnen. Fällt man MD ⊥ AB, und verlängert MD über D bis zum Durchschnittspunkt C mit der Peripherie, so nennt man DC die Höhe des Kreisabschnitts (auch Pfeil, Pfeilhöhe, Bogenhöhe). Die Näherungsformel sagt nun: Um den Inhalt F des Segments zu finden, multiplicire man die Sehne mit der Höhe des Segments und nehme $\frac{2}{3}$ vom Product; also $F = \frac{2}{3} AB \times DC$. Der Grund der Annä-

herung dieser Formel liegt darin, daß der Kreisbogen für kleine Mittelpunktswinkel wenig von der Parabel (einem Kegelschnitte) abweicht, und für die Parabel ist jene Formel genau. Durch die Simpson'sche Regel erhält man dieselbe Formel. Um den Grad der Annäherung festzustellen, sei bemerkt, daß bei einem Centriwinkel von 60° das Resultat nach der Näherungsformel von dem wahren noch nicht um $\frac{13}{10000}$ vom Quadrate des Radius abweicht. Bei 30° aber beträgt die Abweichung noch nicht $\frac{5}{100000}$ vom Quadrate des Radius.

§. 165.

Beispiele über Kreisrechnung.

1) Der Durchmesser eines Kreises sei = 1'; wie groß ist die Peripherie und der Inhalt?

Aufl. Peripherie $= \pi' = 3{,}14159'$; Inh. $= \frac{\pi}{4} \square' = 0{,}785398 \square'$.

2) Der Radius eines Kreises sei = 1'; wie groß Peripherie und Inhalt?
Aufl. Periph. $= 2\pi' = 6{,}283'$. Inh. $= \pi\square' = 3{,}14159\ \square'$.

3) Die Seite eines Quadrats sei 6'; wie groß sind Peripherie und Inhalt des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises?

Aufl. Periph. des eingeschriebenen Kreises = 18,8496'.
Inh. » » » = 28,2743 □'
Periph. » umschriebenen » = 26,6573'
Inh. » » » = 56,5487' □'

4) Zwei Kreis-Peripherien verhalten sich wie 4 : 5; wie verhalten sich die Inhalte der Kreise? Antw. Wie 16 : 25.

5) Eine Uhr hat einen Secundenzeiger von $\frac{2}{3}$ Zoll ddc.-M. Länge; welchen Weg durchläuft die Spitze des Zeigers in 24 Stunden?
Antw. 502,65 Fuß.

6) In und um ein gleichseitiges Dreieck ist ein Kreis gelegt; wie verhalten sich ihre Peripherien zu einander, und wie die Kreise selbst?
Antw. Resp. wie 1 : 2 und 1 : 4.

7) Legt man in einen Rhombus einen Kreis, so verhält sich der Umfang des Kreises zum Umfange des Rhombus, wie der Inhalt des Kreises zum Inhalt des Rhombus.

Bew. Bezeichnet c die Seite und a und b die halben Diagonalen des Rhombus, r aber den Radius des eingeschriebenen Kreises, so ist $r = \frac{ab}{c}$, und es verhalten sich die Umfänge wie $2r\pi : 4c$ oder $r\pi : 2c$, und die Inhalte wie $r^2\pi : 2cr$ oder $r\pi : 2c$. Statt $r\pi : 2c$ kann auch $\frac{ab}{c}\pi : 2c$ oder $ab\pi : 2(a^2 + b^2)$ gesetzt werden.

8) In einem Kreise zum Radius 7,5′ ist ein Bogen = 11,84′; wie groß ist der zugehörige Kreisausschnitt?

Antw. 44,4 □′.

9) Wie groß ist in Nr. 8. der zum Bogen 11,84′ gehörige Centriwinkel?

Aufl. $\text{arc}\,\alpha = 1{,}57866667$; $\alpha = 90°\ 27'\ 3''$.

10) Wie groß ist der Centriwinkel, dessen Bogen dem Radius gleich ist?
Antw. 57° 17′ 44,8″.

11) Wie groß ist das Segment des Sextanten, wenn r der Radius ist?

Antw. $\frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

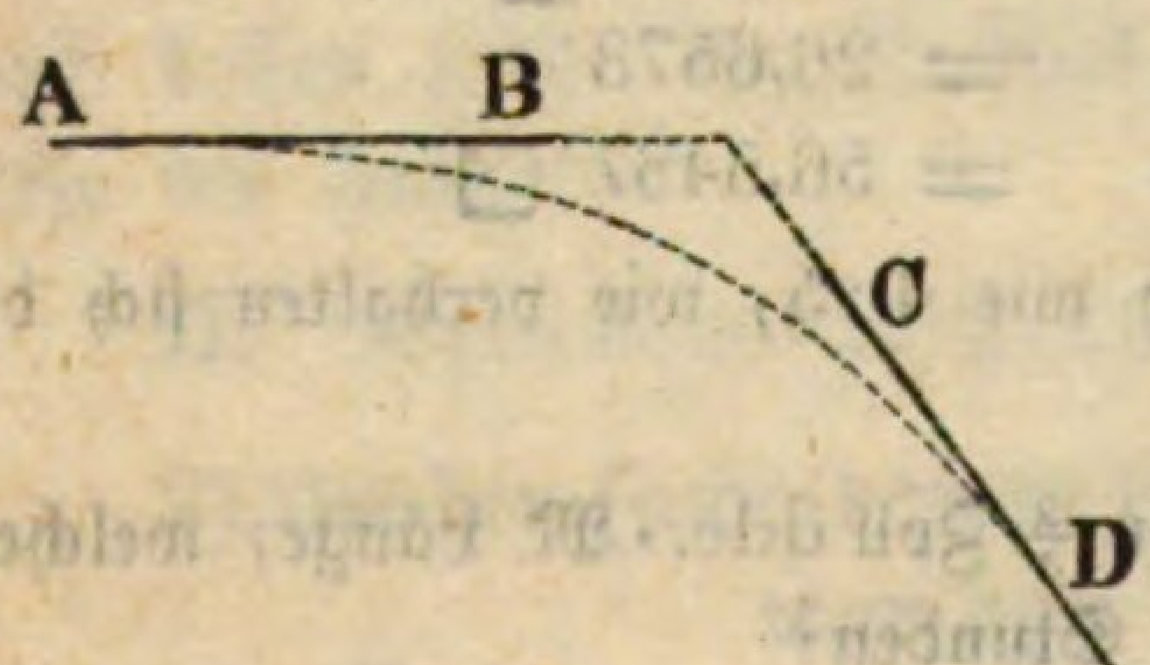
12) Wie groß ist der Inhalt der Ebene, welche von dem Bogen dieses Sextanten und von den Tangenten, welche durch die Endpunkte dieses Bogens gehen, begrenzt wird?

Aufl. Der Inhalt ist gleich $\frac{r^2}{6}(2\sqrt{3} - \pi)$. In der Figur zu §. 154. Nr. 2. hat man den Kreisausschnitt MAB von dem Viereck MALB abzuziehen. Der Inhalt dieses Vierecks ist = MA × AL.

13) In einem Kreise zum Radius 20,5′ sei ein Centriwinkel = 43° 40′ 20″; wie groß ist der Bogen und der Kreisausschnitt?

Antw. Der Bogen = 15,62559′; der Kreisausschnitt = 160,16233 □′.

14) Eine Eisenbahn soll in einem Kreisbogen, dessen Radius 800° ist, aus der Richtung AB in die Richtung CD übergeführt werden, so daß also diese Richtungen den Bogen berühren; wie lang ist dieser Bogen, wenn die Richtungen gehörig verlängert sich unter einem Winkel von 130° schneiden?

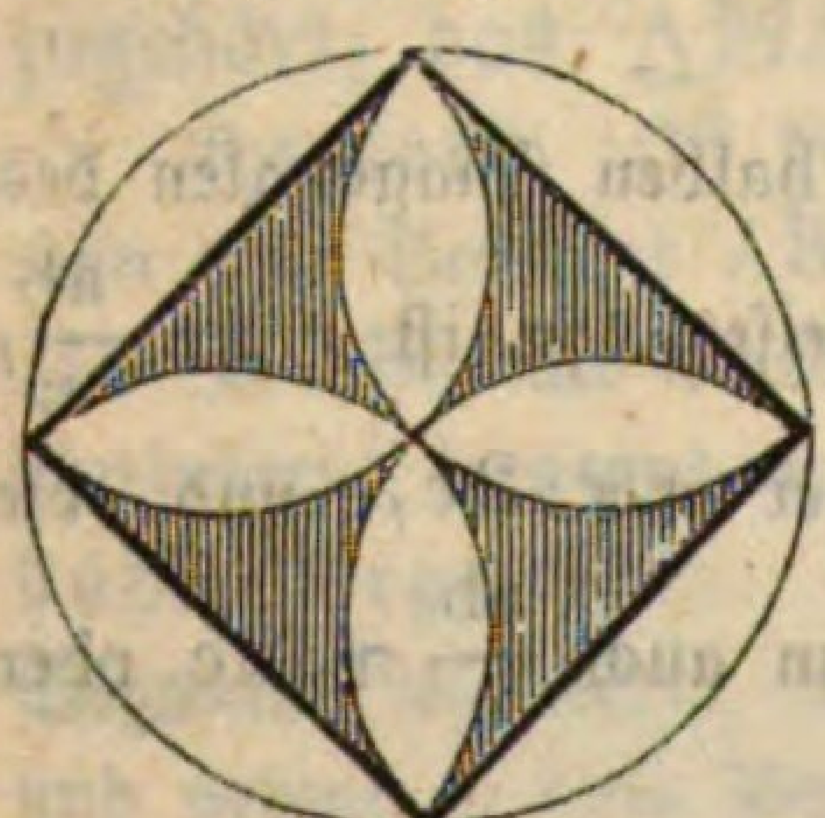


Antw. 698,1317°.

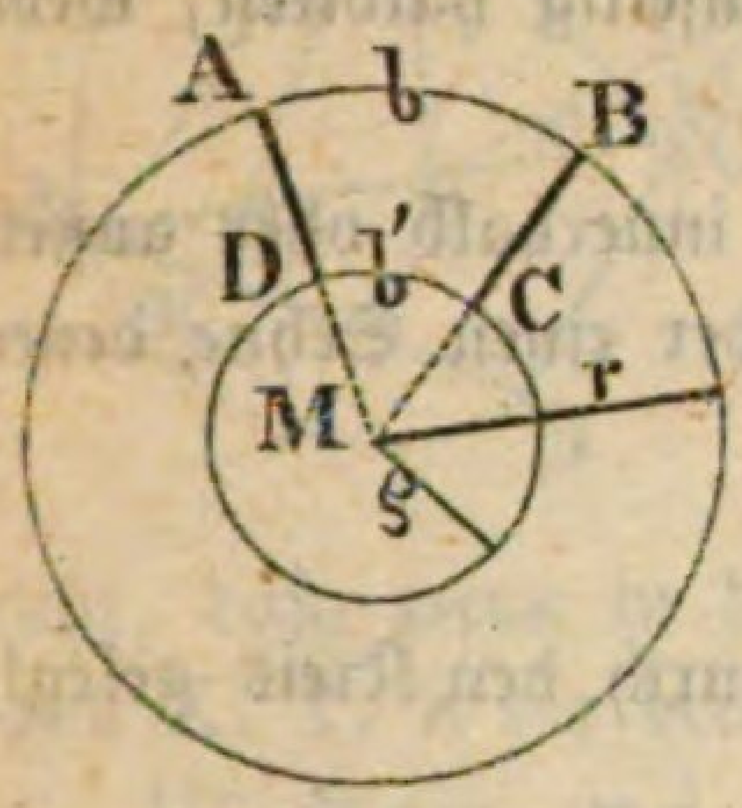
15) Construirt man um ein Quadrat einen Kreis und dann über jede Seite des Quadrats außerhalb desselben einen Halbkreis, so entstehen 4 mondförmige Figuren; wie groß ist deren Summe?

Antw. Sie ist dem Quadrate gleich.

16) Construirt man um ein Quadrat einen Kreis und dann über jede Seite des Quadrats innerhalb desselben einen Halbkreis, so entsteht im Quadrat eine aus 4 Blättern bestehende Figur, deren Inhalt der Summe der 4 Segmente gleich ist, welche die Seiten des Quadrats von dem umschriebenen Kreise abschneiden. Diese 4 Segmente geben also zu den Theilen des Quadrats addirt, welche zwischen den Blättern liegen, wieder den Inhalt des Quadrats.



§. 166.



Die von zwei concentrischen Kreisen mit den Radien r und ϱ gebildete **Ringfläche** hat die **Breite** $r-\varrho$ und den **Inhalt** $r^2\pi-\varrho^2\pi=(r^2-\varrho^2)\pi$.

Setzt man

$$(r^2-\varrho^2)\pi=(r+\varrho)(r-\varrho)\pi=\frac{2r\pi+2\varrho\pi}{2}(r-\varrho),$$

so erkennt man, daß die Ringfläche wie ein Paralleltrapez berechnet werden kann; man betrachtet die Peripherien als die parallelen Seiten und die Breite des Ringes als die Höhe.

Eben so kann man das **Ringstück** ABCD, welches durch die Radien MA und MB aus der Ringfläche herausgeschnitten ist, wie ein Paralleltrapez berechnen; man betrachtet die Bogen $AB=b$ und $DC=b'$ als die parallelen Seiten und die Breite $r-\varrho$ der Ringfläche als die Höhe. Denn es ist, wenn F den Inhalt des Ringstückes bezeichnet, nach §. 164. II.

$$(1.)\qquad F=\tfrac{1}{2}br-\tfrac{1}{2}b'\varrho.$$

Ferner hat man nach §. 162., Nr. 1. $b:b'=r:\varrho$ oder $b\varrho=b'r$; daher folgt aus (1.)

$$F=\tfrac{1}{2}br-\tfrac{1}{2}b\varrho+\tfrac{1}{2}b'r-\tfrac{1}{2}b'\varrho$$

$$F=\tfrac{1}{2}b(r-\varrho)+\tfrac{1}{2}b'(r-\varrho);\quad \text{folglich}$$

$$(2.)\qquad F=\frac{b+b'}{2}(r-\varrho).$$

Schneiden sich zwei Kreise, so erfordert die Berechnung des gemeinschaftlichen Theiles beider die Inhaltsbestimmung von Segmenten, ist also jetzt nur in einzelnen Fällen ausführbar.

Beisp. Zwei Kreise haben gleiche Radien (r), und der Mittelpunkt eines jeden liegt in der Peripherie des andern; wie groß ist der gemeinschaftliche Theil beider Kreise?

Aufl. Die gemeinschaftliche Sehne ist in jedem Kreise die Seite des eingeschriebenen regulären Dreiecks und theilt den gesuchten gemeinschaftlichen Theil in zwei congruente Kreisabschnitte. Der Inhalt des gemeinschaftlichen Theiles beider Kreise ist

$$=2\left[\frac{r^2\pi}{3}-\tfrac{1}{2}r\sqrt{3}\,.\,\frac{r}{2}\right]$$

$$=\frac{r^2}{6}\left[4\pi-3\sqrt{3}\right]=1{,}22837\,.\,r^2.$$

Der Umfang ist $=\frac{4}{3}r\pi$.

§. 167.

Uebungen zum fünften Kapitel.

1) Zwei Sehnen eines Kreises können sich nicht gegenseitig halbiren, wenn nicht beide Durchmesser sind.

2) Wenn sich zwei gleich lange Sehnen eines Kreises innerhalb oder außerhalb des Kreises schneiden, so sind auch die Abschnitte der einen Sehne denen der andern gleich.

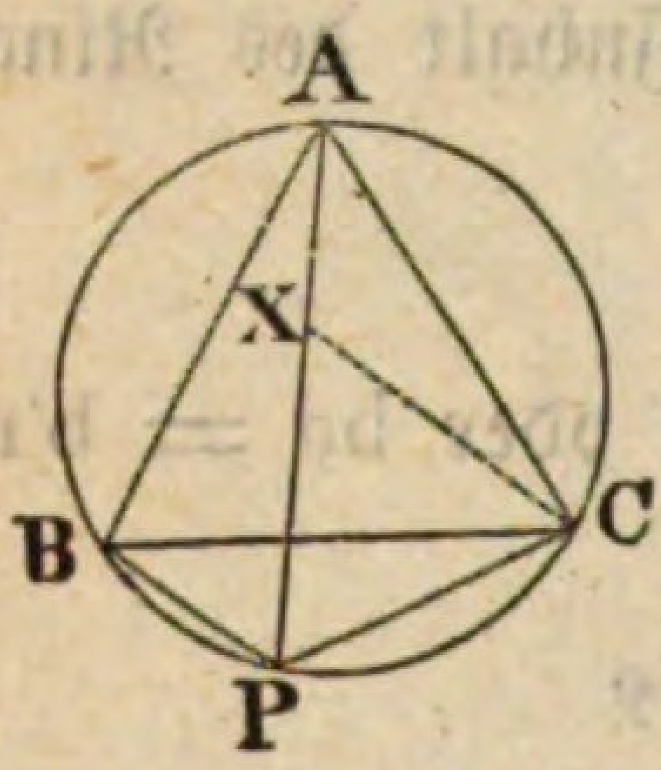
Bew. Durch congruente Dreiecke.

3) Zwei von einem Punkt außerhalb eines Kreises durch den Kreis gelegte gleiche Secanten erzeugen gleiche Sehnen.

4) Werden zwei, von einem Punkte außerhalb eines Kreises durch den Kreis gelegte Secanten durch die Peripherie halbirt, so sind beide einander gleich.

Bew. Verbindet man die Endpunkte der Secanten mit einander und auch ihre Mittelpunkte, so entstehen parallele Sehnen u. s. w. Oder aus §. 128. I.

5) Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Peripherie eines Kreises mit jeder Ecke des eingeschriebenen regulären Dreiecks ABC, so ist die Verbindungslinie mit der dem Punkte P gegenüberliegenden Ecke gleich der Summe der beiden andern Verbindungslinien; also $PA = PB + PC$.



Bew. Man mache $PX = PC$, so wird $\triangle AXC \cong \triangle BPC$. — Noch kürzer ist der Beweis durch den Ptolemäischen Lehrsatz zu führen.

6) Wie groß ist der Bogen, auf welchem ein Peripheriewinkel von 50° in einem Kreise vom Radius $20'$ steht?

Antw. $34{,}906585'$.

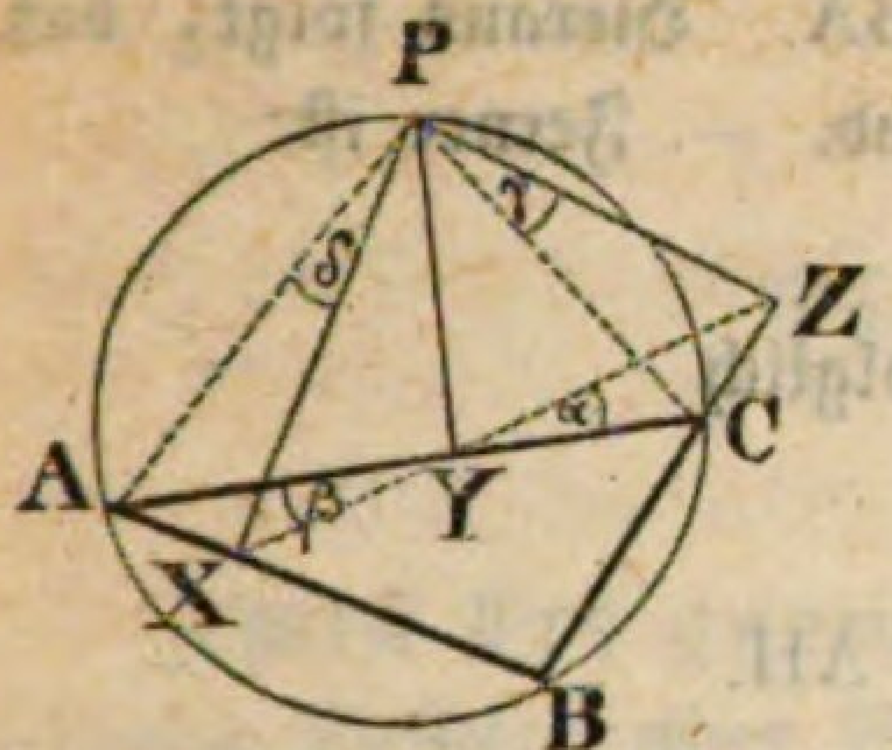
7) Sind in einem Dreieck die bis zu den gegenüberliegenden Seiten verlängerten Halbirungslinien zweier Winkel einander gleich, so sind auch diese Winkel selbst einander gleich, d. h. das Dreieck ist gleichschenklig.

Bew. Um aus $AD = BE$ und der Bedingung, daß diese Linien die Winkel bei A und B halbiren, zu beweisen, daß $\alpha = \beta$ (also auch $2\alpha = 2\beta$) ist, nehme man an, es wäre $\alpha > \beta$, so kann man $\measuredangle DAX = \beta$ machen. Dann läßt sich um das Viereck ABDX ein Kreis beschreiben, und aus $\measuredangle BAX > \measuredangle ABD$ folgt jetzt, da diese Winkel spitze sind (nämlich $2\alpha + 2\beta < 2R$, folglich $\alpha + \beta < R$, also um so mehr $\beta + \beta < R$), der Widerspruch $BX > AD$.



8) Fällt man von einem Punkt P der Peripherie eines Kreises eine Senkrechte auf jede Seite eines eingeschriebenen Dreiecks ABC, so liegen die Fußpunkte derselben X, Y, Z in einer geraden Linie.

Bew. Man ziehe XY und YZ und beweise, daß $\alpha = \beta$ ist. Zieht man PC und PA, so liegen folgende Vierecke in einem Kreise: PYCZ, PAXY, PXBZ und PABC. Man hat nun leicht: $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$, auch $\gamma = \delta$, weil



jeder, zu ∡XPC addirt, das Supplement des ∡B giebt; folglich $\alpha = \beta$.

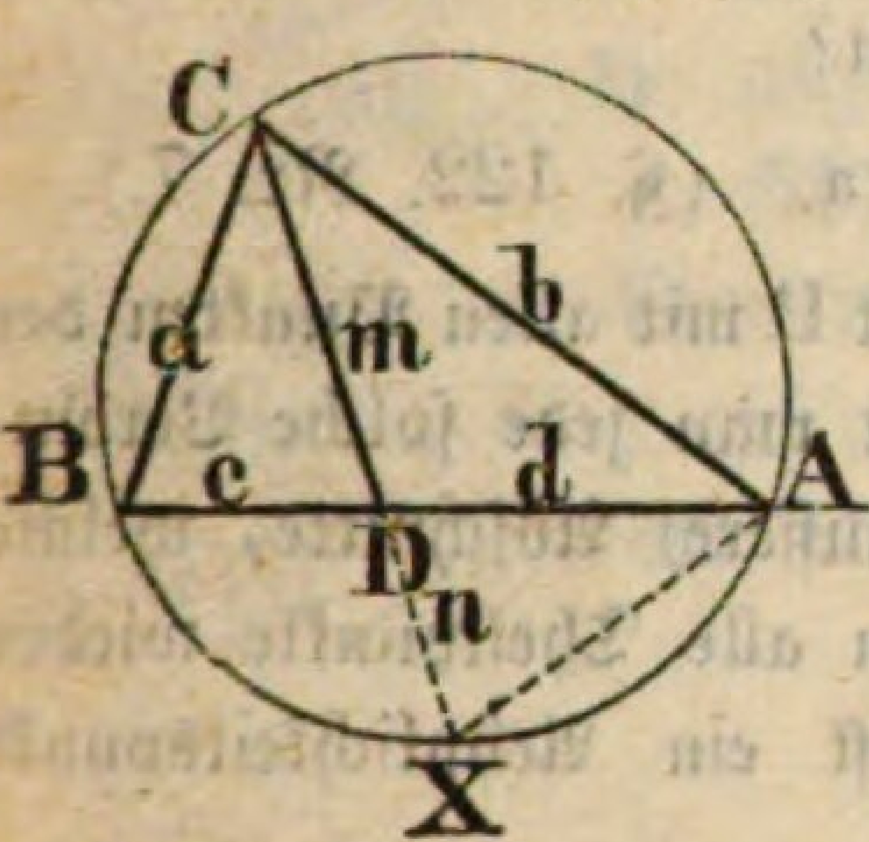
9) Zieht man in einem Kreise von einem Punkte P der Peripherie drei Sehnen und schlägt um jede Sehne (als Durchmesser) einen Kreis, so schneiden sich diese drei Kreise, außer in P, noch in drei Punkten, und diese drei Punkte liegen immer in einer geraden Linie.

Bew. Durch den vorigen Satz. — Man sieht leicht, daß, wenn in der Figur zu Nr. 8. PA, PB, PC die drei Sehnen sind, dann X, Y, Z die drei Durchschnittspunkte der Kreise sein müssen.

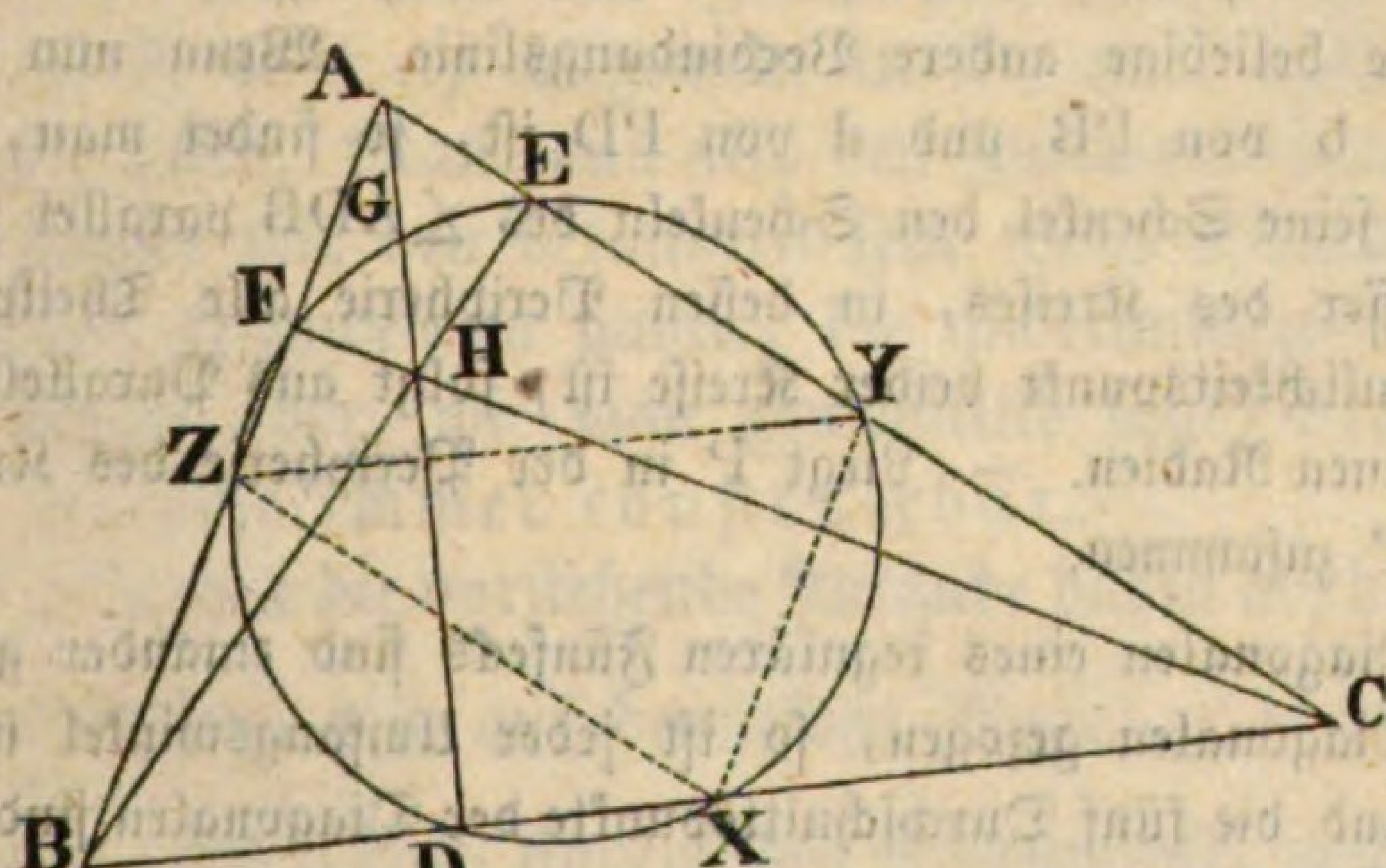
10) Wenn zwei parallele Tangenten eines Kreises durch eine dritte Tangente geschnitten werden, so stehen die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte mit dem Mittelpunkt des Kreises auf einander senkrecht.

11) Die gemeinschaftliche äußere Tangente zweier Kreise, die sich von außen berühren, berührt auch den Kreis, dessen Durchmesser die Centrale ist.

12) Der Lehrsatz §. 72. Nr. 4. läßt sich bequemer durch die Kreislehre beweisen. Wenn m den ∡ACB halbirt, so soll $ab = m^2 + cd$ sein. Verlängert man CD bis zum Durchschnittspunkt X mit der Peripherie des Kreises um das △ABC und zieht XA, so kann man mn statt cd setzen, und die Behauptung heißt jetzt: $ab = m^2 + mn$ oder $ab = m(m+n)$ oder $a:m = m+n:b$. Die Richtigkeit dieser Proportion folgt aus △CBD ∾ △CXA.



13) Der Kreis, welcher durch die drei Fußpunkte (D, E und F) der Höhen eines Dreiecks (ABC) geht, halbirt die Seiten des Dreiecks und auch die Theile



der Höhen, welche zwischen ihrem Durchschnittspunkte und den Ecken liegen.

Bew. Der Beweis wird durch die Sätze §. 128. I. und §. 61. geführt. Aus diesen Sätzen folgt:

$$AE.AY = AF.AZ$$

$$AE.AC = AF.AB;\ \text{folglich dividirt:}$$

$$AY:AC = AZ:AB,\ \text{also}\ YZ \ \# \ CB.$$

Eben so beweist man: ZX $\mp$ AC und XY $\mp$ BA. Hieraus folgt, daß X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten des $\triangle$ABC sind. — Ferner ist:

$$\frac{\begin{array}{l}AE.AY = AG.AD\\ AE.AC = AD.AH;\ \text{folglich}\end{array}}{AY:AC = AG:AH.}$$

Weil aber AY $= \frac{1}{2}$AC ist, so folgt AG $= \frac{1}{2}$AH.

14) Die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gerade um den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises größer als die Hypotenuse.

15) Welche von allen Senkrechten, die auf derselben Seite einer Sehne von Punkten der Peripherie auf diese Sehne gefällt sind, ist die größte?

Antw. Diejenige, welche den Mittelpunkt der Sehne trifft. — Man ziehe den mit der Sehne parallelen Durchmesser, verlängere die Senkrechten nöthigenfalls bis zu diesem Durchmesser und wende §. 21. Nr. 3. an.

16) Welches von allen Dreiecken, die eine Seite = a und den gegenüberliegenden Winkel = α haben, hat den größten Inhalt?

Antw. Das gleichschenklige mit der Grundlinie a. (§. 122. Nr. 7.).

17) Denkt man sich einen beliebig liegenden Punkt P mit allen Punkten der Peripherie eines Kreises (um M) verbunden, und theilt man jede solche Verbindungslinie von P aus in zwei innere (oder jede in zwei äußere) Abschnitte, welche zu einander dasselbe Verhältniß n : m haben: so liegen alle Theilpunkte wieder in der Peripherie eines Kreises. Der Punkt P ist ein Aehnlichkeitspunkt beider Kreise.

Bew. Es sei PA die größte und PB die kleinste Verbindungslinie des Punktes P mit der Peripherie (also AB ein Durchmesser des Kreises um M), und PD sei eine beliebige andere Verbindungslinie. Wenn nun a der Theilpunkt von PA, b von PB und d von PD ist, so findet man, daß $\measuredangle$adb = R ist, weil seine Schenkel den Schenkeln des $\measuredangle$ADB parallel sind; folglich ist ab Durchmesser des Kreises, in dessen Peripherie alle Theilpunkte liegen. Daß P ein Aehnlichkeitspunkt beider Kreise ist, folgt aus Parallelität der nach D und d gezogenen Radien. — Liegt P in der Peripherie des Kreises um M, so fällt b mit P zusammen.

18) Alle Diagonalen eines regulären Fünfecks sind einander gleich. Denkt man sich alle Diagonalen gezogen, so ist jeder Umfangswinkel in drei gleiche Theile zerlegt, und die fünf Durchschnittspunkte der Diagonalen sind wieder Ecken eines regulären Fünfecks. (Congruente Dreiecke.)

19) Zerlegt man alle Seiten eines regulären n-Ecks ABCD... in dieselben zwei innern oder äußeren Abschnitte, und zwar AB von A aus, BC von B aus, CD von C aus u. s. w., so sind die Theilpunkte wieder Ecken eines regulären n-Ecks. Beide Polygone haben denselben Mittelpunkt.

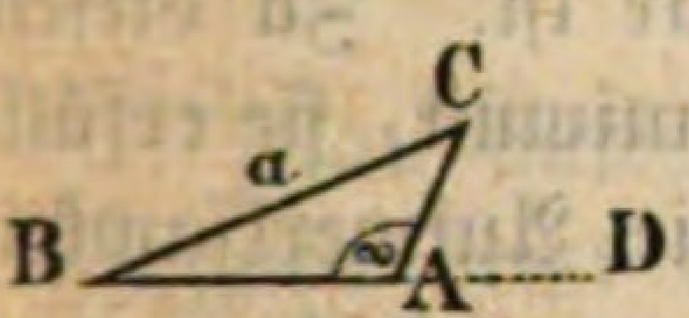
Sechstes Kapitel.

Die geometrische Analysis.

§. 168.

Zweck der geometrischen Analysis ist: eine Figur aus gegebenen Stücken oder Bedingungen mittelst des Zirkels und des Lineals zu zeichnen; das Mittel zu diesem Zwecke ist: die Erkenntniß der geometrischen Abhängigkeit der unbekannten Stücke einer Figur von den bekannten.

Allein auch diese Erkenntniß der Abhängigkeit reicht nicht immer zur Construction einer Figur hin. Soll z. B. ein ΔABC aus einem Winkel $BAC = \alpha$, der Seite $BC = a$ und der Bedingung construirt werden, daß $\measuredangle C$ doppelt so groß sein soll als $\measuredangle B$, so käme es darauf an, etwa die Abhängigkeit des $\measuredangle B$ von α zu ermitteln und dieser Abhängigkeit gemäß $\measuredangle B$ zu construiren, worauf dann leicht die Construction des ΔABC auszuführen wäre.



Nun ist $\measuredangle CAD = \measuredangle B + \measuredangle C$, und weil $\measuredangle C = 2\measuredangle B$ sein soll, muß $\measuredangle CAD = 3\measuredangle B$ sein, oder $180° - \alpha = 3 . \measuredangle B$, folglich

$$\measuredangle B = \frac{180° - \alpha}{3}.$$

Hierdurch ist nun die Abhängigkeit des $\measuredangle B$ von α vollständig erkannt — und doch ist die Zeichnung des Winkels B und des ΔABC nicht gefunden, weil man mit Zirkel und Lineal einen beliebigen Winkel nur in 2, 4, 8..., allgemein in 2^n, aber nicht in 3 gleiche Theile zerlegen kann. Man kann also den Zusammenhang unbekannter Stücke einer Figur mit den bekannten sehr wohl erkannt haben, ohne doch das Mittel gefunden zu haben, die unbekannten Stücke und die Figur zu zeichnen, oder, wie man gewöhnlich sagt, dieser Zusammenhang ist nicht immer construirbar.

Aendern wir nun die vorstehende Aufgabe dahin ab, daß $\measuredangle C = 3 . \measuredangle B$ sein soll, so erhalten wir auf demselben Wege: $\measuredangle B = \frac{180° - \alpha}{4}$. Wir hätten also, um $\measuredangle B$ zu finden, den Nebenwinkel von α in 4 gleiche Theile zu theilen, und der gefundene Zusammenhang zwischen $\measuredangle B$ und α wäre jetzt construirbar; aber natürlich doch nur für Denjenigen, welcher einen Winkel in 2, also auch in 4 gleiche Theile zu zerlegen versteht. Wer das nicht kann, hätte also noch keinen construirbaren Zusammenhang gefunden und würde erst weiter untersuchen müssen, wie durch geometrische Construction ein Winkel zu halbiren ist.

§. 169.
Die Analysis.

Das Verfahren, durch welches man die Zeichnung einer Figur, welche gegebene Bedingungen erfüllen soll, zu finden sucht (unter welchen Bedingungen gegebene Stücke als inbegriffen anzunehmen sind), nennt man die Analysis der Aufgabe. — Der Begriff »Figur« ist hier in umfassenderem Sinne zu verstehen, also nicht auf geschlossene Figuren zu beschränken. Eben so ist der Begriff »Stück« allgemeiner aufzufassen, als dies früher bei den geschlossenen Figuren geschah, so daß z. B. Punkte mit zu den Stücken gezählt werden können. — Die Analysis besteht nun in einer Kette von Schlüssen, durch welche man, anknüpfend an die gegebenen Bedingungen, mittelst geometrischer Gesetze den Zusammenhang zwischen nicht gegebenen und gegebenen Stücken zu finden und so weit zu verfolgen sucht, bis er construirbar ist. Zu diesem Zwecke zeichnet man sich eine Figur, von der man annimmt, sie erfülle die Bedingungen der Aufgabe, und richtet nun die Aufmerksamkeit auf solche nicht gegebenen Stücke, von deren Zeichnung die der gegebenen Figur entweder geradezu, oder doch mittelbar abhängt. Solche Stücke richtig zu erkennen, ihren Zusammenhang mit den gegebenen Stücken aufzufinden und sie durch diese construirbar zu machen: darin besteht die Analysis, welche sonach Kenntniß der geometrischen Gesetze voraussetzt, Scharfsinn erfordert und um so mehr ein Erzeugniß eigener Geistesthätigkeit ist, als solche Stücke in der Regel nicht schon in der gezeichneten Figur vorhanden sind, sondern erst durch eine zweckmäßige Hülfsconstruction hinein gebracht werden müssen. Diese durch die gegebenen Stücke construirbaren nicht gegebenen Stücke der Figur (Punkte, Linien, Winkel, Kreise, auch einzelne Theile der verlangten Figur, u. s. w.) benutzt man nun, um aus ihnen die ganze Figur zusammenzusetzen. Häufig wird es nöthig sein, mehr als ein unbekanntes Stück einer Untersuchung zu unterwerfen und seine Construction zu ermöglichen.

Der Analysis folgt die Construction der Figur mittelst des Zirkels und Lineals, und hinzu kann man dann noch den synthetischen Beweis fügen, daß die gezeichnete Figur wirklich die gegebenen Bedingungen erfüllt. Im Allgemeinen kann dieser Beweis nicht schwer sein, weil in der Analysis der Aufgabe auch der analytische Beweis der Richtigkeit der Construction liegt.

Die folgenden §§. enthalten die Untersuchung über die Bedingungen der Aufgaben, die Angabe der hiermit zusammenhängenden Eintheilung der Aufgaben und die Methoden der geometrischen Analysis, denen sich Uebungsaufgaben anschließen, welche zum großen

Theil mit Rücksicht auf das practische Bedürfniß gegeben sind. Eine umfassende systematische Sammlung geometrischer Constructions-Aufgaben kann um so weniger in dem Zwecke dieses Lehrbuches liegen, als eine solche Sammlung selbst ein umfangreiches Werk sein würde, wie wir ein solches in der geometrischen Analysis von H. von Holleben und P. Gerwien besitzen.

Eintheilung der Aufgaben. Ueber die Bedingungen der Aufgaben.

§. 170.

Erklärung.

Man unterscheidet örtliche und unörtliche Aufgaben. Jede Aufgabe heißt eine örtliche, wenn die Figur, deren Construction verlangt wird, sich an Punkte, Linien oder Winkel, die in bestimmter Lage gegeben sind, oder an eine gegebene Figur anschließen soll; alle andern Aufgaben heißen unörtliche.

Oertliche Aufgaben sind z. B. folgende: einen Winkel zu halbiren; an einen Kreis eine Tangente zu legen; in ein Dreieck einen Kreis zu legen; ein Quadrat zu zeichnen, dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte gehen; einen Kreis durch einen concentrischen Kreis zu halbiren, u. s. w. Hierher gehören namentlich alle Aufgaben über Theilung gegebener Figuren.

Unörtliche Aufgaben sind: ein Paralleltrapez aus seinen vier Seiten zu zeichnen; einen Kreis zu zeichnen, welcher der Summe zweier gegebenen Kreise gleich ist; ein Dreieck aus seinem Umfange und zwei seiner Winkel zu construiren, u. s. w.

§. 171.

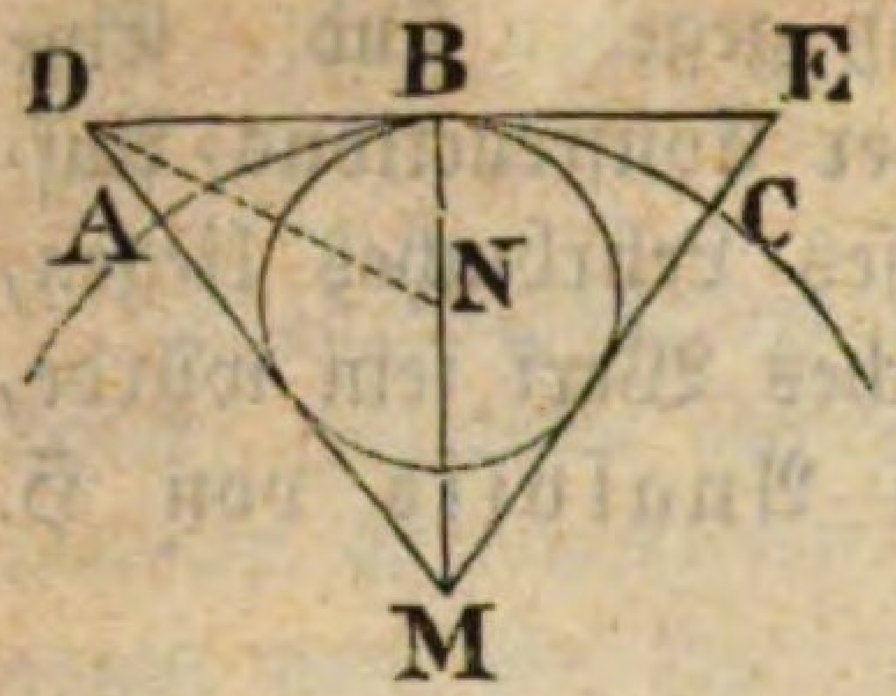
Erklärung.

Je nach der Anzahl und der Art der Bedingungen sind die Aufgaben bestimmte, unbestimmte (und zwar beschränkt und unbeschränkt unbestimmte), überbestimmte und widersprechend bestimmte.

1) Eine örtliche Aufgabe heißt eine bestimmte, wenn nur eine Figur die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Beispiel. In einen Kreisausschnitt einen Kreis zu construiren, der den Bogen und die begrenzenden Radien berührt.

Analysis. Es sei MABC der gegebene Kreisausschnitt, und der Kreis um N der gesuchte. Da N von den Schenkeln des Winkels



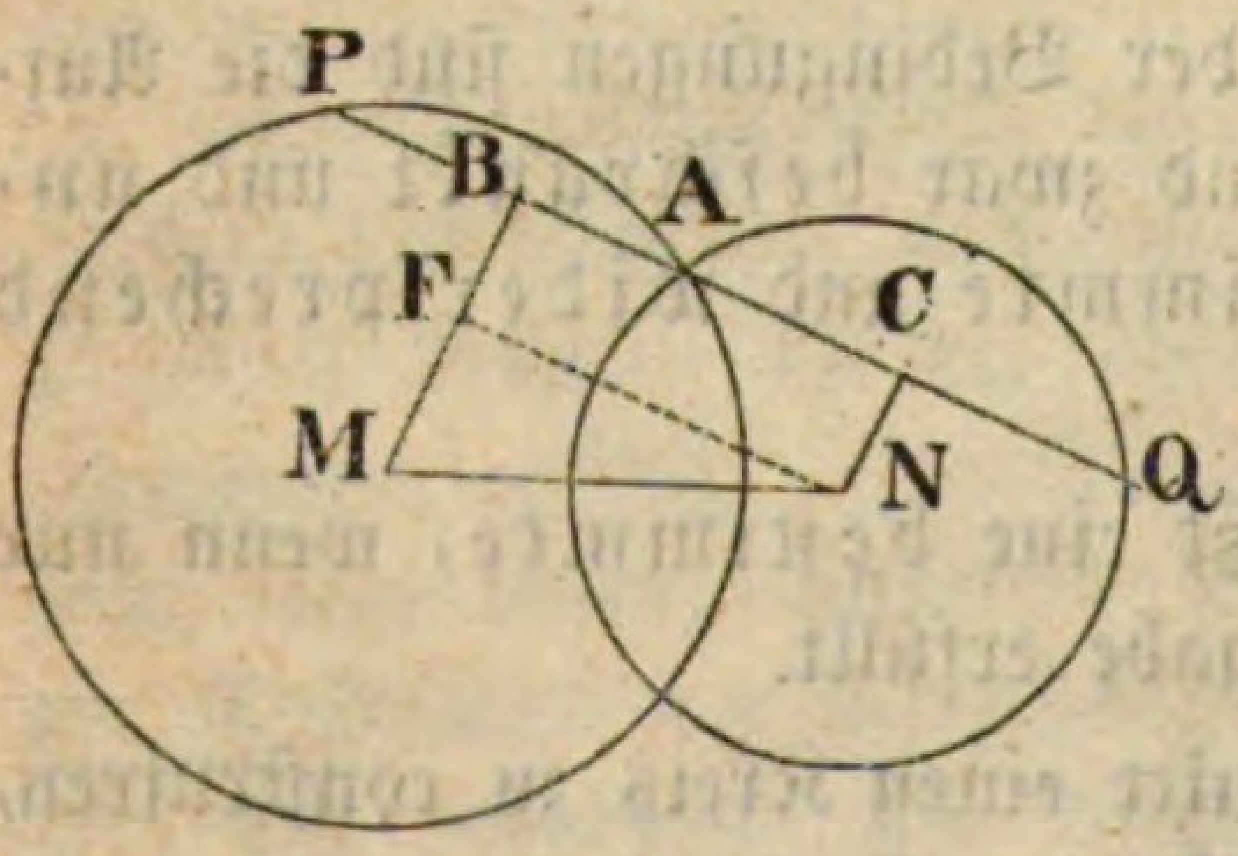
AMC gleich weit entfernt sein soll, so muß dieser Punkt in der Halbirungslinie des Winkels liegen, und weil die Centrale zweier Kreise, die sich berühren, durch den Berührungspunkt geht, so muß der gesuchte Kreis den Bogen ABC in seinem Mittelpunkte B berühren. Denkt man sich aber in B eine Tangente an den Kreis um M gelegt, welche mit den verlängerten Radien MA und MC das ΔMDE bildet, so berührt diese Tangente auch den Kreis um N in B; folglich ist der gesuchte Kreis der in das ΔMDE eingeschriebene. Hieraus folgt nun, daß die vorliegende Aufgabe eine bestimmte ist, weil in jedes Dreieck sich nur ein Kreis einschreiben läßt. Es folgt aber hieraus auch die Construction des Kreises; denn sein Mittelpunkt N muß auch in der Halbirungslinie des $\measuredangle$MDE liegen; folglich muß der Durchschnittspunkt dieser Linie mit MB der Mittelpunkt N des gesuchten Kreises sein.

Construction. Man ziehe den Radius MB, welcher den $\measuredangle$AMC halbirt, und lege durch B eine Tangente an den Kreis um M, welche den Radius MA in D schneiden mag. Halbirt man nun den $\measuredangle$BDM und verlängert die Halbirungslinie, bis sie MB in N schneidet, so ist N der Mittelpunkt und NB der Radius des gesuchten Kreises.

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

2) Eine örtliche Aufgabe heißt eine unbestimmte, wenn sie mehr als eine Auflösung gestattet. Ist die Anzahl der Auflösungen eine bestimmte, endliche, so heißt die Aufgabe eine beschränkt unbestimte; gestattet die Aufgabe unendliche viele Auflösungen, so heißt sie eine unbeschränkt unbestimmte.

Beispiel 1. einer beschränkt unbestimmten örtlichen Aufgabe. Es sind die beiden sich schneidenden Kreise um M und N gegeben; man soll durch den einen Durchschnittspunkt A eine Linie von gegebener Länge a so legen, daß sie in den Peripherien beider Kreise endet.



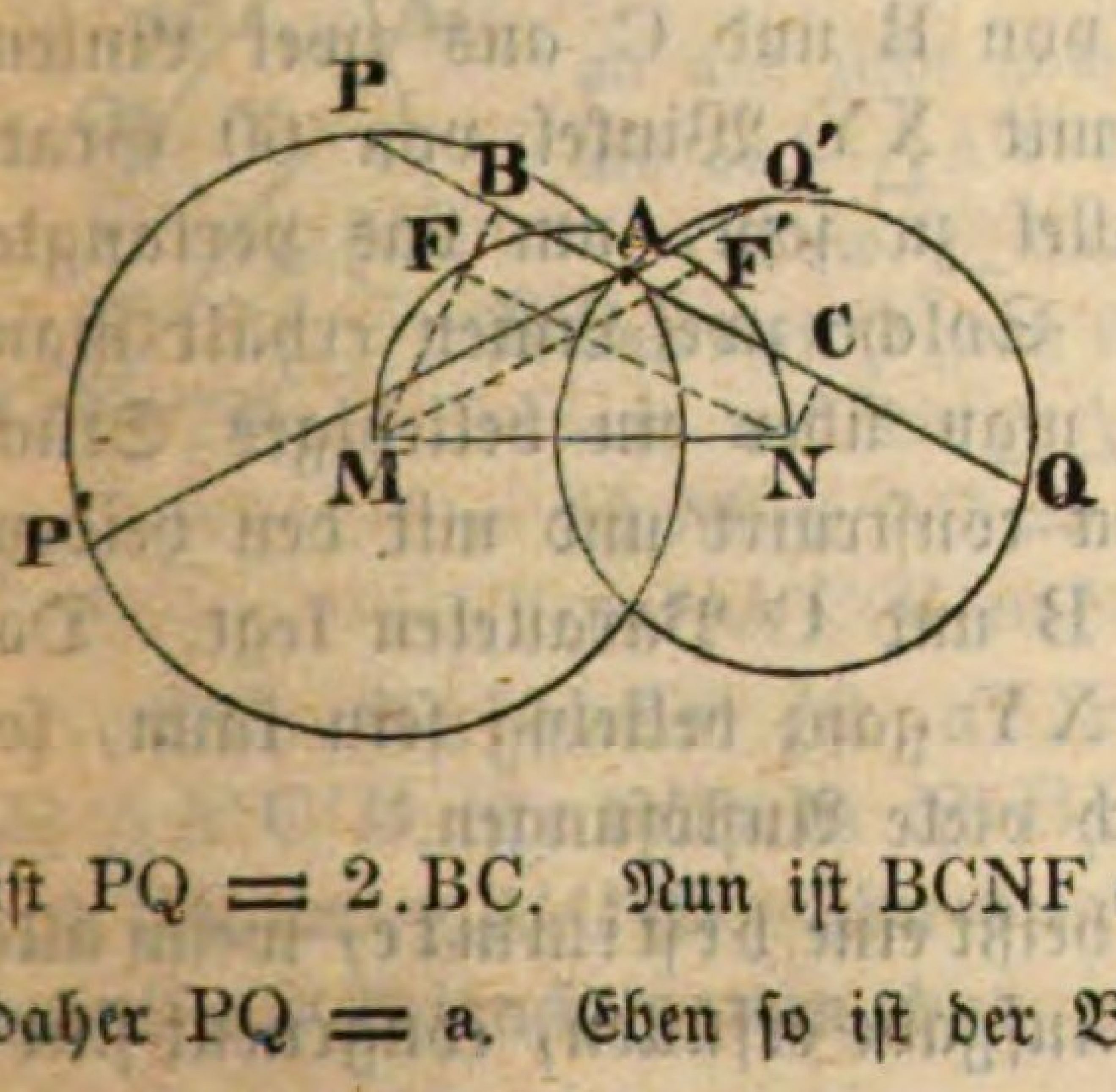
Analysis. Es sei PQ die Linie von der Länge a in der verlangten Lage. Fällt man MB und NC senkrecht auf PQ, so ist B der Mittelpunkt von AP, und C der Mittelpunkt von AQ; folglich ist $BC = \frac{1}{2}PQ = \frac{a}{2}$.

Betrachtet man nun das Paralleltrapez MNCB, durch dessen Construction die vorliegende Aufgabe offenbar gelöst wäre, so kennt man

in demselben die Lage und Länge der Seite MN, die rechten Winkel bei B und C, die Länge der Seite BC und einen Punkt A dieser Seite. Dies Paralleltrapez zu construiren, ist auch eine örtliche Aufgabe, und wenn nur ein Paralleltrapez die angegebenen Bedingungen erfüllt, so ist auch die vorliegende Aufgabe eine bestimmte. Da nun das Paralleltrapez noch nicht construirbar erscheint, so setzen wir die Analysis fort. Zieht man NF ∦ CB, so entsteht das rechtwinklige ΔMNF, in welchem außer dem rechten Winkel bei F die Lage und Länge der Hypotenuse MN und die Länge der Kathete NF $= \frac{a}{2}$ bekannt ist. Was aber die Lage dieser Kathete betrifft, so ist sie parallel QP; folglich würde, wenn die vorliegende Aufgabe mehr als eine Auflösung hat, auch NF mehr als eine Lage haben müssen. Umgekehrt wird QP mehr als eine Lage haben können, wenn die Construction des ΔMNF mehr als eine Lage für NF zuläßt.

Nun ist aber Größe und Gestalt des ΔMNF vollkommen bestimmt; denn alle Dreiecke, welche MN zur Hypotenuse und $\frac{a}{2}$ zur einen Kathete haben, sind congruent; hingegen kann diese Kathete $\frac{a}{2}$ zwei verschiedene Lagen haben: sie kann die dem Punkte N und auch die dem Punkte M anliegende Kathete sein. Hieraus ergiebt sich die Möglichkeit zweier Auflösungen, welche durch die nachfolgende Construction zur Gewißheit wird, so daß die vorliegende Aufgabe eine beschränkt unbestimmte ist.

Construction. Man schlage über die Centrale MN einen Halbkreis und trage in denselben sowohl von M, als auch von N aus $\frac{a}{2}$ als Sehne ein. Es sei NF $=$ MF′ $= \frac{a}{2}$.

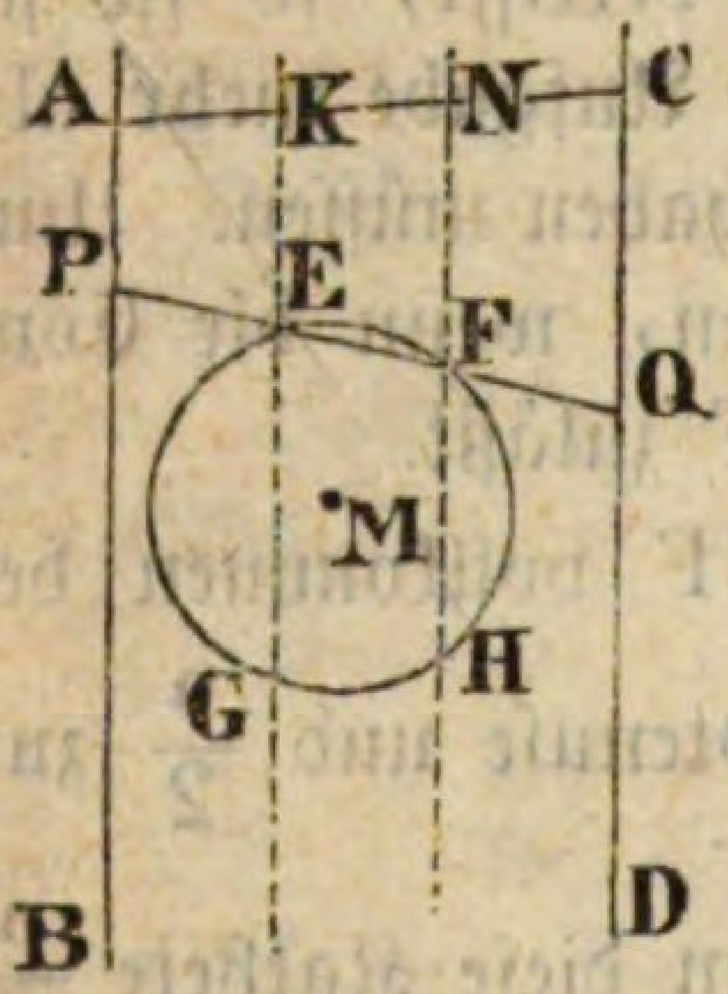


Zieht man nun durch den Durchschnittspunkt A beider Kreise PQ ∦ FN und P′Q′ ∦ MF′, so ist sowohl PQ, als auch P′Q′ die verlangte Linie.

Bew. Man ziehe MF und verlängere MF, bis sie PQ in B trifft; dann ziehe man NC ∦ MB. Da ∡MFN $=$ R als Winkel im Halbkreis und PQ ∦ FN ist, so sind MB und NC ⊥ PQ; folglich ist PQ $=$ 2.BC. Nun ist BCNF ein Rechteck, folglich BC $=$ FN $= \frac{a}{2}$, daher PQ $=$ a. Eben so ist der Beweis für P′Q′ zu führen.

Anmerk. In dem besonderen Falle, wenn a = 2.MN ist, wird PQ ╪ MN, und dann hat die Aufgabe nur eine Auflösung. Die Untersuchung über die vorliegende Aufgabe ist hiermit nicht erschöpft; namentlich wäre der Fall noch zu untersuchen, wenn A nicht ein Punkt der Linie a selbst, sondern ein Punkt der Verlängerung dieser Linie sein soll.

Beispiel 2. einer beschränkt unbestimmten örtlichen Aufgabe. Zwischen zwei parallelen Linien AB und CD ist der Kreis um M gegeben; man soll eine gerade Linie ziehen, welche in den beiden Parallelen endet und durch die Peripherie des Kreises um M in drei gleiche Theile getheilt wird.

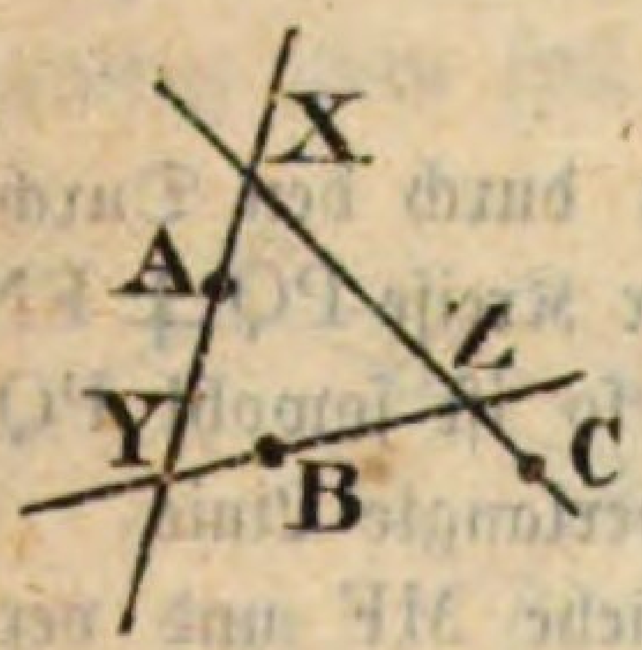


Analysis. PQ sei die verlangte Linie, also PE = EF = FQ. Zieht man nun durch E und F Parallelen mit AB, so wird durch diese jede Linie, welche in AB und CD endet, in drei gleiche Theile getheilt, z. B. AC in K und N.

Construction. Man ziehe eine beliebige Linie AC, welche in den gegebenen Parallelen endet, und theile sie in drei gleiche Theile. Durch die Theilpunkte K und N ziehe man Parallelen mit AB und CD. Verbindet man nun jeden Durchschnittspunkt (E und G), in welchem die eine Parallele den Kreis schneidet, mit jedem Durchschnittspunkte (F und H), in welchem die andere Parallele den Kreis schneidet, und verlängert man diese Linien bis sie AB und CD treffen: so wird jede dieser Linien durch die Peripherie des Kreises in drei gleiche Theile zerlegt. Die Aufgabe hat also im Allgemeinen vier Auflösungen.

Beispiel einer unbeschränkt unbestimmten örtlichen Aufgabe. Durch drei gegebene Punkte A, B und C drei gerade Linien zu legen, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Analysis. Angenommen, ΔXYZ sei das verlangte, so ist jeder Winkel dieses Dreiecks $= \frac{2}{3}R$. Denkt man sich also durch A die Linie XY beliebig gezogen, so braucht man nur von B und C aus zwei Linien zu ziehen, welche mit XY Winkel von 60 Grad bilden, ohne parallel zu sein, um das verlangte Dreieck zu erhalten. Solche zwei Linien erhält man aber leicht, wenn man über ein beliebiges Stück der Linie XY ein gleichseitiges Dreieck construirt und mit den beiden andern Seiten dieses Dreiecks durch B und C Parallelen legt. Da die Lage der durch A gelegten Linie XY ganz beliebig sein kann, so hat die vorliegende Aufgabe unendlich viele Auflösungen.

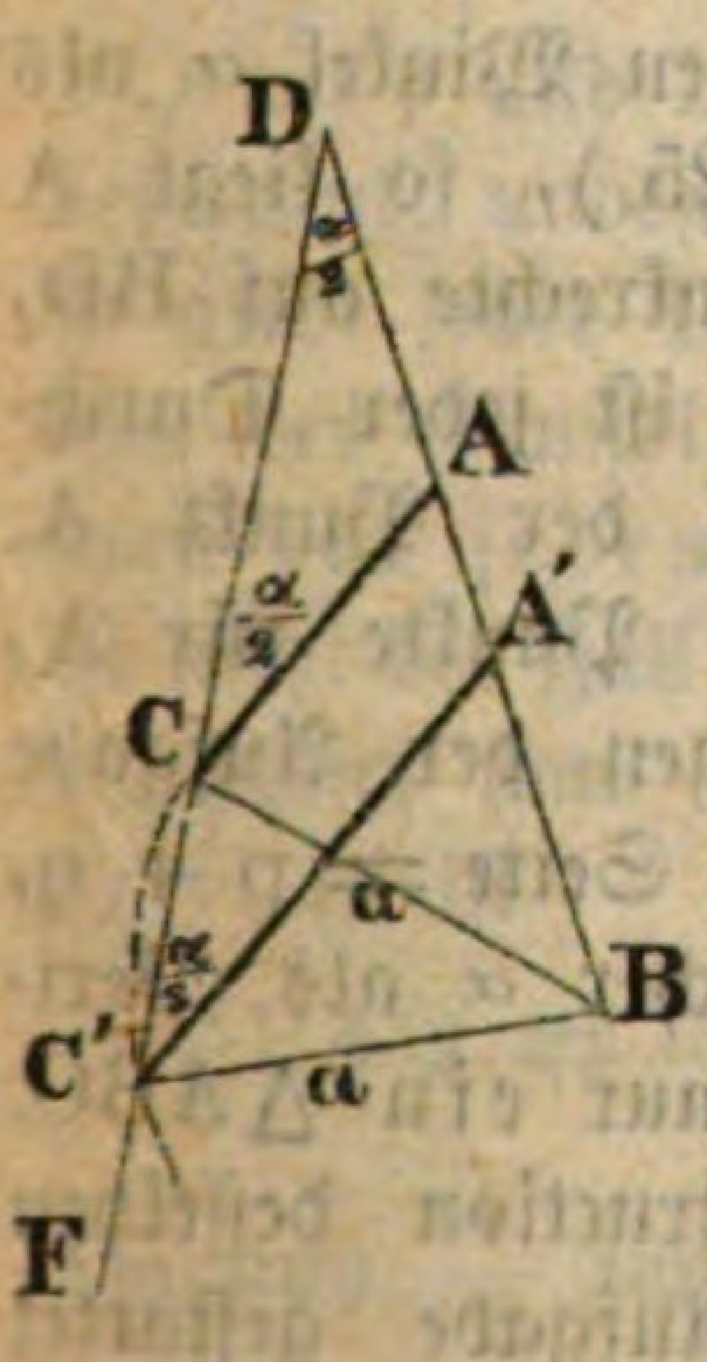


3) Eine unörtliche Aufgabe heißt eine bestimmte, wenn alle Figuren, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, congruent sind.

Beispiel. Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite = a, dem gegenüberliegenden Winkel = α und der Summe der beiden andern Seiten = s.



Analysis. $\triangle ABC$ sei das verlangte, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$ und $AB + AC = s$. Daß die Summe zweier Seiten gegeben ist, giebt Veranlassung, diese Summe in der Figur als eine gerade Linie darzustellen. Verlängert man also BA über A bis D, so daß $AD = AC$ wird, so ist $BD = s$. Verbindet man nun D mit C, so erkennt man leicht, daß $\triangle ABC$ construirbar wäre, wenn $\triangle BDC$ sich construiren ließe. In diesem $\triangle BDC$ sind aber zwei Seiten ($BD = s$ und $BC = a$) bekannt, und der $\angle BDC$ ist $= \frac{\alpha}{2}$, weil er $= \angle ACD$, α aber als Außenwinkel der Summe beider Winkel gleich ist. Zur Construction des $\triangle BDC$ hat man sonach zwei Seiten und den Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüber liegt. Das Dreieck ist daher nicht vollständig bestimmt, weil, wie bekannt, zwei nicht congruente Dreiecke mit den gegebenen Stücken existiren. Hat man beide Dreiecke gezeichnet, so kann man von jedem derselben durch Construction des gleichschenkligen Dreiecks ADC zu dem $\triangle ABC$ gelangen; man erhält also auch zwei Dreiecke für ABC, und von der Congruenz, oder Nicht-Congruenz dieser Dreiecke hängt es sonach ab, ob die vorliegende Aufgabe eine bestimmte, oder eine beschränkt unbestimmte ist.



Construction. Man mache $DB = s$, trage an DB in D den Winkel $BDF = \frac{\alpha}{2}$ an und schlage um B mit a als Radius einen Kreis, der DF in C und C' schneiden mag. Trägt man nun noch an DC in C den Winkel $DCA = \frac{\alpha}{2}$ an und zieht noch $C'A' \mathrel{\#} CA$, so erfüllt sowohl $\triangle ABC$, als auch $\triangle A'C'B$ die gegebenen Bedingungen.

Bew. $\angle BAC$ ist als Außenwinkel des $\triangle ACD$ gleich α, und eben so groß ist $\angle C'A'B$. Ferner ist $BC = C'B = a$, und weil die $\triangle\triangle ACD$ und $A'C'D$ gleichschenklig sind, so ist $AB + AC = A'B + A'C' = BD = s$. Die $\triangle\triangle ABC$ und $A'C'B$ enthalten also die gegebenen Stücke.

Die Aufgabe ist aber eine bestimmte, weil $\triangle ABC \cong \triangle A'C'B$ ist; denn es ist $BC = C'B$, $\angle BAC = \angle C'A'B$ und $\angle ABC = \angle A'C'B$. Um die Richtigkeit dieser letzten Gleichung zu beweisen, betrachte man das gleichschenklige $\triangle BCC'$. Es sind die

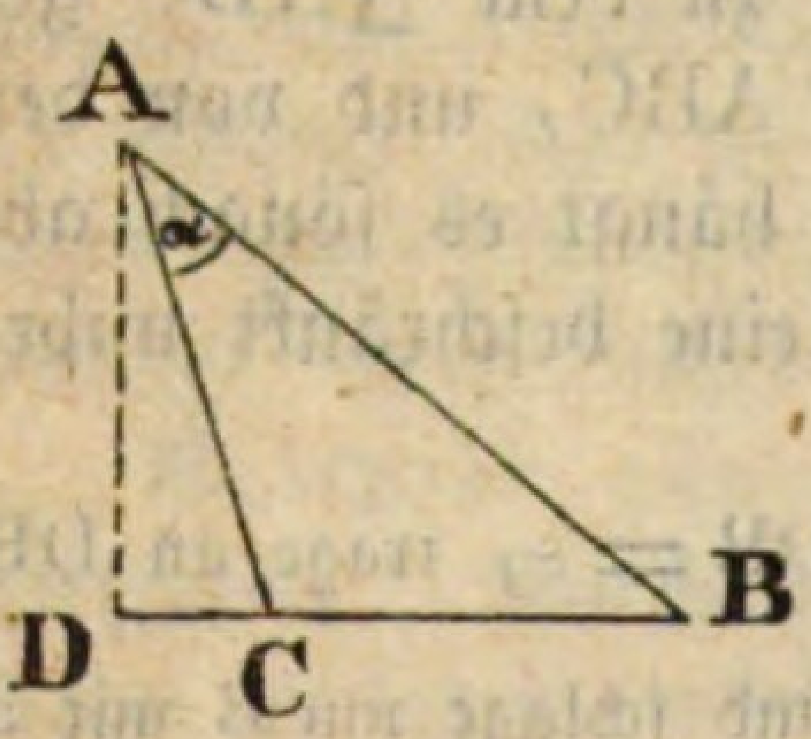
beiden Winkel an der Grundlinie, $\measuredangle BCC'$ und $\measuredangle BC'C$, einander gleich, und der erstere ist noch als Außenwinkel $= \frac{\alpha}{2} + \measuredangle ABC$. Zieht man also von jedem dieser gleichen Winkel $\frac{\alpha}{2}$ ab, so bleibt:

$$\measuredangle ABC = \measuredangle A'C'B.$$

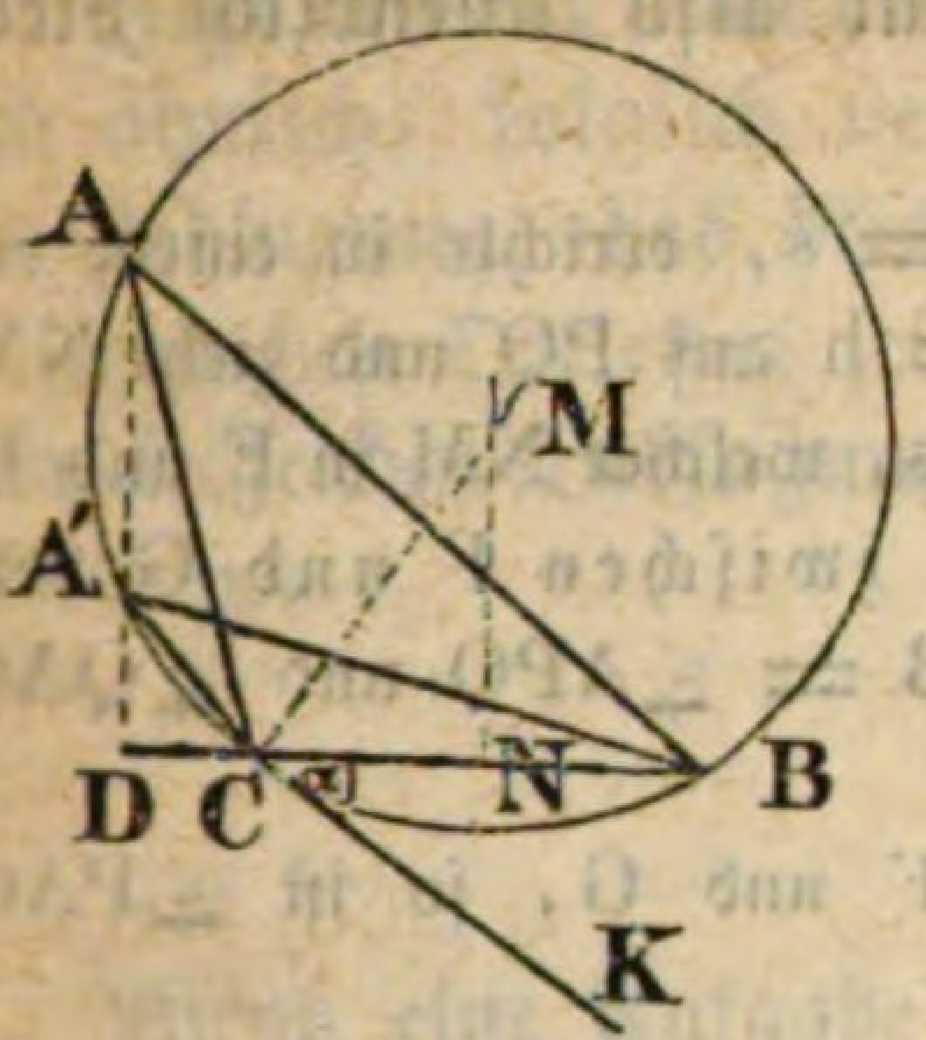
4) **Eine unörtliche Aufgabe** heißt eine **unbestimmte**, wenn zwei oder mehr nicht congruente Figuren die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Ist die Anzahl solcher Figuren eine bestimmte, endliche, so heißt die Aufgabe eine **beschränkt unbestimmte**; ist die Anzahl unendlich: eine **unbeschränkt unbestimmte**.

Beispiel einer beschränkt unbestimmten unörtlichen Aufgabe. Zur Construction eines Dreiecks ist ein Winkel α gegeben, und die Projectionen p und q der diesen Winkel einschließenden Seiten auf die dritte Seite.

Analysis. Zunächst ist die Aufgabe schon deshalb unbestimmt, weil die dem Winkel α gegenüberliegende Seite sowohl die Summe $p + q$, als auch die Differenz $p - q$ ($p > q$ vorausgesetzt) sein kann. Im zweiten Falle muß einer der unbekannten Winkel stumpf sein. Betrachten wir zuerst diesen zweiten Fall. Es sei ΔABC das verlangte, $\measuredangle BAC = \alpha$ und, wenn $AD \perp BC$ gefällt wird, $BD = p$ und $CD = q$. Unmittelbar kann man BD und in BD den Punkt C zeichnen. Es kommt jetzt darauf an, A zu finden. Construirt man aber über BC einen Kreisbogen, welcher den Winkel α als Peripheriewinkel faßt (§. 125.), so liegt A in diesem Bogen, und errichtet man in D eine Senkrechte auf BD, so liegt A auch in dieser Senkrechten; folglich ist jeder Durchschnittspunkt der Senkrechten mit jenem Bogen der Punkt A. Es giebt also im Allgemeinen zwei verschiedene Punkte für A, folglich auch zwei Dreiecke, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. — Ist die dem Winkel α gegenüberliegende Seite $= p + q$, so ist über $p + q$ ein Bogen zu construiren, welcher α als Peripheriewinkel faßt. In diesem Falle erhält man nur **ein** ΔABC. Das Weitere über diesen Fall und auch die Construction desselben sei dem Leser überlassen. — Die vorliegende Aufgabe gestattet sonach im Allgemeinen **drei** Auflösungen und ist eine beschränkt unbestimmte.



Construction. Man mache $BD = p$, trage auf BD von D aus $DC = q$ ab, lege in C an CB den Winkel $BCK = \alpha$ an, errichte $CM \perp CK$ und

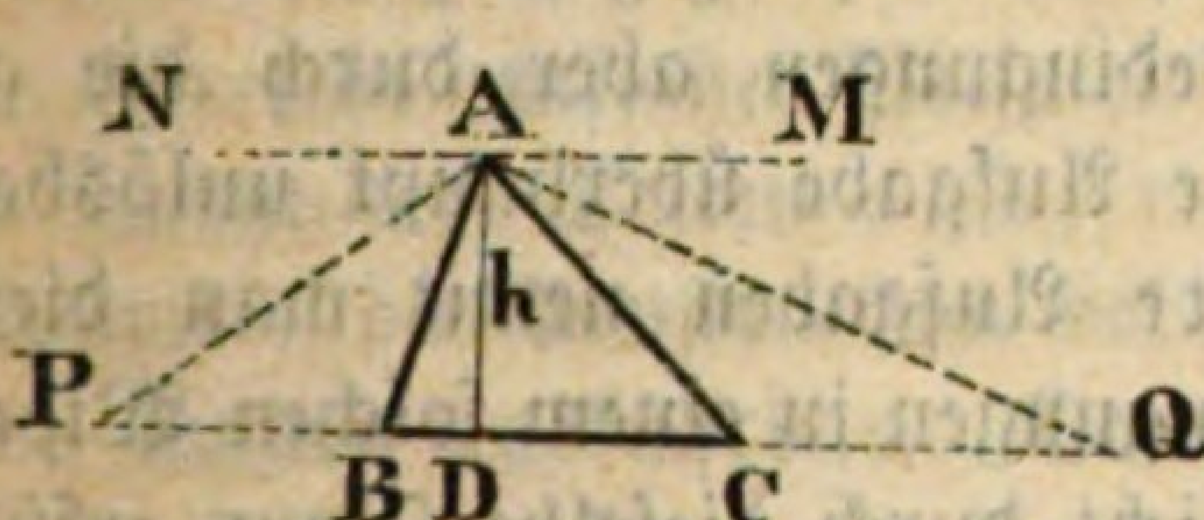


im Mittelpunkte N der BC die Linie NM $\perp$ BC. Schneiden sich beide Senkrechten in M, so schlage man mit MC als Radius um M einen Kreis, errichte in D die Linie DA $\perp$ DB und verbinde die beiden Durchschnittspunkte A und A' dieser Senkrechten mit dem Kreise um M mit B und C; dann ist sowohl $\triangle$ABC, als auch $\triangle$A'BC das verlangte.

Anmerk. In besonderen Fällen kann die vorliegende Aufgabe auch eine bestimmte sein; namentlich ist dies der Fall, wenn α ein rechter oder stumpfer Winkel ist, oder wenn p = q ist, oder wenn in der vorstehenden Figur die in D auf DB errichtete Senkrechte den Kreis um M nicht trifft, in welchen Fällen die dem Winkel α gegenüberliegende Seite nur = p + q sein kann.

Beispiel einer unbeschränkt unbestimmten unörtlichen Aufgabe. Ein Dreieck aus seinem Umfange s und einer Höhe h zu construiren.

Analysis. $\triangle$ABC sei das verlangte, AB + BC + CA = s und die Höhe AD = h. Da der Umfang als gerade Linie gegeben ist, so erscheint es zweckmäßig, BC über B und C hinaus so zu verlängern, daß BP = BA und CQ = CA wird; dann ist PQ = s. Zieht man AP und AQ, so ist zur Construction des $\triangle$APQ gegeben:



PQ = s und die Höhe AD = h. Diese Aufgabe selbst ist eine unbeschränkt unbestimmte; denn zieht man durch A die Linie NM $\parallel$ BC, so giebt jeder Punkt der NM, mit P und Q verbunden, ein Dreieck von der Grundlinie s und der Höhe h. Es fragt sich nur noch, ob man von jedem dieser Dreiecke zum $\triangle$ABC übergehen kann. Dies ist nicht der Fall, weil der $\angle$PAQ nothwendig stumpf sein muß. Denn bezeichnet man im $\triangle$ABC die Winkel bei A, B, C resp. durch α, β, γ, so ist

$$\angle PAQ = \alpha + \frac{\beta+\gamma}{2} = \alpha + \tfrac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Da nun $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 0° und 90° liegen muß, so muß $\angle$PAQ zwischen 90° und 180° liegen, also stumpf sein. Von allen Punkten der Linie NM, welche, mit P und Q verbunden, einen stumpfen Winkel erzeugen, kann man also zum $\triangle$ABC übergehen, wenn man über AP und AQ gleichschenklige Dreiecke construirt, deren Spitzen

in PQ liegen. Die vorliegende Aufgabe hat also unendlich viele Auflösungen.

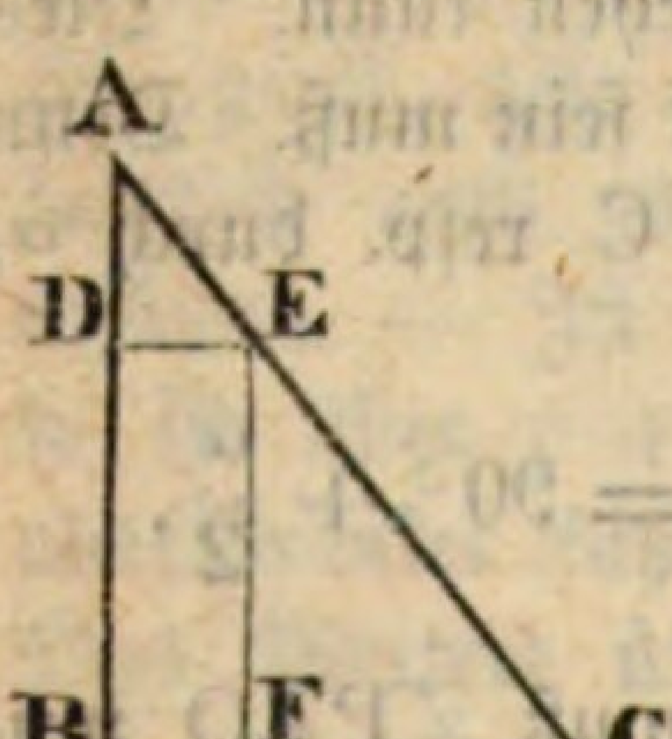
Construction. Man zeichne eine Linie PQ = s, errichte in einem beliebigen Punkte, etwa in P, eine Senkrechte PN = h auf PQ und ziehe NM ⫩ PQ. Man schlage nun über PQ einen Halbkreis, welcher NM in F und G schneiden mag. Einen beliebigen Punkt A der NM zwischen F und G verbinde man nun mit P und Q, mache dann ∡PAB = ∡APQ und ∡QAC = ∡AQP: so ist △ABC das verlangte.

Beweis leicht. — Liegt A nicht zwischen F und G, so ist ∡PAQ nicht stumpf.

5) Eine Aufgabe heißt überbestimmt, wenn schon ein Theil der Bedingungen hinreicht, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, z. B. einen Rhombus aus der Seite a und den beiden Diagonalen p und q zu construiren. Eine solche Aufgabe könnte nur dann eine Auflösung haben, wenn die aus einem Theil der Bedingungen construirte Figur, auch zufällig die andern Bedingungen erfüllte, wenn also etwa bei dem angeführten Beispiele der aus der Seite a und einer Diagonale p construirte Rhombus auch die andere Diagonale q enthielte. Die anderen Bedingungen (in dem Beispiele: q) würden dann aber nicht besondere, unabhängige, sondern überflüssige sein. Sind diese anderen Bedingungen aber durch die gezeichnete Figur nicht erfüllt, so ist die Aufgabe überhaupt unlösbar.

6) Widersprechend bestimmte Aufgaben nennt man diejenigen, bei welchen die gegebenen Bedingungen in einem solchen Widerspruch zu einander stehen, daß sie nicht durch dieselbe Figur erfüllt werden können. z. B. Um einen Rhombus einen Kreis zu construiren. Hier widersprechen sich die beiden Bedingungen »das Viereck soll ein Rhombus sein« und »das Viereck soll in einem Kreise liegen.«

Der Widerspruch braucht aber nicht immer so offen da zu liegen.



In dem folgenden Beispiele erkennt man ihn erst bei der Analysis.

Aufgabe. In das gegebene rechtwinklige Dreieck ABC ein Rechteck BDEF so einzuzeichnen, daß es mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Dreiecken ADE und EFC wird.

Analys. Nach der Aufgabe soll sich verhalten:

$$\tfrac{1}{2}AD.DE : DE.EF = DE.EF : \tfrac{1}{2}EF.FC.$$

Hebt man die homologen Glieder, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}AD : DE = EF : \tfrac{1}{2}FC \text{ oder}$$
$$AD : DE = EF : \tfrac{1}{4}FC.$$

Jetzt erkennt man den Widerspruch; denn die $\Delta\,\Delta$ ADE und EFC sind ähnlich; folglich verhält sich AD : DE = EF : FC; also steht die Bedingung »das Rechteck soll mittlere geometrische Proportionale zwischen den Dreiecken sein« im Widerspruch mit der auch in der Aufgabe liegenden Bedingung »DE soll parallel BC, und EF soll parallel AB sein.«

§. 172.
Die Determination.

Wenn eine Aufgabe vermöge der Anzahl und der Art ihrer Bedingungen auch eine völlig bestimmte ist, die Auflösung auch gefunden, so ist hierdurch die Ausführung der Construction doch noch nicht gesichert, weil in der Regel die zu zeichnende Figur bestimmte Anforderungen an die Bedingungen der Aufgabe in Bezug auf ihr gegenseitiges Verhältniß macht, namentlich in Bezug auf die gegenseitige Größe und Lage gegebener Stücke, welche Anforderungen erfüllt sein müssen, wenn überhaupt die Construction der geforderten Figur möglich sein soll. Die Untersuchung und Angabe des Verhältnisses, in welchem die gegebenen Stücke zu einander stehen müssen, damit die Construction ausführbar sei, heißt die Determination der Aufgabe.

Ein sehr einfaches Beispiel hierzu bietet die Aufgabe: ein Dreieck aus seinen drei Seiten a, b, c zu construiren. Die Aufgabe ist eine bestimmte, die Construction bekannt; und doch ist diese Construction nicht immer ausführbar. Denn in jedem Dreieck muß die Summe zweier Seiten größer als die dritte sein; folglich läßt sich aus a, b, c nur dann ein Dreieck zusammensetzen, wenn $a + b > c$, zugleich $a + c > b$ und auch $b + c > a$ ist. Diese drei Ungleichungen bilden also die Determination der vorliegenden Aufgabe.

Eine Determination kommt aber keineswegs den bestimmten Aufgaben ausschließlich zu; sie kann vielmehr bei bestimmten und unbestimmten Aufgaben (selbst wenn letztere unbeschränkt sind) Statt finden, und auch nicht. So haben z. B. folgende bestimmte Aufgaben keine Determination: ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten a und b zu construiren; einen Kreisbogen zu halbiren; einen Kreis durch einen concentrischen in zwei Theile nach dem Verhältniß n : m zu theilen; einen Kreis zu zeichnen, welcher der Summe zweier gegebenen Kreise gleich ist, in ein Dreieck einen Kreis zu construiren, u. s. w. Hingegen haben folgende unbestimmte Aufgaben eine Determination:

Aufg. 1. (unbeschr. unbestimmt). Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten sich zu einander verhalten, wie n : m : p.

Determination. $n + m > p$, $n + p > m$, $m + p > n$.

Aufg. 2. (beschr. unbestimmt). Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Richtungen L, L', L" berührt.

Determ. Es darf nicht L $\ddagger$ L' $\ddagger$ L" sein.

Aufg. 3. (unbeschr. unbestimmt). Ein Dreieck aus seinem Umfange s und einer Höhe h zu construiren.

Determ. Aus der in §. 171. Nr. 4. angegebenen Analysis dieser Aufgabe ergiebt sich, daß NM den Halbkreis über PQ schneiden muß. Hieraus folgt die Determination: $h < \frac{1}{2}s$. Zu demselben Resultat gelangt man auch durch folgende Betrachtung: Ist a eine Seite des Dreiecks, aber nicht die zu h gehörige Grundlinie, so ist $h < a$. Weil aber $a < \frac{1}{2}s$ sein muß, so folgt $h < \frac{1}{2}s$.

Gewöhnlich wünscht man die Determination in der Form von Gleichungen und Ungleichungen zwischen den gegebenen Stücken der Figur zu haben. Dies gelingt aber nicht immer, weil hierzu häufig Lehren späterer Theile der Geometrie gehören; man muß sich dann darauf beschränken, die Determination in Worten anzugeben.

In manchen Fällen erkennt man die Determination unmittelbar aus der Aufgabe, in andern aber erst aus der Analysis und Construction. Einzelne Aufgaben sind je nach dem Verhältniß, in welchem die gegebenen Bedingungen zu einander stehen, bestimmte, oder (beschränkt und auch unbeschränkt) unbestimmte; auch diese Untersuchung pflegt man bei der Determination in Betracht zu ziehen (vergl. das folgende Beisp. 2.).

Beispiel 1. Durch einen innerhalb eines Kreises um M gegebenen Punkt P eine Sehne von gegebener Länge a zu legen.

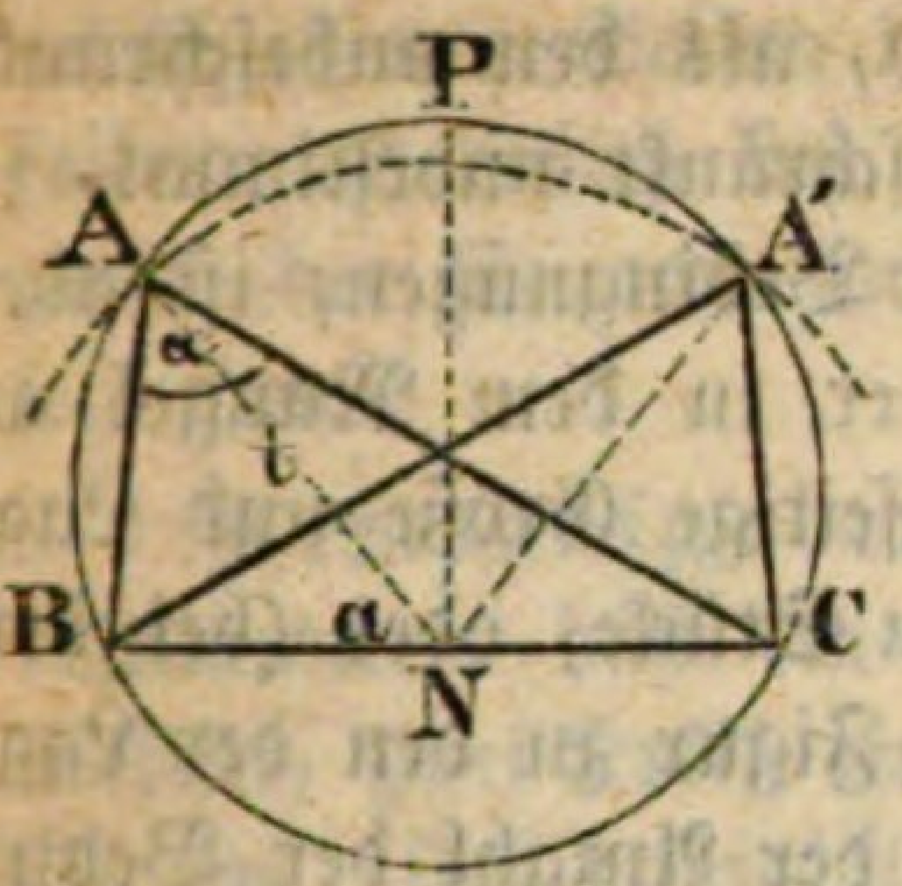
Determ. Es kann offenbar a nicht größer als die größte und nicht kleiner als die kleinste Sehne sein, welche durch P geht. Die größte Sehne ist, wenn r den Radius des Kreises bezeichnet, gleich 2r; die kleinste steht auf MP senkrecht und ist, wenn MP = p gesetzt wird, nach dem Pythagoreischen Lehrsatz $= 2\sqrt{r^2 - p^2}$. Die Determination ist daher:

$$a < 2r \quad \text{und zugleich} \quad a > 2\sqrt{r^2 - p^2};$$

oder es kann auch a einem dieser beiden Grenzwerthe gleich sein. (Die Analysis in §. 174. IV.)

Beispiel 2. Zur Construction eines Dreiecks sei gegeben: eine Seite = a, der gegenüberliegende Winkel α und die Transversale t vom Mittelpunkte der Seite a nach der gegenüberliegenden Ecke.

Analysis. $\triangle ABC$ sei das verlangte, $BC = a$, $\measuredangle A = \alpha$ und $AN = t$. Denkt man sich die Seite BC festgelegt, und schlägt man über BC einen Kreisbogen, welcher α als Peripheriewinkel faßt: so muß A in diesem Bogen

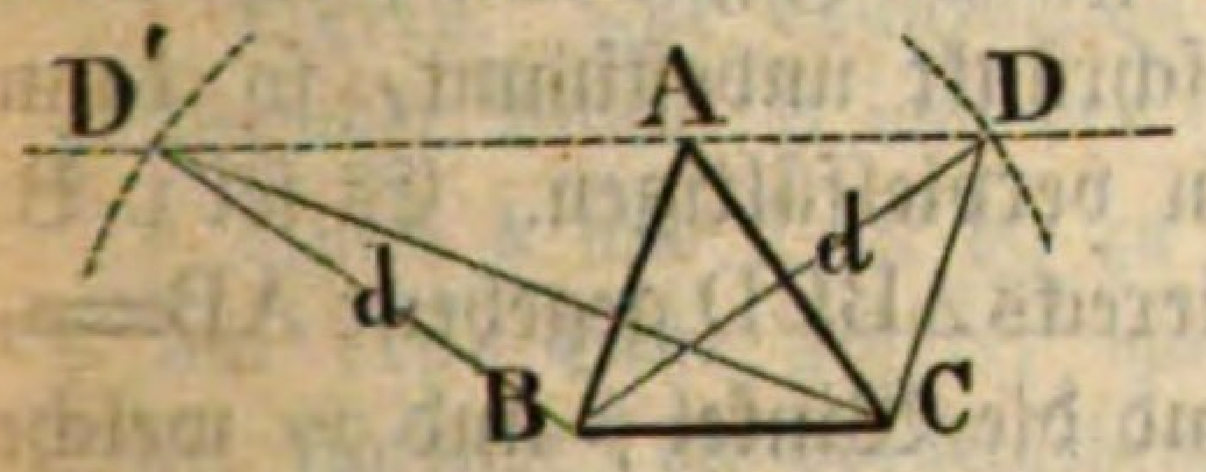


liegen. Schlägt man nun noch um N als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius t, so muß auch A in der Peripherie dieses Kreises liegen; folglich muß der Durchschnittspunkt beider Kreise A sein. Es giebt also im Allgemeinen zwei Dreiecke der verlangten Art, $\triangle ABC$ und $\triangle A'BC$, deren Congruenz sich leicht beweisen läßt ($AA' \mathrel{+\!\!\!=} BC$). In dem Falle, wenn der Kreis um N den Kreis um das $\triangle ABC$ berührt (in P), würde die Construction nur ein Dreieck liefern. Haben aber beide Kreise keinen Punkt gemein, so existirt auch kein Dreieck der verlangten Art.

Determ. 1) Wenn α spitz ist, muß $t > \frac{a}{2}$ und zugleich $t \leqq NP$ sein. 2) Wenn α stumpf ist, muß $t < \frac{a}{2}$ und zugleich $t \geqq NP$ sein. 3) Ist α ein rechter Winkel, so hat die Aufgabe nur dann eine Auflösung, wenn $t = \frac{a}{2}$ ist; die Aufgabe ist aber in diesem Falle eine unbeschränkt unbestimmte. (NP läßt sich durch a und α nur trigonometrisch ausdrücken: $NP = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$).

Beispiel 3. Ein $\triangle ABC$ mit Beibehaltung der Seite BC so in ein anderes Dreieck zu verwandeln, daß eine gegebene Linie d eine zweite Seite dieses Dreiecks wird.

Analysis. Jede Verwandlungs-Aufgabe setzt voraus, daß der Inhalt der zu verwandelnden Figur unverändert bleiben soll. Es sei nun $\triangle DBC$ das verlangte, und $DB = d$, so müssen die $\triangle\triangle ABC$ und DBC, weil sie gleichen



Inhalt und dieselbe Grundlinie haben, zwischen denselben Parallelen liegen, d. h. es muß $AD \mathrel{+\!\!\!=} BC$ sein. Weil nun die Länge $BD = d$ gegeben ist, so muß D der Punkt sein, in welchem der Kreis um B mit dem Radius d die durch A mit BC parallel gelegte Linie AD schneidet. Im Allgemeinen giebt es sonach zwei Auflösungen ($\triangle DBC$ und $\triangle D'BC$), und die Aufgabe ist eine beschränkt unbestimmte.

Determ. Bezeichnet h die Höhe des $\triangle ABC$ auf der Grundlinie BC, so muß $d \geqq h$ sein.

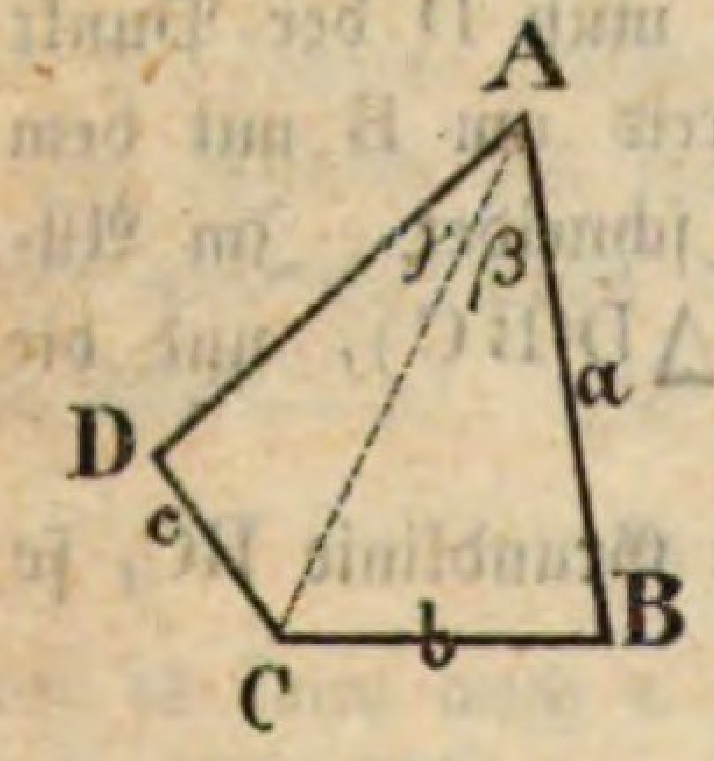
§. 173.

Die Untersuchung, ob eine Aufgabe eine bestimmte, oder unbestimmte ist, gehört nicht immer zu den leichten; namentlich läßt sich häufig erst durch die Analysis darüber entscheiden, ob eine Aufgabe bestimmt, oder beschränkt unbestimmt ist. Die unbeschränkt unbestimmten Aufgaben sind in der Regel leichter zu erkennen; denn zwischen ihnen und den beschränkt unbestimmten Aufgaben findet ein wesentlicher Unterschied Statt, aus dem man erkennt, daß die letzteren

Aufgaben den bestimmten näher verwandt sind, als den unbeschränkt unbestimmten. Ist nämlich eine Aufgabe unbeschränkt unbestimmt, so liegt der Grund in der zu geringen Anzahl der Bedingungen; ist aber die Aufgabe beschränkt unbestimmt, so liegt er in dem Mangel an Nebenbedingungen, welche sich auf die gegenseitige Größe und Lage der unmittelbar oder auch mittelbar gegebenen Stücke, oder (bei örtlichen Aufgaben) auf die Lage der geforderten Figur zu den der Lage nach gegebenen Stücken beziehen, und nicht in der Anzahl der Bedingungen. Um dies zu erkennen, muß man auf die einfachsten Figuren zurückgehen.

Die geradlinigen Figuren führen auf das Dreieck zurück, zu dessen Bestimmung drei von einander unabhängige Stücke nöthig sind, wenn zunächst Seiten und Winkel als Stücke gelten.

In einem Falle aber kann die Aufgabe »ein Dreieck aus drei Stücken zu construiren« eine beschränkt unbestimmte sein, wenn nämlich zwei Seiten a und b und der a gegenüberliegende $\angle\alpha$ gegeben sind. Der Grund liegt aber nicht in der zu geringen Anzahl gegebener Stücke, sondern in dem Mangel der Nebenbedingung $a \geqq b$. — Gehen wir zu den mehrseitigen Figuren über, so können wir solche durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen. Bestimmen nun die gegebenen Stücke die einzelnen Dreiecke, so können wir diese zeichnen und aus ihnen die ganze Figur zusammensetzen. Ist aber die Construction eines dieser Dreiecke aus dem oben angegebenen Grunde eine beschränkt unbestimmte Aufgabe, so kann auch die Construction der ganzen Figur eine solche sein, und sind gar mehrere dieser Dreiecke beschränkt unbestimmt, so kann sich hierdurch die Anzahl der Auflösungen vervielfältigen. Es sei z. B. zur Construction des Vierecks ABCD gegeben: AB = a, BC = b, CD = c und die Winkel β und γ, welche die Diagonale AC mit den Seiten AB und AD bildet. Ist hierbei $a > b$ gegeben, so giebt es zwei Dreiecke ABC, und ergiebt sich noch $AC > c$, so giebt es auch zwei Dreiecke ACD; folglich existiren dann 4 Vierecke ABCD mit den gegebenen Stücken.



Wir haben hierbei nur solche Nebenbedingungen in Betracht genommen, welche sich auf die gegenseitige Größe der gegebenen Stücke beziehen; sie können sich aber auch auf die Lage der unmittelbar oder mittelbar gegebenen Stücke beziehen. Sind z. B. zur Construction eines Vierecks die 4 Seiten und eine Diagonale gegeben, so ist jedes der beiden Dreiecke, in welche die Diagonale das Viereck zerlegt, völlig bestimmt; und doch kann die Aufgabe zwei Auflösungen haben, weil eine Nebenbedingung darüber fehlt, ob die Dreiecke auf

verschiedenen Seiten der Diagonale, oder auf derselben Seite liegen sollen. Aehnlich bei der vorhergehenden Aufgabe, bei welcher ∠A gleich der Summe und auch gleich der Differenz der Winkel β und γ sein kann.

Kreisaufgaben werden hauptsächlich dadurch zu beschränkt unbestimmten, daß ein Kreis eine gerade Linie auf jeder ihrer beiden Seiten, zwei Kreise einander aber von innen und von außen berühren können. Fehlt hierüber eine Bestimmung, so giebt es in der Regel mehr als eine Auflösung.

Ueber die Frage, ob eine Aufgabe bestimmt, oder beschränkt unbestimmt ist, kann in den meisten Fällen am bequemsten bei der Analysis und Construction entschieden werden; doch sei der Leser auf folgende Methoden aufmerksam gemacht, welche nur zum Theil mit der Analysis zusammenhängen und in manchen Fällen über die vorliegende Frage schnell entscheiden:

1) Man suche die Congruenz aller Figuren zu beweisen, welche die gegebenen Stücke enthalten.

Beisp. Zur Construction eines Dreiecks sei gegeben: eine Seite a, ein anliegender Winkel β und die zu a gehörige Höhe h.

Die Congruenz ergiebt sich leicht durch Decken; die Aufgabe ist eine *bestimmte*.

2) Man substituire ein durch die gegebenen Stücke mitgegebenes Stück an die Stelle eines gegebenen.

Beisp. Zur Construction eines Dreiecks sei gegeben: eine Seite a, ein anliegender Winkel β und der Inhalt F.

Durch a und F ist die zu a gehörige Höhe h mitgegeben, weil zu a und F nur *eine* Höhe gehört; man kann also a, β und h als gegeben ansehen. Diese Aufgabe (die vorhergehende) ist eine *bestimmte*, folglich auch die vorliegende.

3) Man untersuche, ob die einzelnen Theile der zu construirenden Figur bestimmt sind; ist dies der Fall, so ist die Aufgabe eine bestimmte, oder beschränkt unbestimmte, je nachdem das Zusammensetzen der ganzen Figur aus diesen Theilen nur auf eine Art geschehen kann, oder auf mehrere.

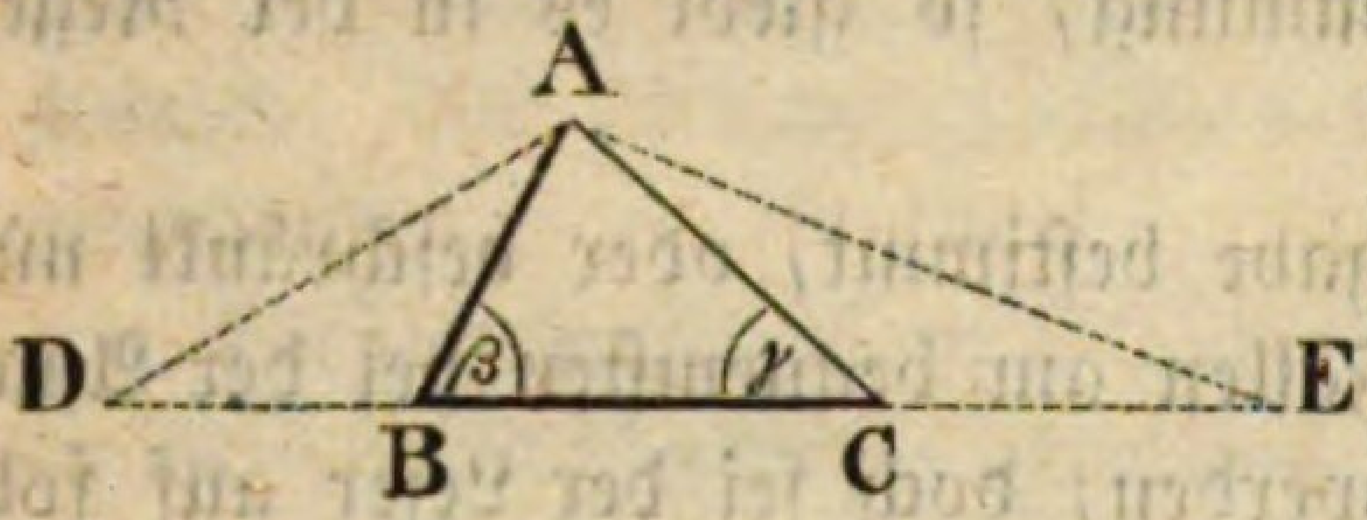
Beisp. Zur Construction eines Dreiecks sei gegeben: eine Höhe h und die Winkel β und γ, welche der zugehörigen Grundlinie anliegen.

Die beiden Dreiecke, in welche h das gesuchte Dreieck zerlegt, sind einzeln bestimmt (aus einer Seite und 2 Winkeln); das Zusammensetzen kann nur auf eine Weise geschehen; denn sind β und γ spitz, so müssen die beiden Dreiecke auf verschiedenen Seiten von h liegen, ist der eine Winkel stumpf: auf derselben Seite. Die Aufgabe ist eine *bestimmte*.

4) Man suche durch eine zweckmäßige Hülfsconstruction die Aufgabe auf eine andere zurückzuführen, in welcher die gegebenen Stücke Seiten, Diagonalen und Winkel, welche von ihnen gebildet sind, werden.

Beisp. Zur Construction eines Dreiecks ABC sei der Umfang gegeben, und zwei Winkel $\measuredangle B = \beta$ und $\measuredangle C = \gamma$.

Verlängert man BC über B und C hinaus, macht BD = BA und CE = CA, zieht endlich noch AD und AE: so kennt man im $\triangle$ADE eine Seite (DE) und die beiden anliegenden Winkel. Dieses Dreieck ist bestimmt, und aus ihm folgt nur ein Dreieck ABC; daher ist auch die gegebene Aufgabe eine bestimmte.



Betrachten wir jetzt die bestimmten Aufgaben (mit Einschluß der beschränkt unbestimmten) im Gegensatz zu den unbeschränkt unbestimmten Aufgaben, so fragt es sich: wie groß muß die Anzahl der Bedingungen sein, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen?

Bei geradlinigen Figuren geht man zunächst davon aus, daß zu einem n-Eck 2n — 3 bestimmende Stücke gehören (§. 39.), also zu einem Dreieck 3, zu einem Viereck 5, zu einem Fünfeck 7, u. s. w. Bei Herleitung dieser Formel wurden aber nur Seiten, Diagonalen, welche sich nicht schneiden, und Winkel, welche von ihnen gebildet werden, als bestimmende Stücke gerechnet. Die Beantwortung der vorliegenden Frage wird aber häufig dadurch eine schwierige, daß noch ganz andere Stücke gegeben sein können, z. B. Inhalte, Summen und Differenzen von Seiten und Winkeln, Umfänge, Höhen, Transversalen, Verhältnisse von Linien und Winkeln u. s. w.; ferner bei örtlichen Aufgaben: Punkte, Richtungen, in welchen gewisse Ecken der Figur liegen oder mit denen Seiten parallel werden sollen, berührende Kreise, umschriebene Kreise u. s. w.

Was die Kreisaufgaben betrifft, so geht man davon aus, daß der Kreis seiner Größe nach durch den Radius, seiner Lage nach durch den Mittelpunkt, seiner Größe und Lage nach durch den Radius und Mittelpunkt gegeben ist. Hieran schließt sich an: der Kreis ist seiner Größe und Lage nach gegeben durch den Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie, oder durch den Mittelpunkt und eine Tangente; ferner durch 3 Punkte der Peripherie; durch 3 Tangenten (beschränkt unbestimmt); durch den Radius und 2 Punkte der Peripherie (beschr. unbest.); durch 2 Punkte der Peripherie und eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade; durch den Radius, eine Tangente und den

Berührungspunkt in derselben (beschr. unbest.). Dies sind die einfachsten Fälle; auf sie oder auf die Construction geradliniger Figuren suche man Kreisaufgaben zurückzuführen.

Anmerk. Zuweilen wendet man bei der Untersuchung über die Bedingungen einer Aufgabe folgendes Verfahren an: Man betrachtet ein Dreieck, Viereck u. s. w., in welchem Linien gegeben sind, welche weder Seiten noch Diagonalen sind, als ein Polygon von mehr als resp. 3, 4 u. s. w. Ecken, so daß jene Linien Seiten oder Diagonalen dieses Polygons werden, und man untersucht dann, ob die Anzahl der gegebenen Stücke zur Bestimmung dieses Polygons hinreicht. — Es ist klar, daß man z. B. jedes Dreieck als ein Viereck betrachten kann, in welchem ein Umfangswinkel = 2R ist; als zugehörige Ecke kann ein beliebiger Punkt einer Seite genommen werden. — Eine sichere Entscheidung giebt dies Verfahren aber im Allgemeinen nicht.

Beisp. Zur Construction eines Dreiecks sind die 3 Höhen h, i und k gegeben.

Betrachten wir das Dreieck als Sechseck, indem wir die Fußpunkte der Höhen zu Ecken machen, so brauchen wir 2.6 — 3 = 9 bestimmende Stücke. Es sind aber 9 Stücke gegeben: die 3 Diagonalen h, i, k und 6 rechte Winkel, welche von diesen Diagonalen mit den Seiten gebildet werden.

Im Grunde genommen ist aber hierdurch wenig gewonnen, wenigstens nicht mehr, als die Wahrscheinlichkeit, daß die Aufgabe keine unbeschränkt unbestimmte sein wird; denn die Diagonalen des Sechsecks h, i, k schneiden sich, was bei Herleitung der Anzahl der bestimmenden Stücke eines n-Ecks nicht angenommen wurde. — Vollkommen streng kann über die vorliegende Aufgabe nach Nr. 1. entschieden werden. Bezeichnen x, y, z die zu den Höhen h, i, k gehörigen Grundlinien, so ist der doppelte Inhalt des Dreiecks = xh = yi = zk. Hieraus folgt, wenn man durch hik dividirt:

$$\frac{x}{ik} = \frac{y}{hk} = \frac{z}{hi} \quad \text{oder} \quad x:y:z = ik:hk:hi.$$

Haben also zwei Dreiecke dieselben drei Höhen, so sind diese Dreiecke zunächst ähnlich (§. 83. II.); folglich haben sie gleiche Winkel. Die Congruenz beider Dreicke ist nun durch Decken leicht zu beweisen; die Aufgabe ist eine bestimmte.

§. 174.

Die Methoden der geometrischen Analysis.

Um den Zusammenhang unbekannter Stücke einer Figur mit den gegebenen, bekannten zu finden (§. 169.), hat man die nachfolgenden vier Methoden. In den meisten Fällen gelingt aber die Analysis nur durch gleichzeitige Anwendung zweier oder mehrerer dieser Methoden; man spricht daher noch von einer gemischten Analysis. Außer den Methoden der geometrischen Analysis wendet man noch zur Auflösung der Constructions-Aufgaben die Algebra an; die algebraische Analysis folgt im nächsten Kapitel.

I. Analysis durch Gesetze.

Man braucht freilich zu jeder Analysis die Gesetze der Geometrie; in manchen Fällen ist aber ein Lehrsatz so entscheidend (oder auch mehrere sind es), daß durch ihn unmittelbar der Zusammenhang zwischen gegebenen und unbekannten Stücken construirbar wird. In einem solchen Falle kommt es also nur darauf an, daß man diesen Lehrsatz kennt und sich seiner erinnert, um sogleich die Construction ausführen zu können; man sagt dann, die Analysis sei durch Gesetze geführt.

Beisp. 1. Zur Construction eines Rhombus sind die beiden Diagonalen gegeben.

Analys. Die Diagonalen eines Rhombus halbiren sich und stehen auf einander senkrecht.

Beisp. 2. Zur Construction eines Dreiecks sind die Fußpunkte E, F, G seiner drei Höhen gegeben.

Analys. Die Höhen halbiren die Winkel des Dreiecks EFG (§. 145.).

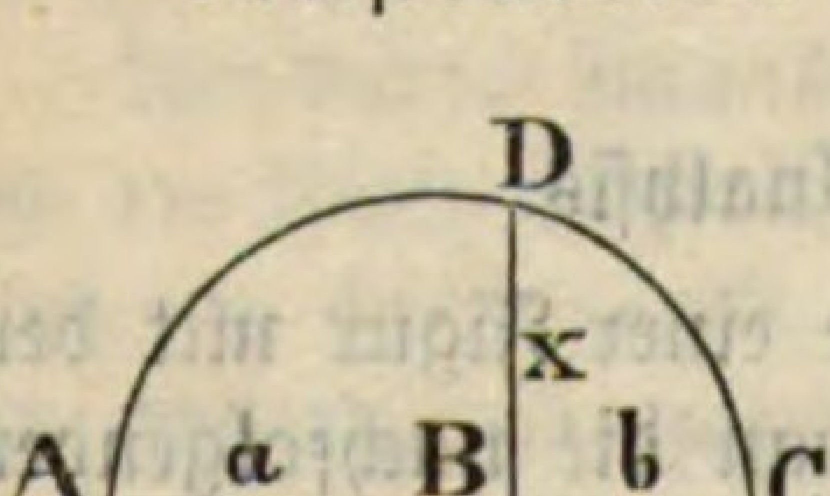
Beisp. 3. Zwei sich schneidende Kreise um ihre gegebenen Mittelpunkte M und N zu construiren, so daß ihre gemeinschaftliche Sehne die gegebene Länge a erhält.

Analys. Die gemeinschaftliche Sehne wird durch MN senkrecht geschnitten und halbirt. — Die Aufgabe ist eine unbeschränkt unbestimmte.

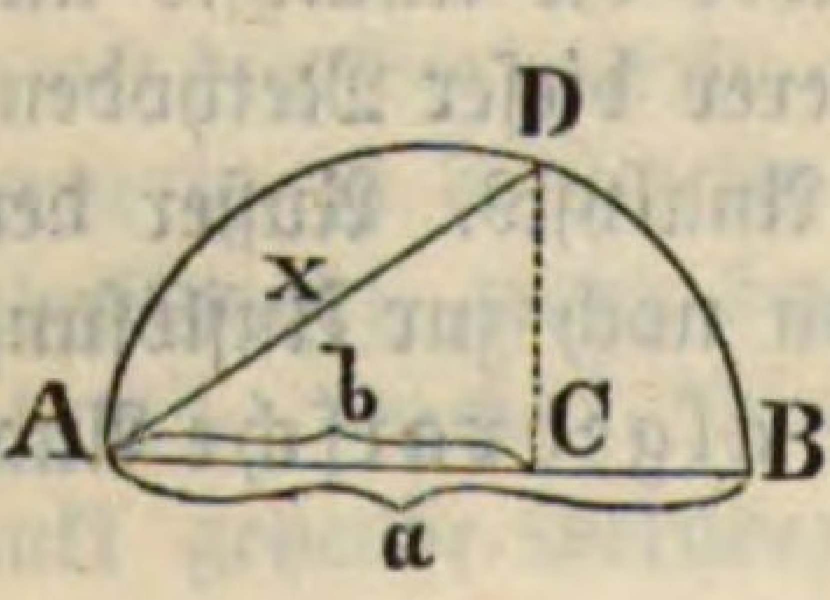
Beisp. 4. Zu zwei gegebenen Linien a und b die mittlere geometrische Proportionale zu construiren, d. h. eine solche Linie x zu construiren, daß sich verhält $a : x = x : b$.

Analys. Das Loth im Halbkreise ist mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers; oder: die Sehne im Halbkreise ist mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Durchmesser und ihrer Projection auf den Durchmesser.

Construction 1. Man mache $AB = a$, verlängere AB um $BC = b$, schlage über die Summe $AC = a + b$ einen Halbkreis und errichte im gemeinschaftlichen Endpunkt von a und b senkrecht auf AC die BD, welche die Peripherie in D trifft: so ist $BD = x$.



Construction 2. Man schlage über die größere beider Linien, etwa über $AB = a$, einen Halbkreis, trage $AC = b$ auf AB ab, errichte $CD \perp AB$ und ziehe die Sehne AD: so ist $AD = x$.

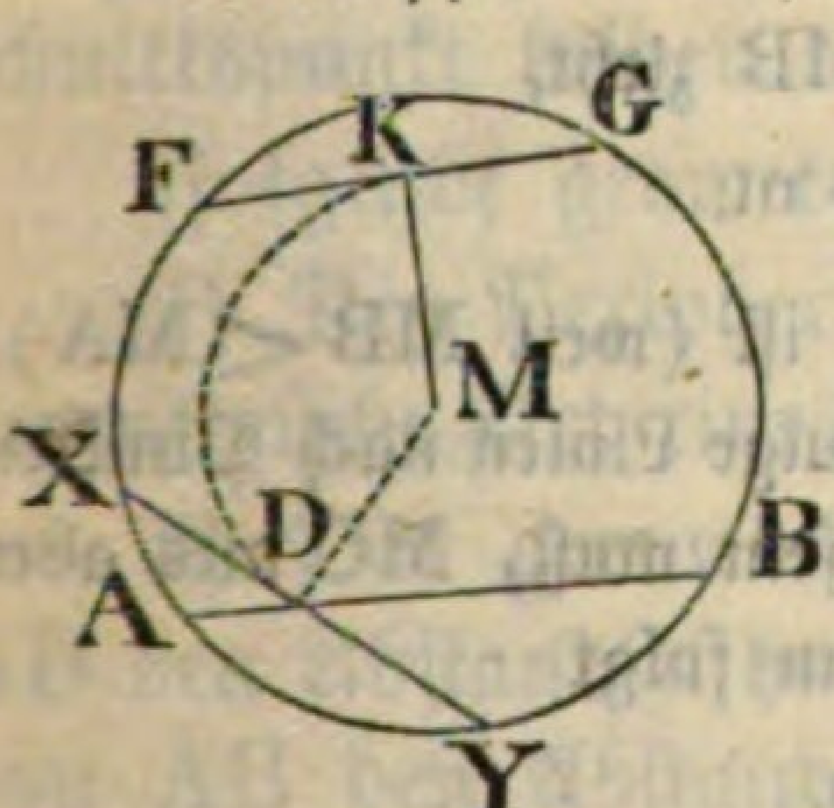


II. Analysis durch Data.

Unter einem Datum versteht man nicht ein gegebenes Stück, sondern ein durch die gegebenen Stücke mitgegebenes Stück, d. h. ein Stück, welches sich aus den gegebenen unmittelbar construiren und sonach bei der Analysis als ein bekanntes Stück betrachten und benutzen läßt. In der Benutzung solcher Data besteht die Analysis durch Data. Ist z. B. in einem gegebenen Kreise eine Sehne bekannt, so ist ihr Abstand vom Mittelpunkt ein Datum; bezeichnet a eine Seite eines Dreiecks, α den gegenüberliegenden Winkel und r den Radius des umschriebenen Kreises, so ist von den 3 Stücken a, α und r jedes ein Datum, wenn die beiden andern gegeben sind; ist ein Winkel α gegeben, so sind $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}$ Data, aber $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\alpha}{5}$, $\frac{\alpha}{6}$ nicht. Einzelne Winkel sind absolute Data, d. h. sie können bei jeder Aufgabe als gegeben betrachtet werden, z. B. ein Winkel von 90°, 45°, 60°, 30°.

Beispiel 1. In den Kreis um M eine Linie von gegebener Länge a so als Sehne einzutragen, daß sie durch die gegebene Sehne AB halbirt wird.

Analys. XY sei die Sehne von der Länge a in der verlangten Lage, also XD = YD. Zieht man MD, so ist MD ein Datum, weil man a an beliebiger Stelle als Sehne in den Kreis eintragen und von M auf sie eine Senkrechte fällen kann. D wird nun gefunden, wenn man um M mit MD einen Bogen schlägt; der Durchschnittspunkt dieses Bogens mit AB ist D.



Construct. Man trage die Linie a an beliebiger Stelle als Sehne in den Kreis um M ein; FG sei = a. Man fälle nun MK ⊥ FG, schlage mit MK um M einen Kreisbogen, welcher AB in D schneiden mag, und ziehe durch D eine auf MD senkrechte Sehne XY: so ist XY die verlangte Sehne von der Länge a. (Zwei Auflösungen.)

Bew. Aus MD ⊥ XY folgt XD = YD; aus MK = MD folgt, weil diese Linien auf den Sehnen FG und XY senkrecht stehen: XY = FG = a.

Beispiel 2. Ein Kreis und eine gerade Linie PQ sind gegeben; man soll eine Linie von der Länge a so zeichnen, daß der eine Endpunkt in die Peripherie, der andere in PQ fällt, die Richtung von a aber durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

Analys. PQ kann den Kreis schneiden, oder auch nicht, und a kann entweder selbst durch den Mittelpunkt gehen, oder die Verlängerung von a.

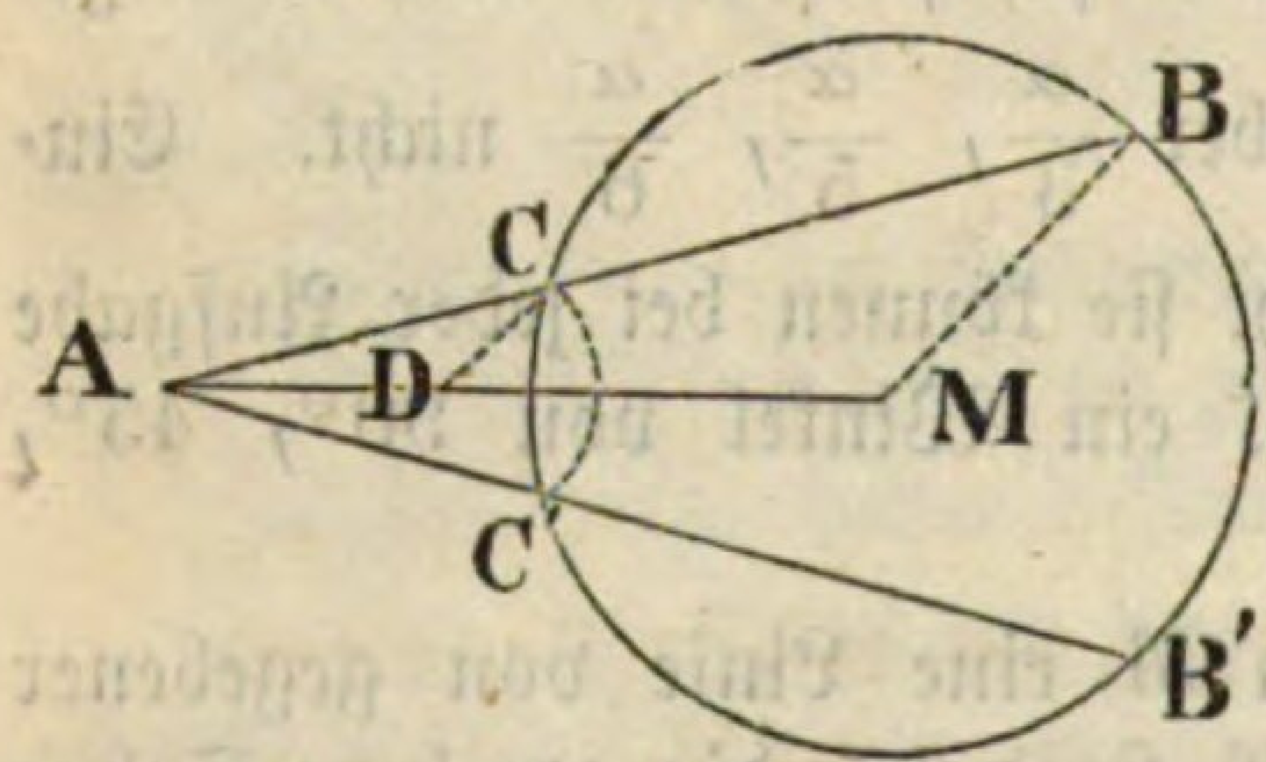
Der Leser möge diese Fälle zeichnen. Der Radius r des Kreises ist ein Datum; folglich sind auch $r+a$, $r-a$ und $a-r$ Data.

Beispiel 3. Von einem Punkte A außerhalb eines Kreises so eine Secante durch den Kreis zu legen, daß der äußere Theil zur Sehne das Verhältniß $n:m$ erhält.

Analys. Der Kreis um M sei der gegebene, AB die gesuchte Secante, so daß sich verhält $AC:CB = n:m$. Zieht man BM und CD ∦ BM, so folgt:

$$AD:AM = AC:AB = n:n+m \quad \text{und}$$
$$CD:BM = AC:AB = n:n+m;$$

folglich ist $AD = \frac{n}{n+m}\cdot AM$ und $CD = \frac{n}{n+m}\cdot BM$. Weil aber AM und BM Data sind, so sind AD und CD ebenfalls Data.



Construct. Zieht man AM und theilt AM von A aus nach dem Verhältniß $n:m$, so hat man den Punkt D. Nun theile man einen beliebigen Radius des Kreises um M ebenfalls nach dem Verhältniß $n:m$ und schlage mit dem der Verhältnißzahl n zugehörigen Theile um D einen Kreis, welcher den Kreis um M in C und C′ schneiden mag. Die von A durch C und C′ gezogenen Secanten AB und AB′ lösen die Aufgabe.

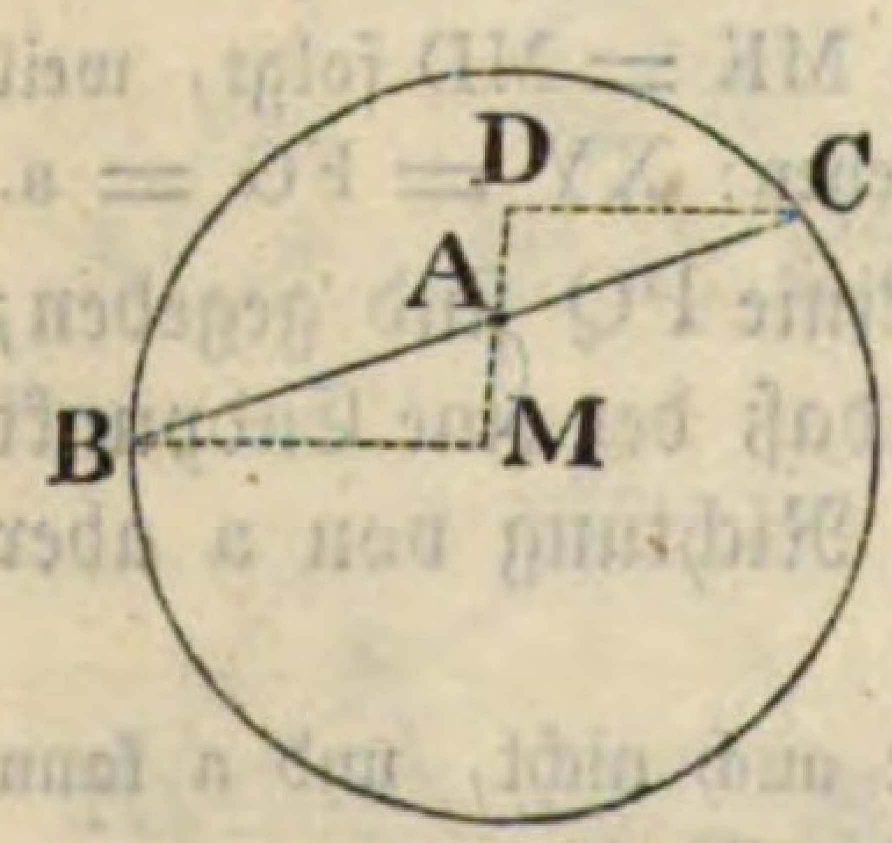
Bew. Aus der Construction folgt, wenn man MB zieht,

$$AD:AM = DC:MB = n:n+m.$$

Hieraus folgt freilich noch nicht, daß MB ∦ DC ist (weil $MB < MA$); da aber $MC = MB$ ist, und von M aus nur zwei gleich lange Linien nach Punkten der AB möglich sind, eine von ihnen mit DC parallel sein muß, MC dies aber nicht sein kann: so muß MB ∦ DC sein (§. 79.). Nun folgt

$$AC:CB = AD:DM = n:m.$$

Beispiel 4. Innerhalb des Kreises um M ist ein Punkt A gegeben; man soll durch A eine Sehne so legen, daß sie in A nach dem Verhältniß $n:m$ getheilt wird.



Analys. BC sei die gesuchte Sehne, so daß sich verhält $BA:AC = n:m$. Man ziehe MB und MA und durch C die CD ∦ MB, bis sie die verlängerte MA in D schneidet, so ist $\triangle ABM \sim \triangle ACD$, woraus folgt: $CD = \frac{m}{n}BM$ und $AD = \frac{m}{n}AM$. Es sind also CD und AD Data, weil BM und AM Data sind. (Die Construction ähnlich wie in der vorigen Aufgabe.)

III. Analysis durch geometrische Oerter.

Im Allgemeinen heißt jede gerade oder krumme Linie, in welcher ein gewissen Bedingungen entsprechender Punkt A liegen muß, ein geometrischer Ort des Punktes A. Im Besonderen aber sagt man auch, A ist ein geometrischer Ort, wenn die für A gegebenen Bedingungen durch eine unendliche Menge stetig auf einander folgender Punkte erfüllt werden, d. h. also durch alle Punkte einer begrenzten oder unbegrenzten geraden oder krummen Linie. Dieser Fall tritt natürlich nur bei unbeschränkt unbestimmten Aufgaben ein; er giebt aber ein einfaches Mittel, geometrische Oerter in die Analysis hineinzuziehen und durch ihre Benutzung die Construction zu finden. Kommt es nämlich bei einer Analysis auf die Construction eines unbekannten Punktes A an, und kann man für A zwei geometrische Oerter finden, so ist A ihr Durchschnittspunkt. Weil nun unbeschränkt unbestimmte Aufgaben zu geometrischen Oertern führen, so sucht man bei der Analysis die Aufgabe durch Fortlassen einer Bedingung zu einer unbeschränkt unbestimmten zu machen, so daß A in einen geometrischen, construirbaren Ort übergeht; und kann man dann durch Hinweglassen einer andern Bedingung, statt der vorher gewählten, nochmals A zu einem geometrischen Ort machen: so ist A der Durchschnittspunkt beider.

Folgende geometrische Oerter kommen am häufigsten vor:

1) Die Peripherie des Kreises um A mit dem Radius a ist der geometrische Ort eines Punktes, der von A den Abstand a haben soll.

2) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von der Linie AB den Abstand a haben soll, ist eine mit AB parallele Linie, welche von AB den Abstand a hat.

3) Der geometrische Ort der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, welches AB zur Grundlinie haben soll, ist die in der Mitte von AB auf AB errichtete Senkrechte.

4) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von den Schenkeln eines Winkels gleichweit entfernt sein soll — oder auch: der geometrische Ort des Mittelpunkts eines Kreises, der beide Schenkel eines Winkels berühren soll — ist die Halbirungslinie des Winkels.

5) Um den geometrischen Ort eines Punktes P zu finden, dessen Abstände von den Schenkeln eines Winkels sich wie n : m verhalten, errichte man an beliebigen Stellen auf jeden Schenkel eine Senkrechte und mache diese Senkrechten so lang, daß sie sich wie n : m verhalten. Legt man nun durch den Endpunkt jeder Senkrechten eine Parallele mit dem

Schenkel, auf dem sie senkrecht steht, verlängert die Parallelen bis sie sich schneiden und verbindet den Durchschnittspunkt mit dem Scheitelpunkt des Winkels: so ist diese Linie ein geometrischer Ort für P. (Aehnliche Vierecke; vergl. §. 92.)

6) Soll über die gegebene Linie BC ein Dreieck construirt werden, in welchem der der Seite BC gegenüberliegende Winkel $= \alpha$ sein soll, so ist der geometrische Ort der unbekannten Ecke A des Dreiecks der Kreisbogen über BC, welcher den Winkel α als Peripheriewinkel faßt; derselbe ist in §. 125. construirt worden.

Beispiel 1. Im ΔABC einen Punkt X so zu bestimmen, daß durch die Linien XA, XB und XC das Dreieck nach gegebenem Verhältniß zerlegt wird; etwa so, daß sich verhält

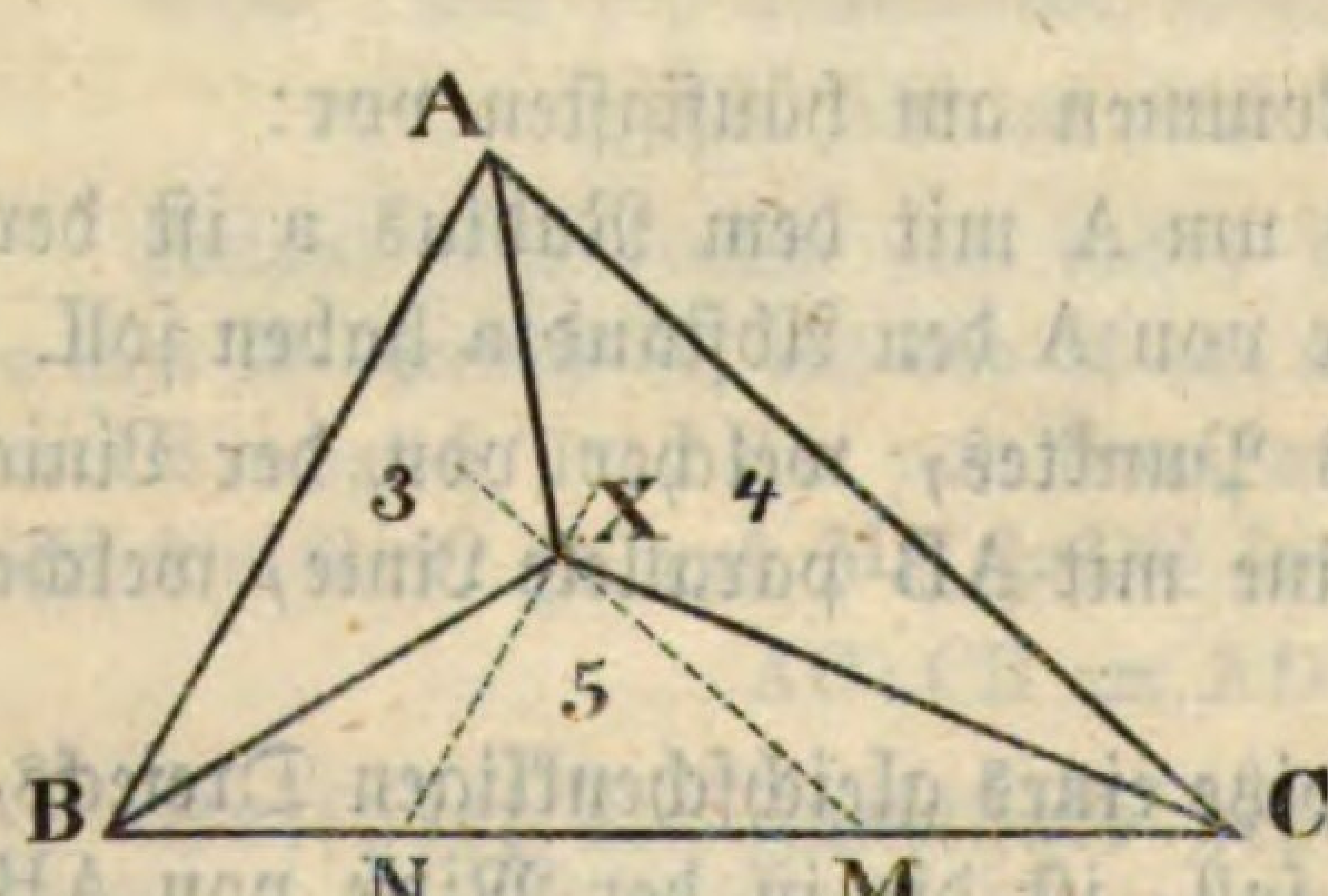
$$\Delta XAB : \Delta XBC : \Delta XCA = 3:5:4.$$

Analys. In der Aufgabe liegen die zwei Bedingungen:

1) $\Delta XAB = \frac{3}{12} \cdot \Delta ABC$ und

2) $\Delta XAC = \frac{4}{12} \cdot \Delta ABC$;

in ihnen ist die Bedingung $\Delta XBC = \frac{5}{12} \cdot \Delta ABC$ schon von selbst enthalten. — Um nun X durch zwei geometrische Oerter zu bestimmen, lassen wir die Bedingung 2) fort; dadurch wird die Aufgabe eine unbeschr. unbestimmte und X ein geometrischer Ort. Dieser Ort ist leicht zu bestimmen. Die $\Delta\Delta$ XAB und CAB haben eine gemeinschaftliche Seite, verhalten sich also wie die zugehörigen Höhen; folglich haben diese Höhen zu einander das Verhältniß 3 : 12, d. h. der Abstand des Punktes X von AB ist gleich $\frac{3}{12}$ der zu AB gehörigen Höhe



des ΔABC. Zieht man nun XN $\#$ AB, so giebt jeder Punkt der Linie XN mit A und B verbunden ein Dreieck, welches gleich $\frac{3}{12} \cdot \Delta ABC$ ist, also ist XN ein geometrischer Ort des Punktes X. Diese Parallele theilt aber die Seite CB so, daß BN gleich $\frac{3}{12}$ BC ist; theilt man also BC in 12 gleiche Theile und zieht durch den 3ten Theilpunkt N (von B aus gerechnet) eine Parallele NX mit AB, so ist diese der eine gesuchte geometrische Ort für X.

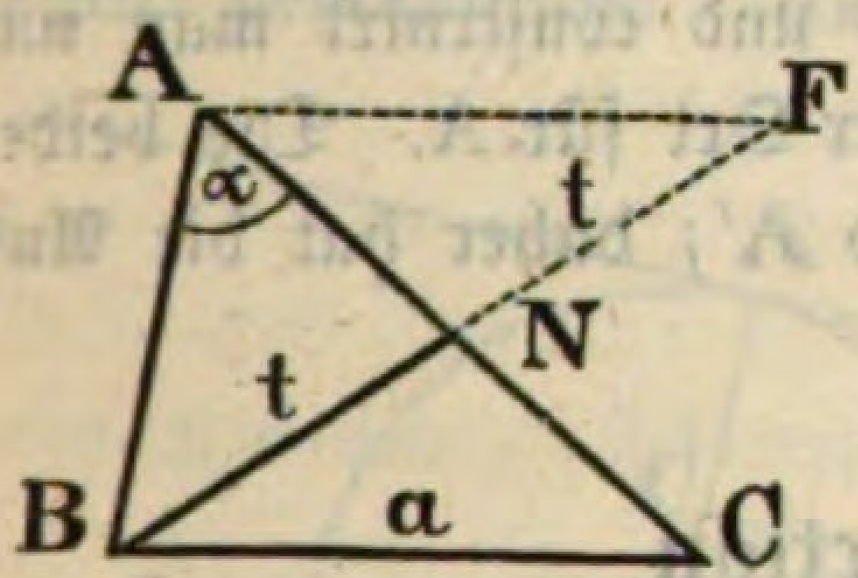
Läßt man nun statt der Bedingung 2) die Bedingung 1) fort, so erhält man ganz auf dieselbe Weise in der durch X mit AC parallel gelegten Linie XM

einen zweiten construirbaren Ort; denn diese Linie theilt BC so, daß $CM = \frac{4}{12} BC$ ist. Man ziehe also durch den 4ten Theilpunkt M der in 12 gleiche Theile getheilten BC (von C aus gerechnet) eine Parallele mit CA, so ist diese der zweite geometrische Ort für X. Der Durchschnittspunkt beider Oerter ist X.

Die Construction verlangt sonach die Theilung der Seite BC nach dem Verhältniß $BN : NM : MC = 3 : 5 : 4$.

Beispiel 2. Zur Construction eines $\triangle ABC$ sei gegeben: $BC = a$, $\measuredangle A = \alpha$ und die Transversale t von B nach dem Mittelpunkte N der Seite AC.

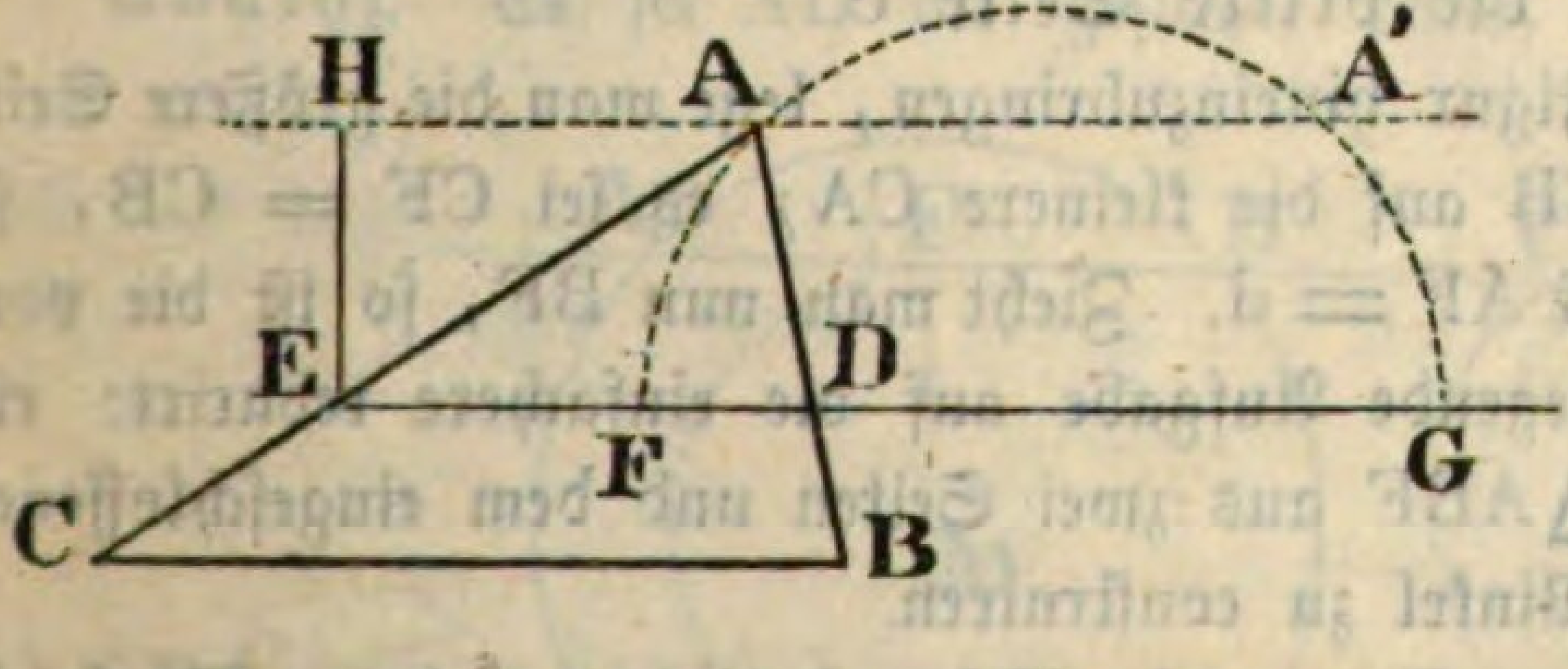
Analys. Verlängert man BN über N um sich selbst bis F und zieht AF, so ist $AF = a$, und man kann nun versuchen, das $\triangle BFA$ zu construiren; aus ihm ist $\triangle ABC$ leicht herzustellen. Denkt man sich $BF = 2t$ festgelegt, so kommt es darauf an, A zu finden. Läßt man die Bedingung $FA = a$ fort, so wird A ein geometrischer Ort, nämlich der Kreisbogen über BN, welcher den $\measuredangle \alpha$ faßt; läßt man aber die Bedingung $\measuredangle BAN = \alpha$ fort, so wird A wieder ein geometrischer Ort: die Peripherie des Kreises um F mit dem Radius a. (Die Aufgabe kann zwei Auflösungen haben, weil zwei Kreise sich in zwei Punkten schneiden; es kommt hier nur darauf an, ob beide Durchschnittspunkte auf derselben Seite von BN liegen.)



Anmerk. Man kann auch $\triangle ABC$ aus dem $\triangle BCN$ construiren. Denkt man sich a festgelegt, so hat man im $\measuredangle \alpha$ ein Mittel, den Kreis um das $\triangle ABC$ zu zeichnen; sein Mittelpunkt sei M. Für N hat man nun zwei geometrische Oerter: die Peripherie des Halbkreises über MC und die Peripherie des Kreises um B mit dem Radius t.

Beispiel 3. Zur Construction eines Dreiecks sind zwei Seiten b und c gegeben, und das Verhältniß der dritten Seite zur zugehörigen Höhe, etwa $a : h = 12 : 7$.

Analys. $\triangle ABC$ sei das verlangte, $AC = b$, $AB = c$, und BC habe zu der von A gefällten Höhe das Verhältniß 12 : 7. Zieht man an beliebiger Stelle DE ∦ BC, so entsteht das $\triangle ADE$; kann man dieses Dreieck construiren, so ist auch $\triangle ABC$ gefunden. Im $\triangle ADE$ kennt man aber die Seite DE (welche, weil sie jede beliebige Länge haben kann, als bekannt zu betrachten ist), die zugehörige Höhe, denn sie ist $= \frac{7}{12} DE$ (weil $\triangle ADE \sim \triangle ABC$), und das Verhältniß $EA : DA = b : c$. Denkt man sich nun DE fest gelegt, so kann man den Punkt A durch zwei geometrische Oerter finden.



Läßt man zu diesem Zwecke die Bedingung EA : DA = b : c fort, so braucht A nur die Bedingung zu erfüllen, daß sein Abstand von DE gleich $\frac{7}{12}$DE ist. Man errichtet also EH ⊥ ED, macht EH = $\frac{7}{12}$ DE und zieht durch H eine Parallele zu ED, so ist sie ein geometrischer Ort für A. Läßt man jetzt aber die Bedingung fort, daß A von DE den Abstand $\frac{7}{12}$ DE haben soll, so muß A die Bedingung EA : DA = b : c erfüllen, und A wird wieder ein geometrischer Ort. Diesen Ort zu construiren lehrt §. 137. Man theilt ED von E aus nach dem Verhältniß b : c in zwei innere und in zwei äußere Abschnitte (vergl. §. 101.), so daß sich verhält:

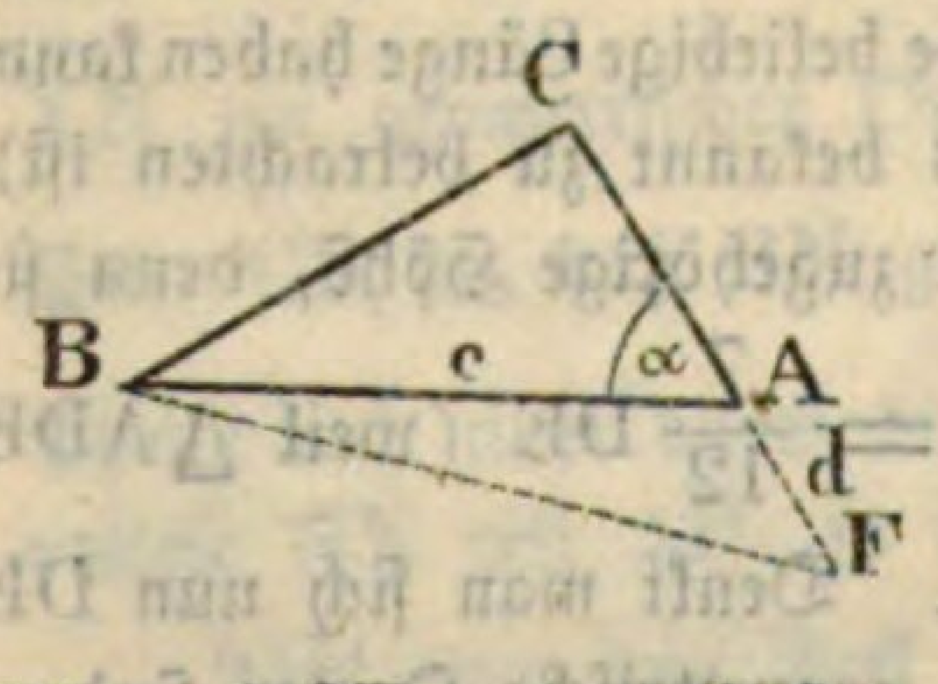
$$EF : DF = EG : DG = b : c.$$

E, D, F und G sind dann vier harmonische Punkte, und construirt man nun über FG einen Halbkreis, so ist dieser ein geometrischer Ort für A. Die beiden geometrischen Oerter schneiden sich zweimal, in A und A′; daher hat die Aufgabe zwei Auflösungen.

IV. Analysis durch Reduction.

Diese Methode, welche besonders häufig in Anwendung kommt, besteht darin, daß man eine Aufgabe so lange umformt (in der Regel durch zweckmäßige Hülfsconstructionen), bis man sie auf eine andere Aufgabe zurückgeführt hat, deren Auflösung entweder schon gefunden, oder doch leichter zu finden ist, als die der gegebenen Aufgabe. Die Aufgabe, auf welche man die gegebene reducirt, muß sonach mit der gegebenen in einem so engen Zusammenhange stehen, daß ihre Auflösung zugleich die Auflösung der gegebenen zur Folge hat. Der Leser wird leicht erkennen, daß diese Methode bei einigen der vorhergehenden Aufgaben schon mehr oder weniger offen angewandt worden ist; so bei der zunächst vorhergehenden, wo die Construction des △ABC auf die Construction des △ADE reducirt wurde.

Beispiel 1. Zur Construction eines △ABC sei gegeben: die Differenz zweier Seiten BC — AC = d, der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel α und die dritte Seite c.



Analys. Um d in die Figur hineinzubringen, lege man die größere Seite CB auf die kleinere CA; es sei CF = CB, so ist AF = d. Zieht man nun BF, so ist die vorliegende Aufgabe auf die einfachere reducirt: ein △ABF aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu construiren.

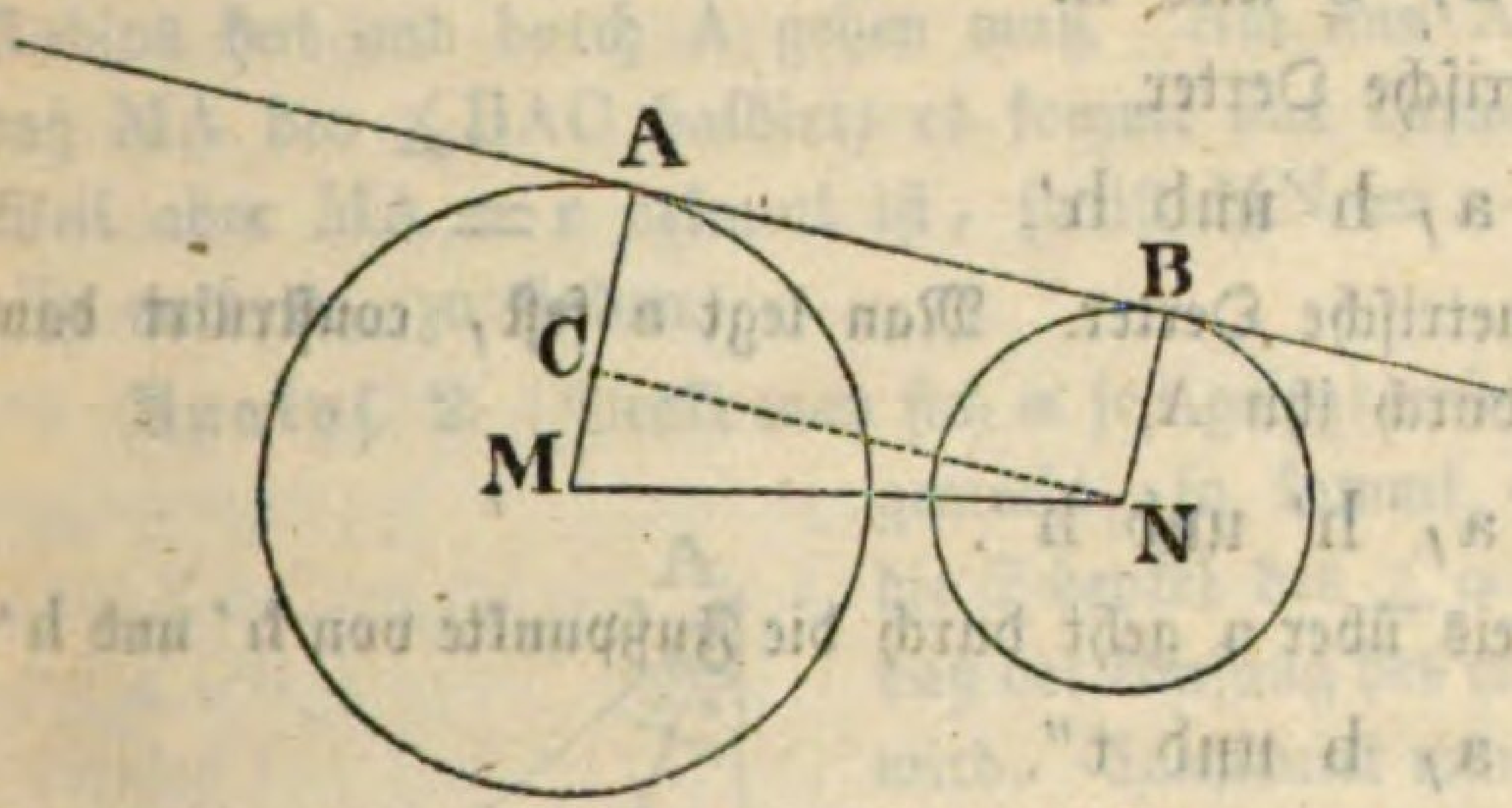
Anmerk. Wäre statt des ∡A der Winkel B gegeben, so würde man, um d zu erzeugen, besser CA auf CB gelegt haben.

Beispiel 2. Es ist ein Kreis um M und innerhalb oder außerhalb desselben ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine Linie legen, von welcher der Kreis eine Sehne von der Länge a abschneidet.

Analys. Denkt man sich von M auf die gesuchte Linie eine Senkrechte MN gefällt, so reducirt sich die vorliegende Aufgabe auf die: $\triangle$PMN zu construiren. In diesem Dreieck kennt man aber MP, MN (Datum) und $\measuredangle$MNP$=$R. – Man kann die Aufgabe auch auf §. 123. Nr. 2. reduciren.

Beispiel 3. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu legen.

Analys. AB sei eine gemeinschaftliche Tangente der Kreise um M und N. Zieht man MN, MA und NB, so ist die vorliegende Aufgabe auf die reducirt: das Viereck MNBA zu construiren, in welchem drei Seiten und zwei rechte Winkel bekannt sind. Um dieses Viereck zu construiren, kann man die Analysis fortsetzen. Zieht man NC $\#$BA, so ist die Aufgabe »das Viereck MNBA zu construiren«, also auch die vorliegende Aufgabe, darauf reducirt: $\triangle$MNC zu construiren. Im $\triangle$MNC kennt man MN, MC gleich der Differenz der beiden Radien ($r-\varrho$) und den rechten Winkel bei C.

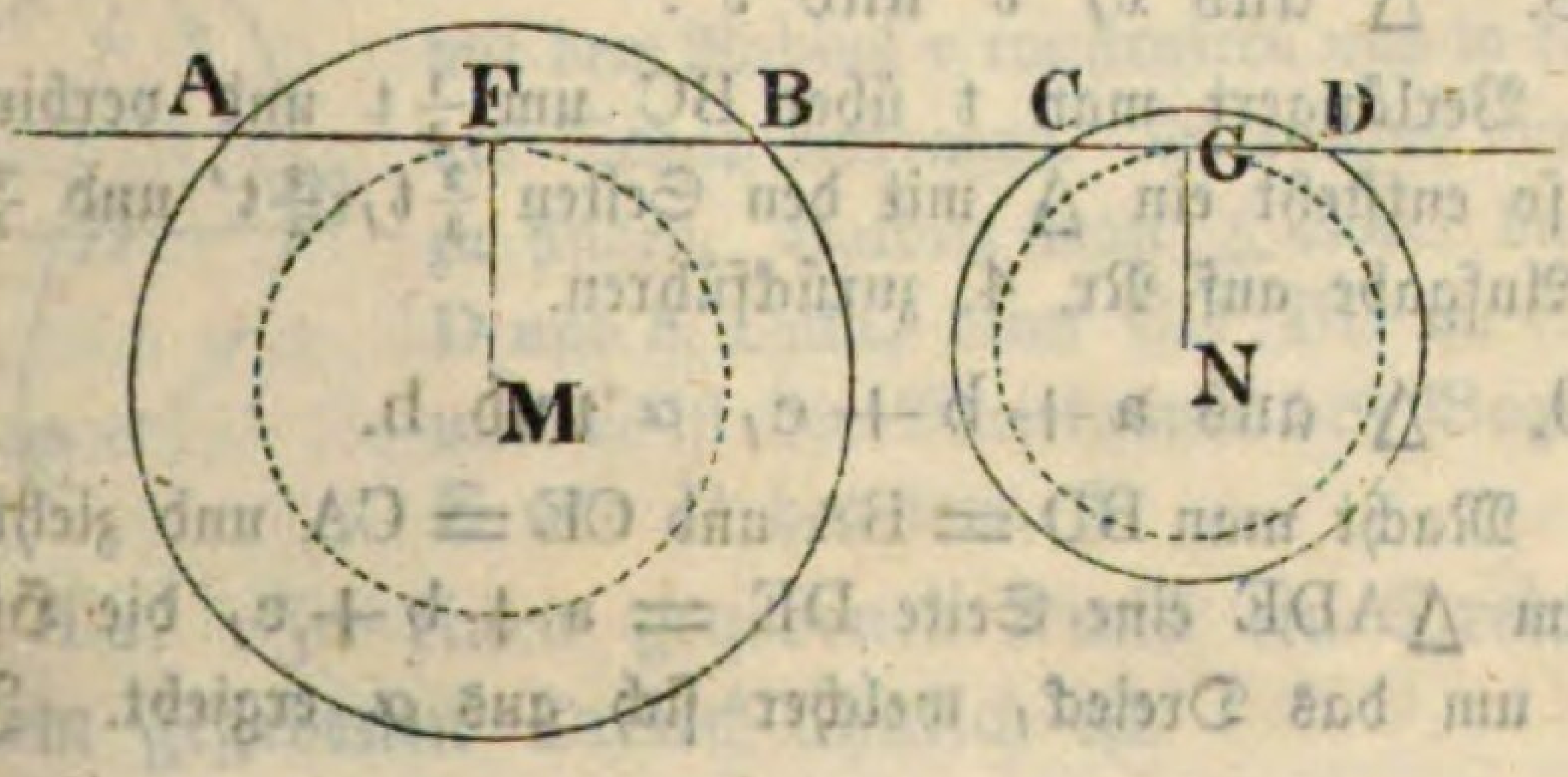


Construct. Man schlägt über MN einen Halbkreis, trägt von M aus $r-\varrho$ als Sehne in den Halbkreis ein und findet so C, u. s. w.

Anmerk. Der Leser möge auch die Analysis zur Construction der gemeinschaftlichen inneren Tangente der obigen Analysis analog führen. Man kommt auch auf ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem aber die bekannte Kathete nicht $r-\varrho$, sondern $r+\varrho$ ist. Eine andere Construction ist schon in §. 140. Nr. 8. angegeben worden.

Beispiel 4. Zwei gegebene Kreise, um M und N, durch eine gerade Linie so zu schneiden, daß die Kreise von dieser Linie Sehnen von gegebener Länge, a und b, abschneiden.

Analys. Es sei AD die gesuchte Linie, AB $=$ a, CD $=$ b. Fällt



man MF ⊥ AB und NG ⊥ CD und schlägt mit MF und NG Kreise um M und N, so sind diese Kreise Data, und die vorliegende Aufgabe ist auf die vorhergehende reducirt. Es giebt 4 Auflösungen.

§. 175.
Dreiecks-Aufgaben.

Vorbemerkung. Ein gesuchtes Dreieck (Δ) bezeichnen wir immer durch ABC, die Winkel bei A, B und C resp. durch α, β und γ, die gegenüberliegenden Seiten durch a, b und c, die zugehörigen Höhen durch h, h′ und h″, die Transversalen von A, B und C nach den Mittelpunkten von a, b und c durch t, t′ und t″, den Radius des umschriebenen Kreises durch r, den des eingeschriebenen durch ϱ.

Aufg. 1. Δ aus a, b und h.

Analys. durch geometrische Oerter.

Aufg. 2. Δ aus a, h und h′.

Analys. Durch geometrische Oerter. Man legt a fest, construirt dann den Fußpunkt von h′ und durch ihn A.

Aufg. 3. Δ aus a, h′ und h″.

Analys. Der Halbkreis über a geht durch die Fußpunkte von h′ und h″.

Aufg. 4. Δ aus a, b und t″.

Analys. (durch Reduction). Verlängert man t″ über AB hinaus bis D, so daß CD = 2t″, so ist ΔACD aus 3 Seiten zu construiren.

Aufg. 5. Δ aus a, b und t.

Analys. Die eine Hälfte des ΔABC ist ein Dreieck mit den Seiten b, t und $\frac{1}{2}$a.

Aufg. 6. Δ aus a, t und t′.

Analys. Die Transversalen dritteln sich (§. 87.); daher reducirt sich die Aufgabe auf die Construction eines Dreiecks aus den 3 Seiten $\frac{1}{2}$a, $\frac{1}{3}$t und $\frac{2}{3}$t′.

Aufg. 7. Δ aus a, t′ und t″.

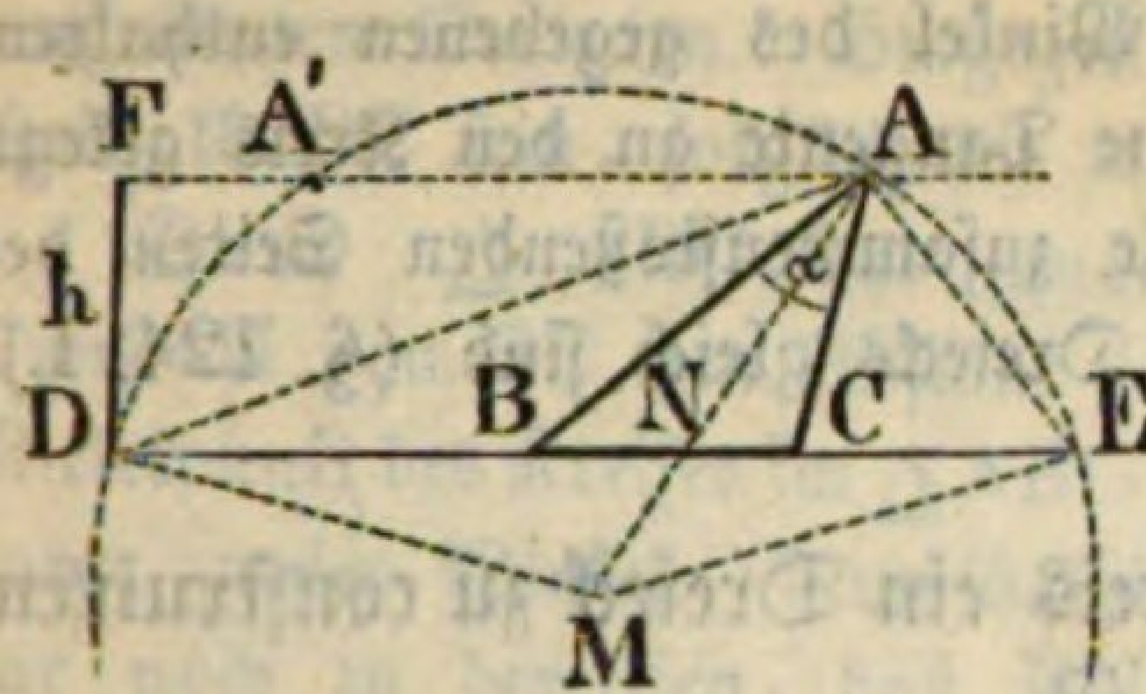
Analys. Δ aus den 3 Seiten a, $\frac{2}{3}$t′ und $\frac{2}{3}$t″.

Aufg. 8. Δ aus t, t′ und t″.

Analys. Verlängert man t über BC um $\frac{1}{3}$t und verbindet den Endpunkt mit B, so entsteht ein Δ mit den Seiten $\frac{2}{3}$t, $\frac{2}{3}$t′ und $\frac{2}{3}$t″. — Man kann auch die Aufgabe auf Nr. 4. zurückführen.

Aufg. 9. Δ aus a + b + c, α und h.

Analys. Macht man BD = BA und CE = CA und zieht AD und AE, so kennt man im ΔADE eine Seite DE = a + b + c, die Höhe DF = h und den Kreis um das Dreieck, welcher sich aus α ergiebt. Ist nämlich M

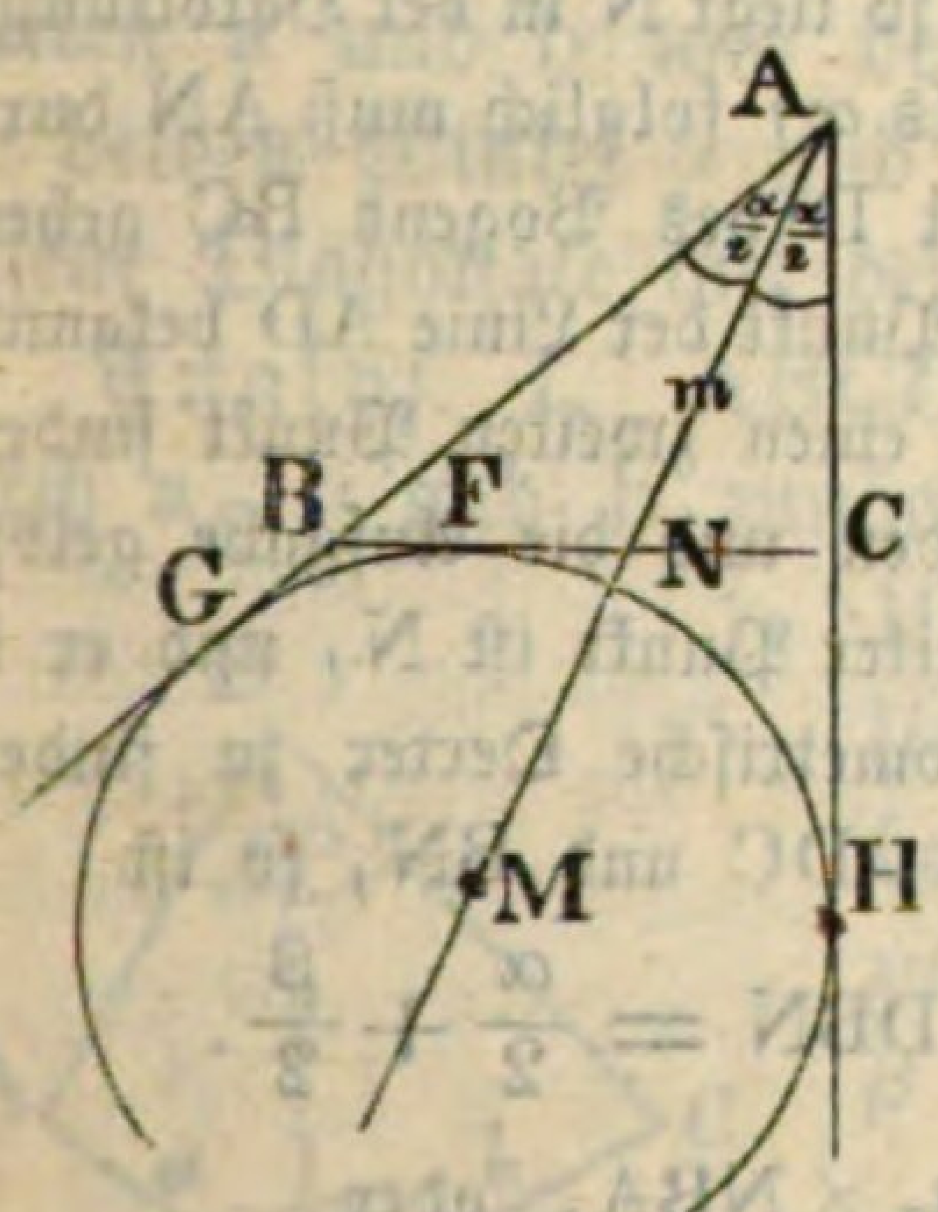


sein Mittelpunkt, und zieht man MD, MA und ME, so sind die $\Delta\Delta$MAD, BAD, MAE, CAE gleichschenklig, woraus $\measuredangle$MDE $=\measuredangle$MAB und $\measuredangle$MED $=\measuredangle$MAC folgt. Diese Winkel MDE und MED sind aber einander gleich; folglich ist jeder $=\frac{\alpha}{2}$. (Auch halbirt MA den $\measuredangle$BAC.) Jetzt ergiebt sich, wenn DE fest gelegt ist, A durch zwei geometrische Oerter. (Die Aufgabe ist eine bestimmte.)

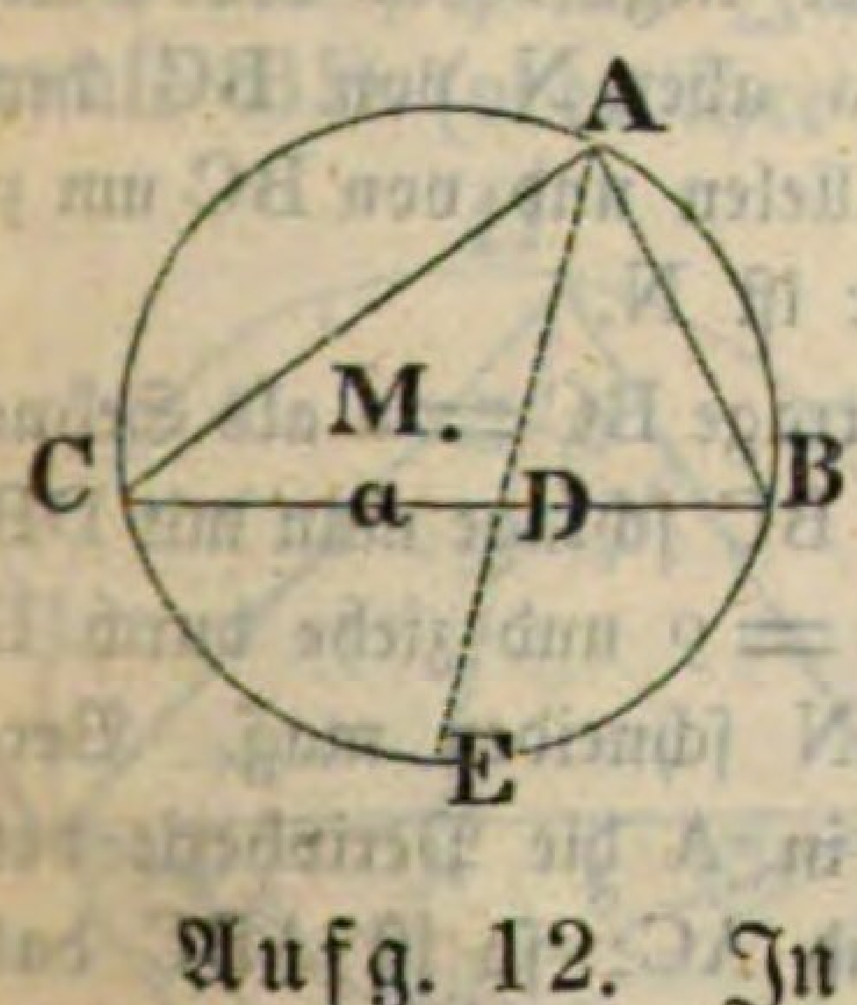
Aufg. 10. Δ aus $a+b+c$, α und der Halbirungslinie m des Winkels α (von A bis zur gegenüberliegenden Seite).

Analys. 1. Man kann, wie in der vorhergehenden Analysis, verfahren, und, nachdem DE fest gelegt ist, den Kreis um M construiren, der MD zum Radius hat und durch A gehen muß. Um nun A selbst zu finden, weiß man, daß MA den $\measuredangle$BAC halbirt; es kommt nur darauf an, daß AN $=$ m wird. Weil aber MA $=$ r bekannt ist, so ist MN $=$ r $-$ m ein Datum, daher N, also auch A, zu finden.

Analys. 2. Denkt man sich α fest gelegt und die Halbirungslinie AN $=$ m gemacht, so kommt es darauf an, durch N eine die Schenkel des $\measuredangle\alpha$ schneidende Linie so zu legen, daß der Umfang des entstandenen Δ gleich $a+b+c$ wird. Construirt man aber den Kreis, welcher BC und die Verlängerungen von AB und AC berührt, so ist BF $=$ BG und CH $=$ CF, folglich AG $+$ AH $=a+b+c$, daher AG $=$ AH $=\frac{a+b+c}{2}$. Man kennt also die Punkte G und H, kann den Kreis um M construiren und braucht dann nur noch von N aus an diesen Kreis eine Tangente zu legen, um BC zu erhalten.



Anmerk. Alle Tangenten an den Bogen GFH gelegt, welche in AG und AH enden, schneiden ein Dreieck vom Umfange $a+b+c$ ab.



Aufg. 11. Δ aus a, r und $b:c=3:2$.

Analys. Man kann zuerst einen Kreis (um M) mit dem Radius r construiren und in denselben BC $=$ a als Sehne eintragen. Es kommt nun darauf an, A zu finden. Halbirt man $\measuredangle$BAC durch AE, so sind D und E Data; denn CD : BD $=$ CA : BA $=3:2$, und E ist der Mittelpunkt des Bogens BC. Durch E und D hat man A.

Aufg. 12. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Analys. Das Δ im Kreise muß die Winkel des gegebenen enthalten. Denkt man sich aber durch eine seiner Ecken eine Tangente an den Kreis gelegt, so schließt die Tangente mit den in dieser Ecke zusammenstoßenden Seiten des Dreiecks Winkel ein, welche den Winkeln des Dreiecks gleich sind (§. 124. I.); hieraus folgt die sehr einfache Construction.

Aufg. 13. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu construiren, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

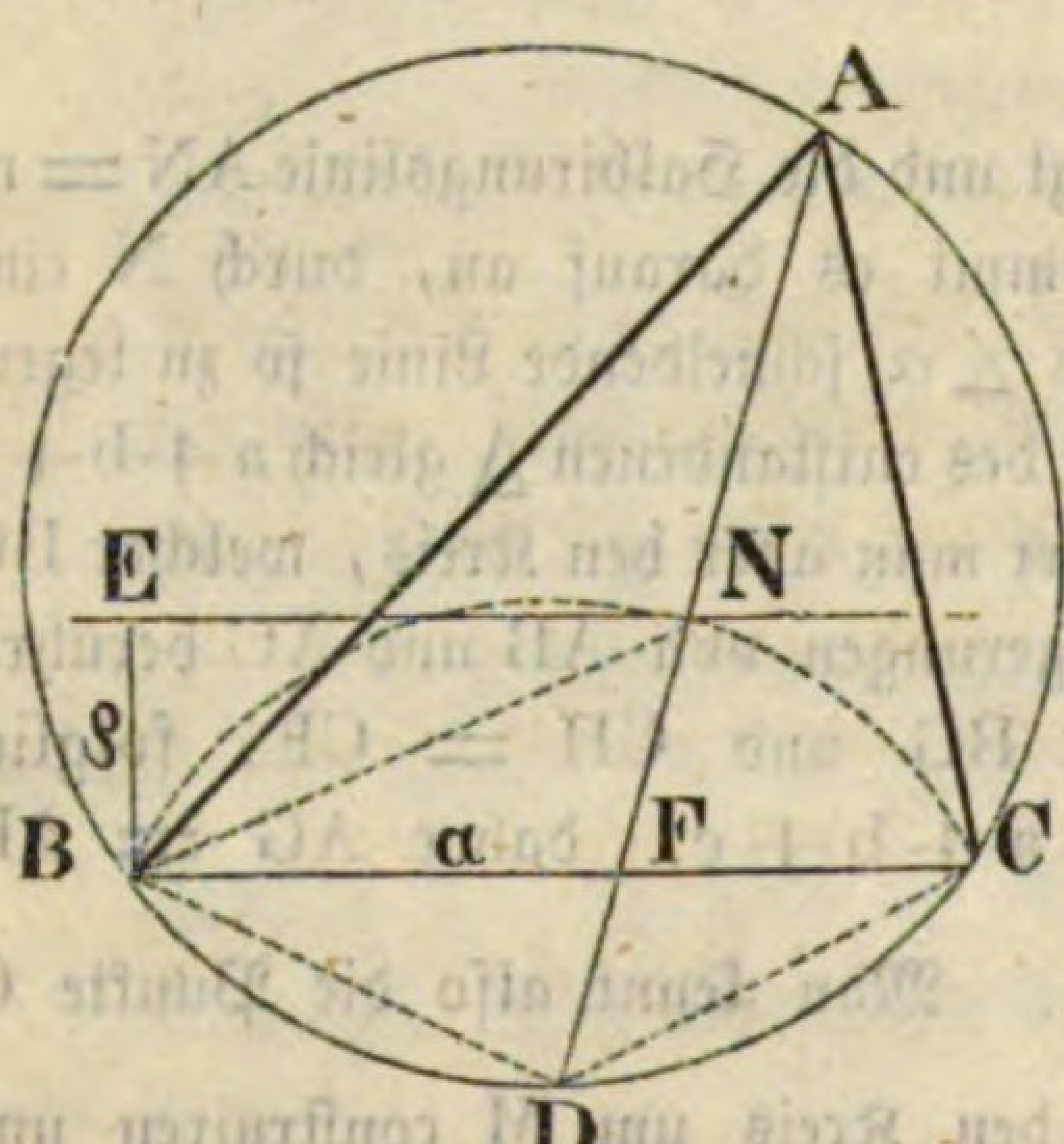
Analys. Die Radien nach den Berührungspunkten bilden mit einander die Winkel $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$ und $180^\circ - \gamma$.

Aufg. 14. Δ aus $a + b$, h und h'.

Analys. Es verhält sich $a : b = h' : h$ (weil $ah = bh'$); theilt man daher $a + b$ nach dem Verhältniß $h' : h$, so hat man a und b (§. 81.).

Aufg. 15. Δ aus a, r und ρ.

Analys. Denkt man sich $BC = a$ in den Kreis mit dem Radius r als Sehne eingetragen, so kommt es darauf an, in der Peripherie den Punkt A so zu bestimmen, daß der Radius des in das Δ ABC eingeschriebenen Kreises $= \rho$ wird. Es sei N der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem Radius ρ, so liegt N in der Halbirungslinie des Winkels α; folglich muß AN durch den Mittelpunkt D des Bogens BC gehen. Es ist also ein Punkt der Linie AD bekannt; kann man noch einen zweiten Punkt finden, so ist A gefunden und die Aufgabe gelöst. Ein solcher zweiter Punkt ist N, und er ist durch zwei geometrische Oerter zu finden. Zieht man DB, DC und BN, so ist



$$1)\quad \angle DBN = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Ferner ist als Außenwinkel $\angle DNB = \angle NAB + \angle NBA$, oder

$$2)\quad \angle DNB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Aus 1) und 2) folgt aber $DN = DB = DC$; daher liegt N in der Peripherie des Kreises um D mit dem Radius DB. Da aber N von BC den Abstand ρ hat, so liegt N auch in einer mit BC parallelen und von BC um ρ entfernten Linie. Der Durchschnittspunkt beider Oerter ist N.

Construct. Man zeichne einen Kreis mit r und trage $BC = a$ als Sehne in denselben ein. Um den Mittelpunkt D des Bogens BC schlage man mit DB einen Kreis, errichte in B auf BC eine Senkrechte $BE = \rho$ und ziehe durch E eine Parallele mit BC, welche den Kreis um D in N schneiden mag. Verbindet man D mit N und verlängert DN, bis sie in A die Peripherie des Kreises mit dem Radius r schneidet, und zieht AB und AC: so ist ABC das verlangte Dreieck. (Es giebt zwei Durchschnittspunkte N, beide führen aber zu

congruenten Dreiecken. Hingegen kann aber D auch der Mittelpunkt des Bogens oberhalb BC sein, folglich die Aufgabe auch zwei Auflösungen haben.)

Bew. $\triangle$ ABC hat zunächst die Seite a und den Radius r. Da der Punkt N von BC den Abstand ϱ hat, so ist nur noch zu beweisen, daß N der Mittelpunkt des Kreises im $\triangle$ ABC ist, also der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien zweier Winkel. Nun halbirt NA den $\measuredangle\alpha$, weil DB = DC; man hat nur noch zu beweisen, daß BN den Winkel β halbirt. Da aber $\triangle$ DBN gleichschenklig ist, so folgt $\measuredangle DBN = \measuredangle DNB$. Bezeichnet man $\measuredangle NBC$ durch x, so ist

$$\measuredangle DBN = \frac{\alpha}{2} + x,$$

und als Außenwinkel $\measuredangle DNB = \frac{\alpha}{2} + \beta - x$; folglich

$$\frac{\alpha}{2} + x = \frac{\alpha}{2} + \beta - x,$$

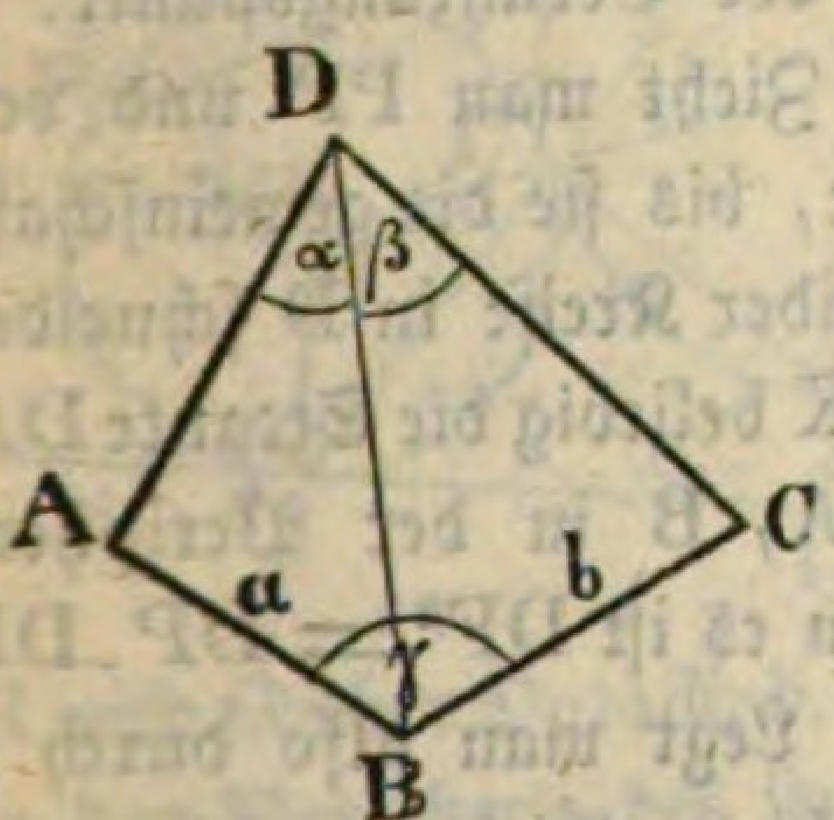
woraus $x = \frac{\beta}{2}$ folgt.

§. 176.

Die Pothenot'sche Aufgabe.

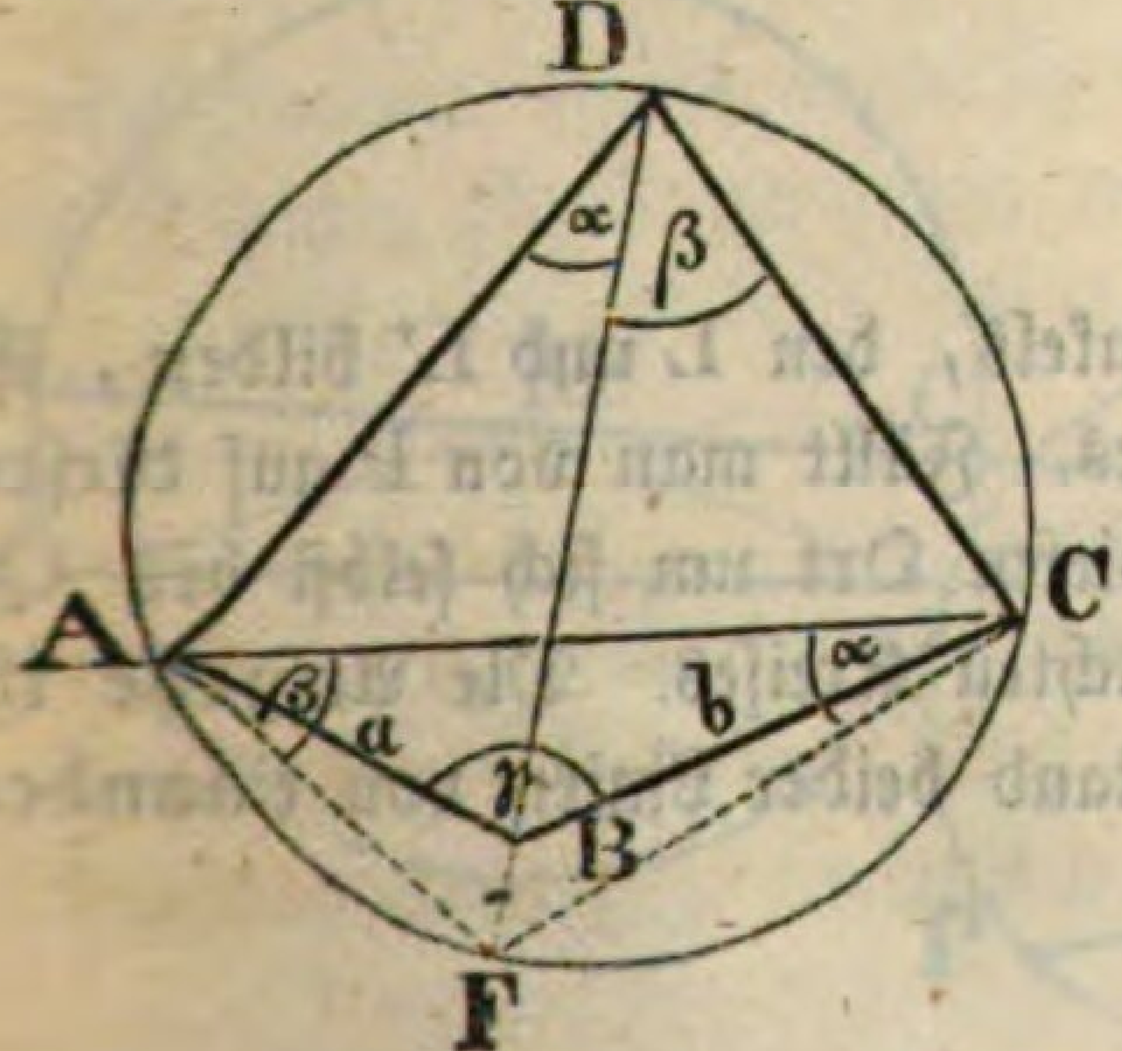
Zur Construction eines Vierecks sind zwei an einander stoßende Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben, so wie die beiden Winkel α und β, welche die von dem Scheitel des $\measuredangle\alpha$ gezogene Diagonale mit den beiden unbekannten Seiten bildet.

Analys. 1. ABCD sei das verlangte Viereck, so kann man durch a, γ und b zunächst die drei Ecken A, B und C fest legen.



Um D zu finden, wendet man Oerter an. D liegt in dem Bogen, welcher, über a beschrieben, den $\measuredangle\alpha$ als Peripheriewinkel faßt, und zugleich in dem Bogen, der, über b beschrieben, β als Peripheriewinkel faßt.

Analys. 2. Nachdem die drei Punkte A, B und C fest gelegt sind, kann man D auf folgende Weise finden: Man ziehe AC und denke sich um $\triangle$DAC einen Kreis geschlagen, welcher die Diagonale BD (oder ihre Verlängerung) in F schneiden mag.



Zieht man nun AF und CF, so ist $\measuredangle CAF = \beta$ und $\measuredangle ACF = \alpha$. Der Punkt F ist sonach construirbar, und in der Linie FB hat man nun einen Ort für D. Der zweite Ort ist die Peripherie des Kreises um das $\triangle$ACF.

Anmerk. Fällt F in B, welche Lage eintritt, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist, so ist die Aufgabe eine unbeschränkt unbestimmte.

§. 177.
Kreis-Aufgaben.

Aufgabe. Von folgenden neun Stücken: drei Punkten P, P′, P″, drei geraden Linien L, L′, L″, drei Kreisen K, K′, K″, sind drei gegeben; man soll einen Kreis construiren, welcher, wenn Punkte gegeben sind, durch diese geht, wenn gerade Linien oder Kreise gegeben sind, diese berührt.

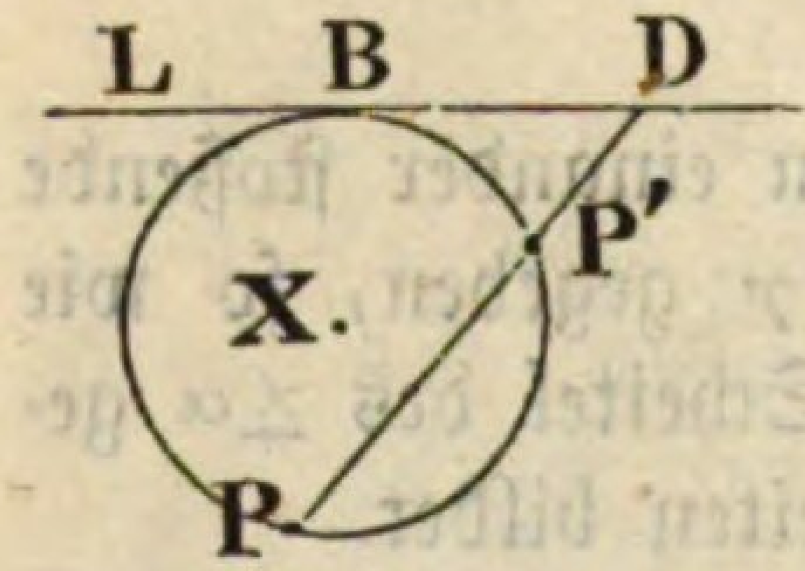
Diese Aufgabe enthält zehn einzelne Aufgaben. Keine dieser Aufgaben ist eine unbeschränkt unbestimmte; es soll aber dem Leser zu beurtheilen überlassen bleiben, welche Aufgaben bestimmte, welche beschränkt unbestimmte sind, und wie groß im letzteren Falle die Anzahl der Auflösungen ist.

I. Gegeben P, P′, P″.

Aufl. bekannt.

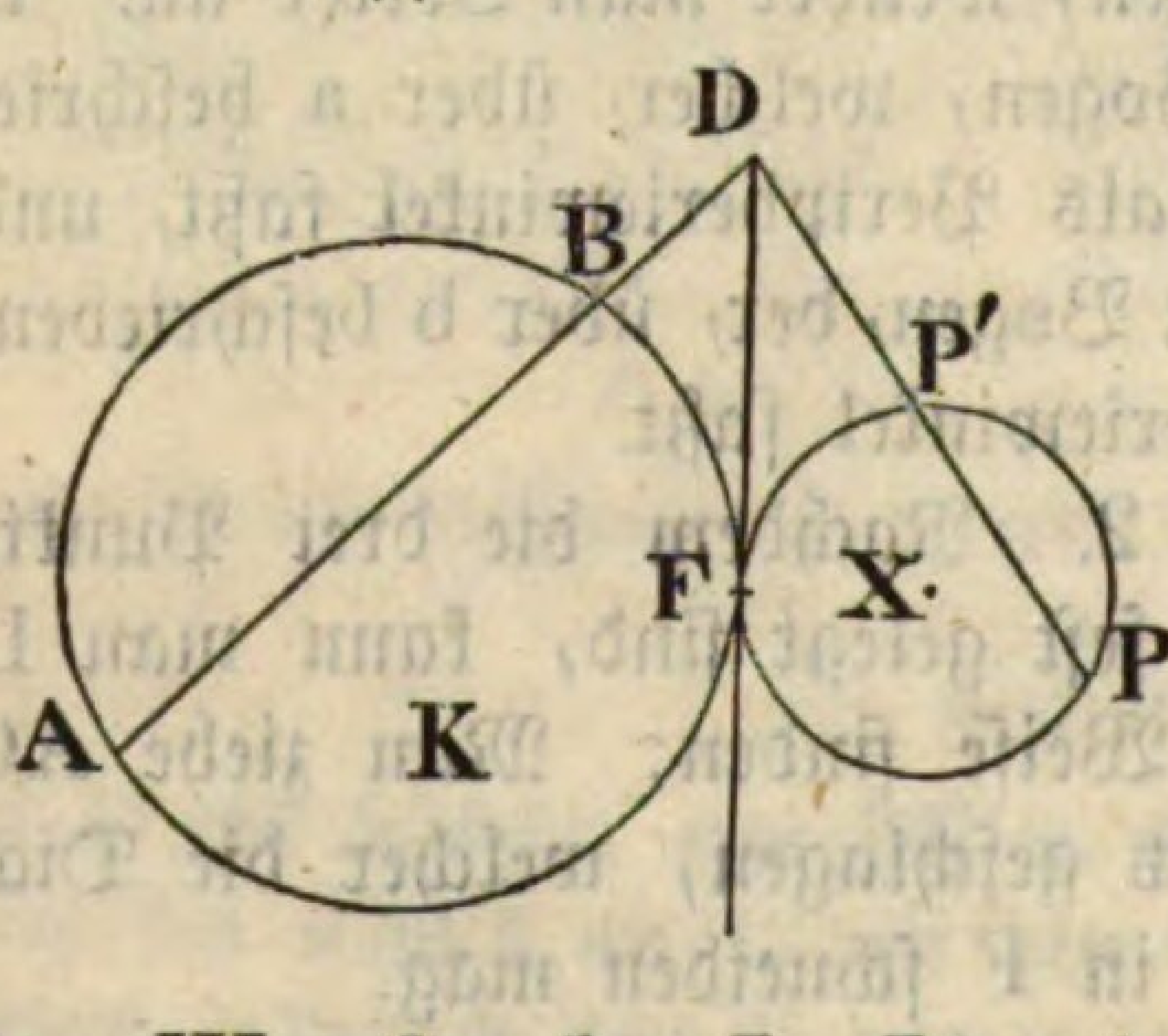
II. Gegeben P, P′ und L.

Analys. Der Kreis um X sei der gesuchte. Verlängert man PP′, bis L in D geschnitten wird, so ist D ein Datum. Bezeichnet nun B den Berührungspunkt des Kreises mit L, so ist DB mittlere geometrische Proportionale zwischen DP′ und DP, also nach §. 174. I. Beisp. 4. zu construiren. Durch die drei Punkte P, P′, B ist der Kreis gefunden. — Ist PP′ ∥ L, so liegt B in der auf PP′ in ihrer Mitte errichteten Senkrechten.



III. Gegeben P, P′ und K.

Analys. Der Kreis um X sei der gesuchte, F der Berührungspunkt: so ist F zu finden. Zieht man PP′ und verlängert diese Linie, bis sie die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise in D schneidet, zieht von D durch K beliebig die Secante DA, so liegen P, P′, A, B in der Peripherie eines Kreises; denn es ist $DF^2 = DP.DP' = DA.DB$. — Legt man also durch P und P′ einen beliebigen Kreis, welcher den Kreis K schneidet, so findet man A und B, hieraus D, hieraus F.



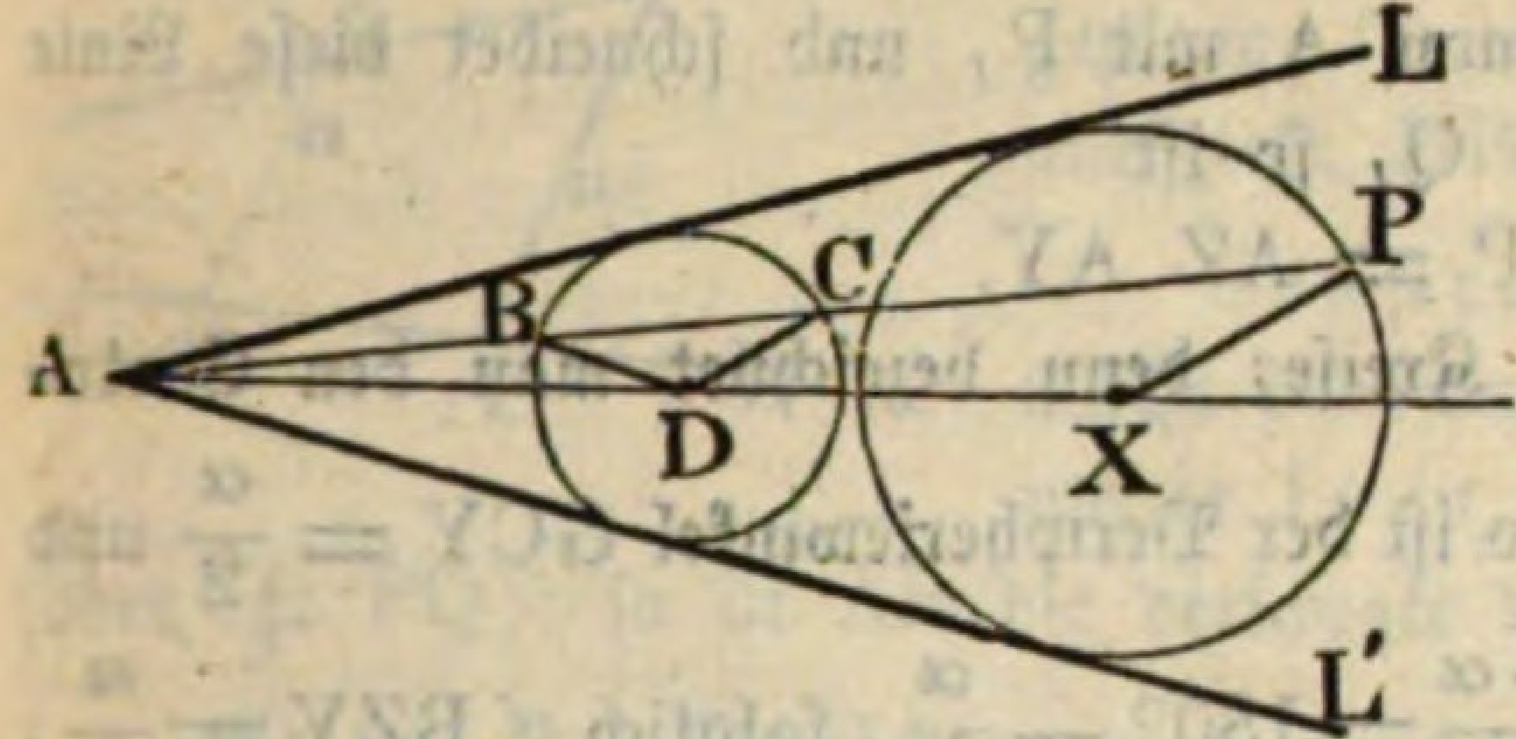
IV. Gegeben L, L′ und L″.

Aufl. bekannt.

V. Gegeben L, L′ und P.

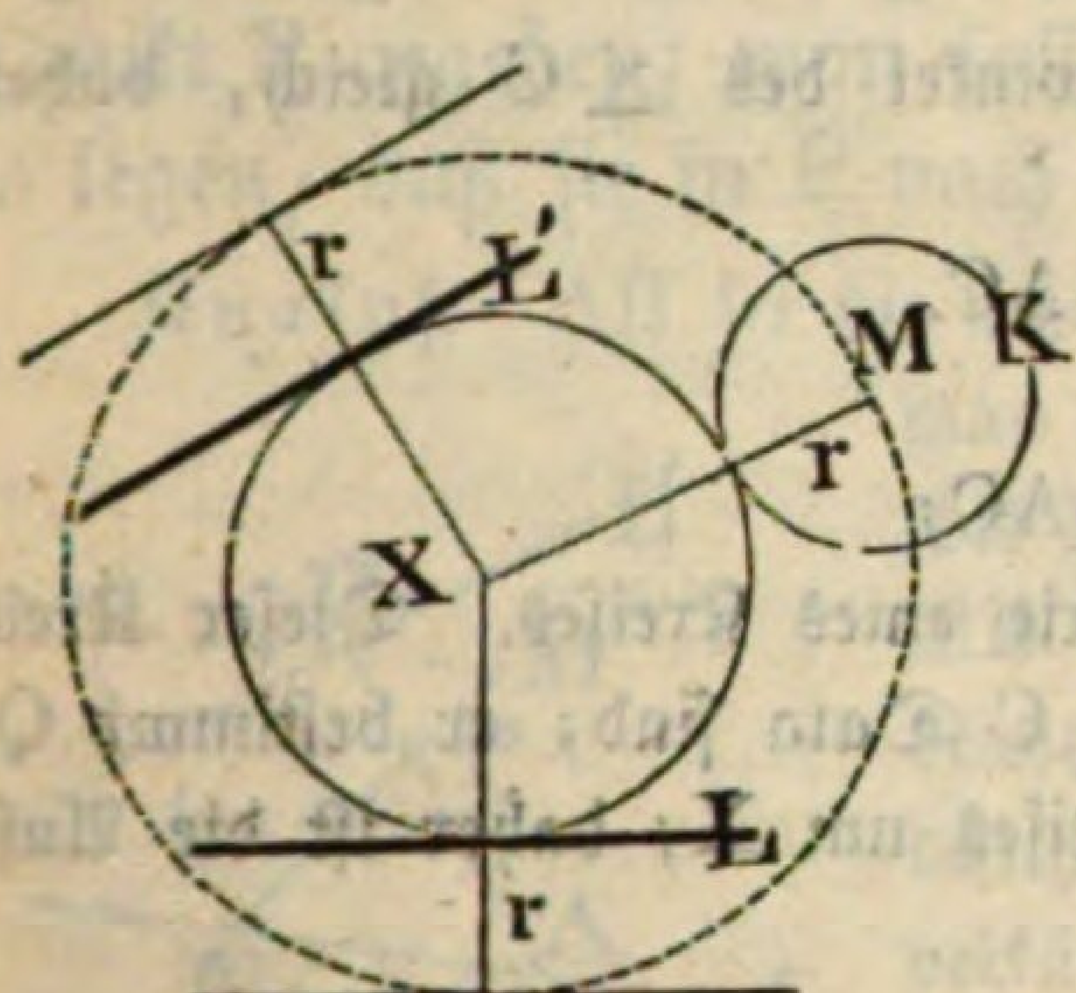
Analys. 1. Die Halbirungslinie des Winkels, den L und L′ bilden, ist ein Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Fällt man von P auf diesen Ort eine Senkrechte und verlängert diese über diesen Ort um sich selbst bis Q, so ist Q auch ein Punkt der Peripherie des gesuchten Kreises. Die Aufgabe ist auf II. reducirt. — Ist L ∥ L′, so ist der Abstand beider Linien von einander der Durchmesser des gesuchten Kreises.

Analyſ. 2. L und L′ mögen ſich in A ſchneiden. Der Mittelpunkt X des geſuchten Kreiſes liegt in der Halbirungslinie des Winkels A. Conſtruirt man an beliebiger Stelle einen L und L′ berührenden Kreis (den um D), ſo iſt A äußerer Aehnlichkeitspunkt beider Kreiſe. Schneidet AP den Kreis um D in B und C, ſo muß PX einem der Radien CD oder BD parallel ſein.



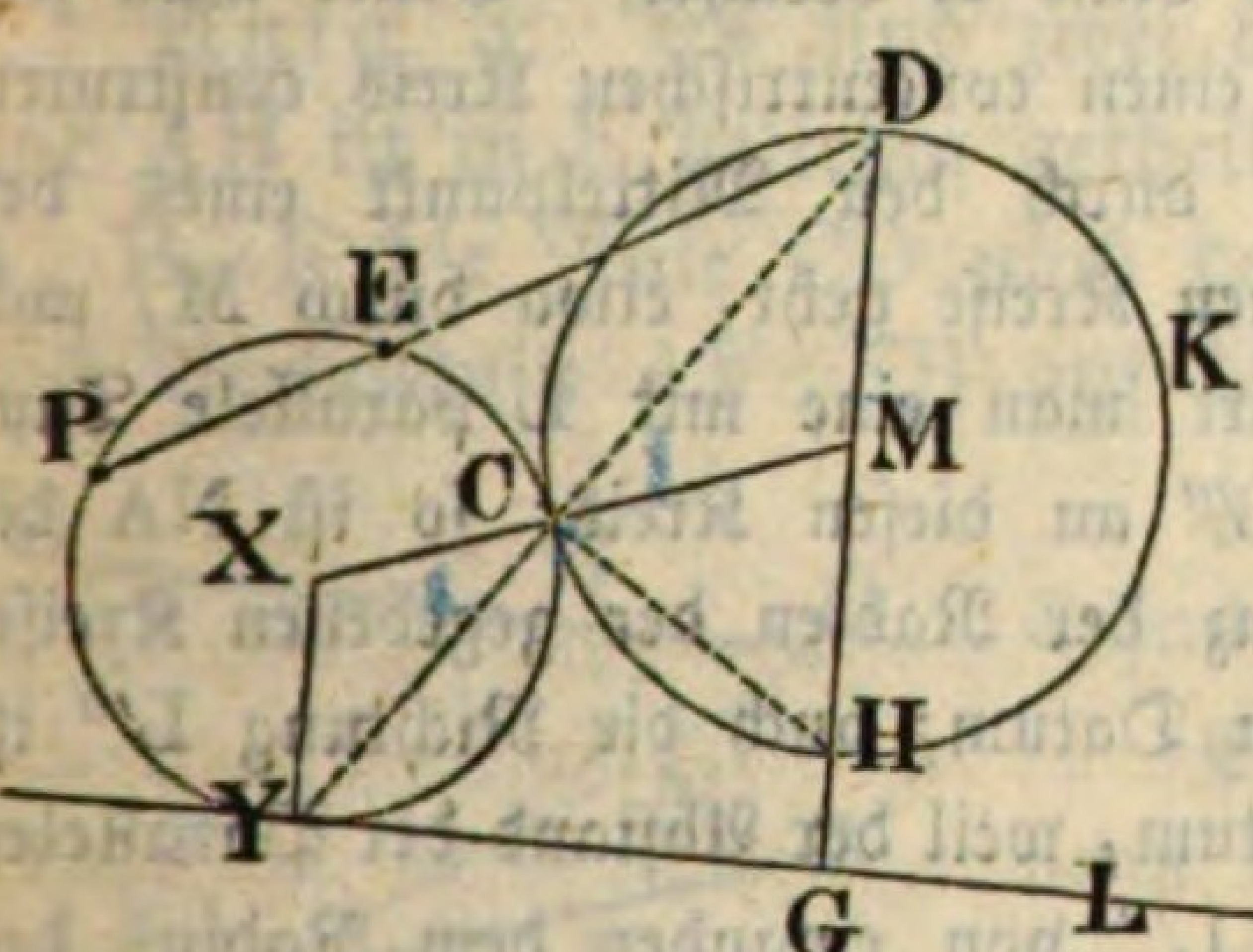
VI. Gegeben L, L′ und K.

Analyſ. Der Kreis um M ſei der gegebene, der um X der geſuchte. Schlägt man mit XM um X einen Kreis und zieht an denſelben zwei mit L und L′ parallele Tangenten, ſo ſind dieſe Data, weil ſie von L und L′ den Abſtand r haben. Die Aufgabe iſt auf V. reducirt.



VII. Gegeben P, L und K.

Analyſ. Der Kreis um X ſei der geſuchte, der um M der gegebene, C ihr Berührungspunkt. Fällt man XY und MG ⊥ L und verlängert MG bis D, ſo daß DH Durchmeſſer wird, ſo liegen Y, C und D in einer geraden Linie. Zieht man noch DP, und ſchneidet dieſe Linie den Kreis um X in E, ſo iſt:



$DC.DY = DE.DP$, und, weil $\triangle DCH \backsim \triangle DGY$:

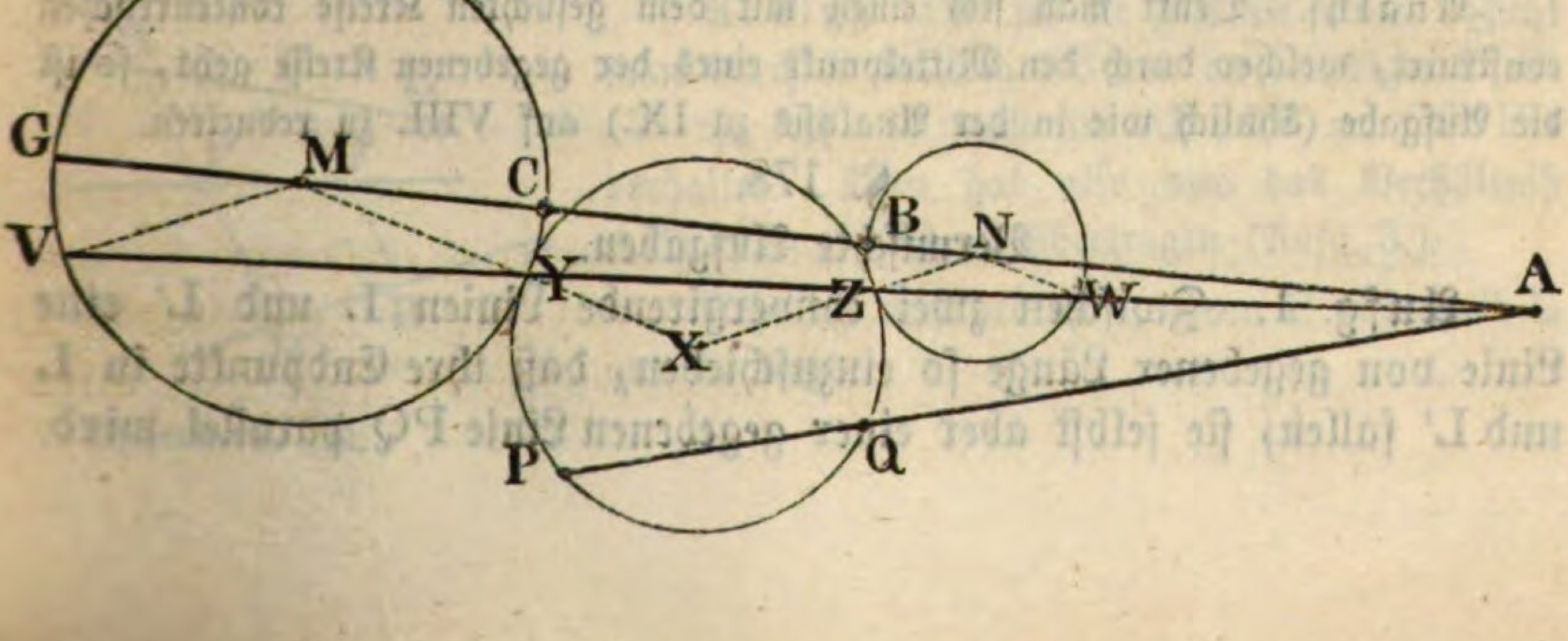
$DC.DY = DH.DG$; folglich:

$DE.DP = DH.DG$,

woraus ſich ergiebt, daß P, E, H und G in der Peripherie eines Kreiſes liegen. Dieſer Kreis iſt conſtruirbar, weil P gegeben iſt, H und G aber Data ſind. Der Kreis beſtimmt E, und man kennt ſonach zwei Punkte in der Peripherie des Kreiſes um X. Die Aufgabe iſt auf II. oder III. reducirt.

VIII. Gegeben P, K und K′.

Analyſ. Der geſuchte Kreis um X berühre die gegebenen Kreiſe um M



und N in Y und Z. Die Linie YZ muß dann durch den Aehnlichkeitspunkt A der Kreise um M und N gehen (weil MY ∦ NW aus Gleichheit der spitzen Winkel bei Y und W). Verbindet man A mit P, und schneidet diese Linie den Kreis um X noch in dem Punkte Q, so ist

$$1)\quad AQ.AP = AZ.AY.$$

Nun ist aber YZBC ein Viereck im Kreise; denn bezeichnet man den Centriwinkel GMY oder BNW durch α, so ist der Peripheriewinkel $GCY = \frac{\alpha}{2}$ und der Peripheriewinkel $BZW = \frac{360^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$, folglich $\measuredangle BZY = \frac{\alpha}{2}$; d. h. im Viereck YZBC ist $\measuredangle Z$ dem Nebenwinkel des $\measuredangle C$ gleich, daher $\measuredangle Z + \measuredangle C = 180^\circ$. Hieraus folgt:

$$2)\quad AZ.AY = AB.AC.$$

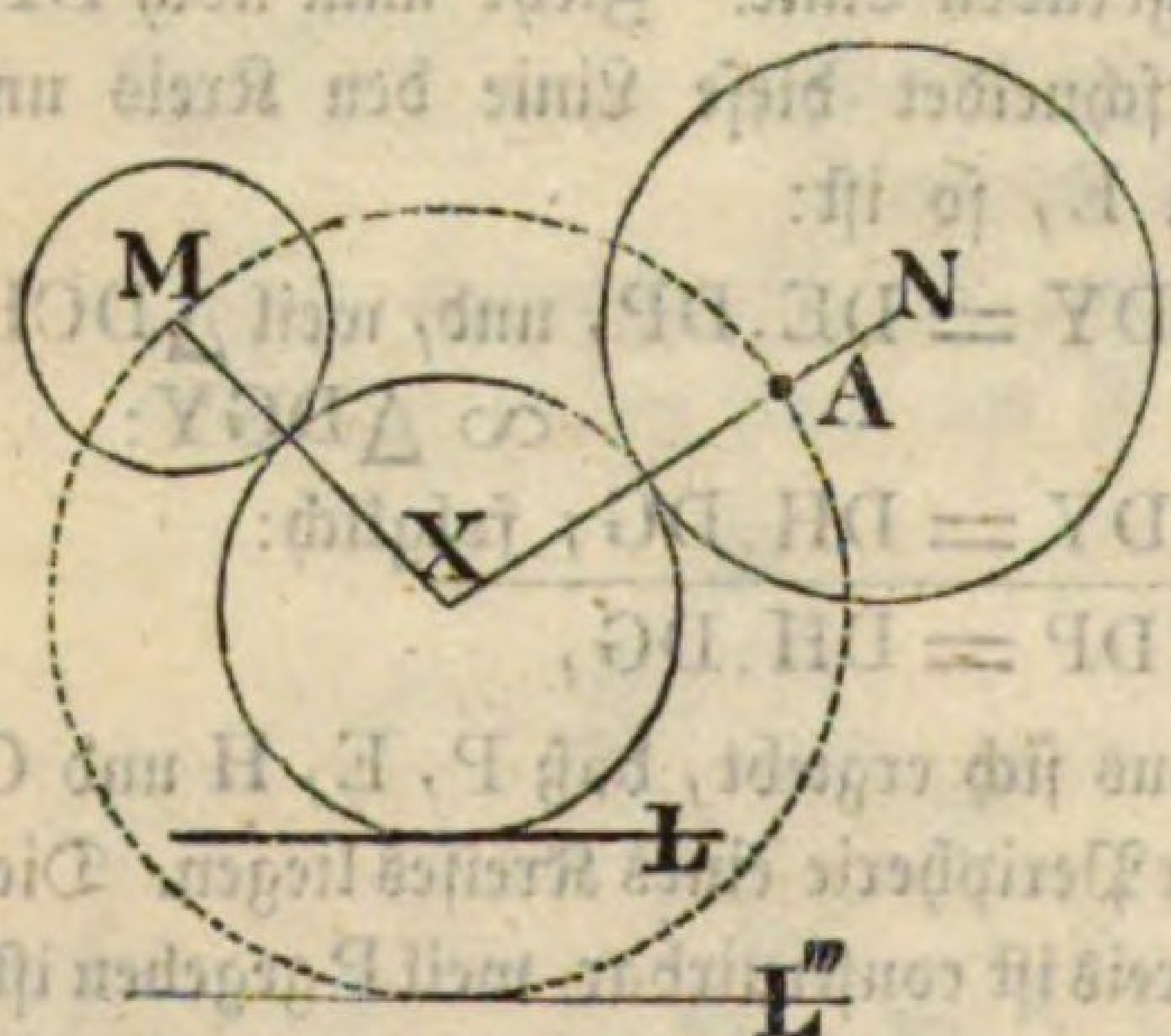
Aus 1) und 2) ergiebt sich:

$$3)\quad AQ.AP = AB.AC;$$

folglich liegen P, Q, B und C in der Peripherie eines Kreises. Dieser Kreis ist construirbar, weil P gegeben ist und B und C Data sind; er bestimmt Q, also einen zweiten Punkt der Peripherie des Kreises um X; daher ist die Aufgabe auf III. reducirt.

IX. Gegeben L, K und K'.

Analys. Der Kreis um X sei der gesuchte, welcher die Kreise um M und N und die Linie L berührt. Denkt man sich um X einen concentrischen Kreis construirt, welcher durch den Mittelpunkt eines der gegebenen Kreise geht, etwa durch M, und construirt man eine mit L parallele Tangente L‴ an diesen Kreis: so ist NA die Differenz der Radien der gegebenen Kreise, also ein Datum; auch die Richtung L‴ ist ein Datum, weil der Abstand der Parallelen L und L‴ von einander dem Radius des Kreises um M gleich ist. Die Aufgabe ist sonach auf VII. reducirt, d. h. auf die Aufgabe: einen Kreis zu construiren, welcher durch M geht und sowohl L‴, als auch den Kreis um N mit dem Radius NA berührt.



X. Gegeben K, K' und K''.

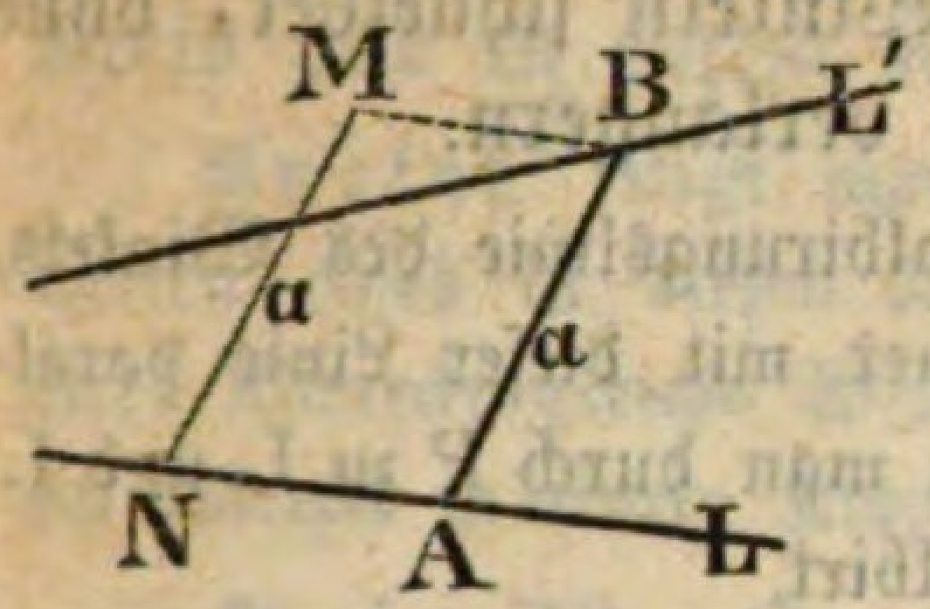
Analys. Denkt man sich einen mit dem gesuchten Kreise concentrischen construirt, welcher durch den Mittelpunkt eines der gegebenen Kreise geht, so ist die Aufgabe (ähnlich wie in der Analysis zu IX.) auf VIII. zu reduciren.

§. 178.

Vermischte Aufgaben.

Aufg. 1. Zwischen zwei convergirende Linien L und L' eine Linie von gegebener Länge so einzuschieben, daß ihre Endpunkte in L und L' fallen, sie selbst aber einer gegebenen Linie PQ parallel wird.

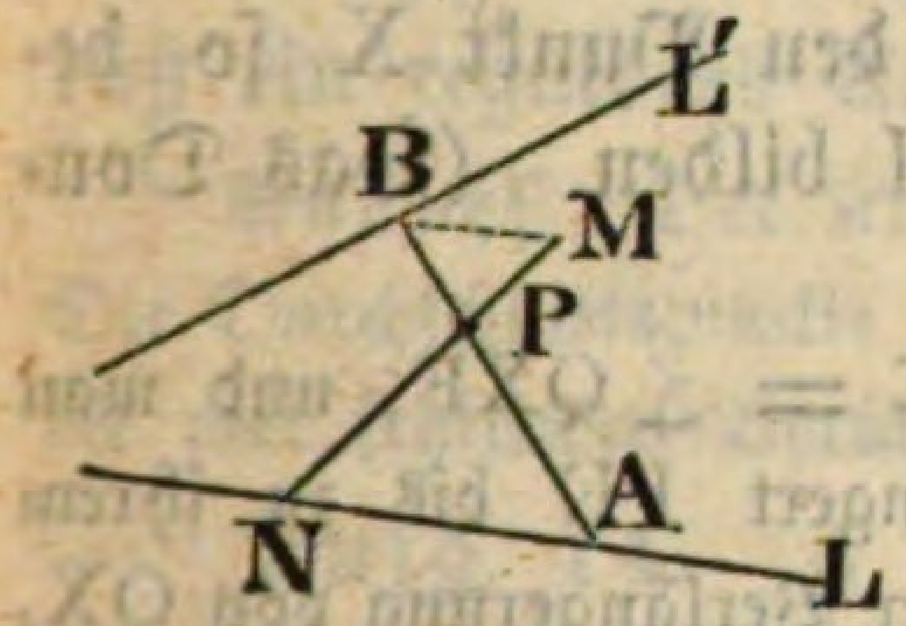
Analys. Es habe AB die gegebene Länge a und sei parallel PQ. Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt N der Richtung L eine mit PQ parallele Linie nach L′ hin gezogen, schneidet von N aus NM = a von ihr ab und zieht MB: so wird MB ⫲ L.



Construct. Man ziehe NM parallel PQ und mache NM = a, lege durch M eine Parallele zu L, welche L′ in B schneidet, und ziehe BA ⫲ MN (oder ⫲ PQ): so ist AB die verlangte Linie.

Aufg. 2. Zwischen zwei convergirenden Linien L und L′ ist ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine in L und L′ endende Linie so legen, daß sie in P nach gegebenem Verhältniß n : m getheilt wird.

Analys. AB sei die Linie, so daß sich verhält AP : BP = n : m. Zieht man PN beliebig und verlängert sie über P so weit (bis M), daß sich verhält NP : PM = n : m, so wird MB ⫲ L. — Will man den Durchschnittspunkt der Richtungen L und L′ benutzen, so kann man auch durch P zu L eine Parallele ziehen und sie bis L′ verlängern.



Ganz ähnlich ist die Analysis, wenn P außerhalb L und L′ liegt, wo dann AB durch P in zwei äußere Abschnitte zerlegt wird.

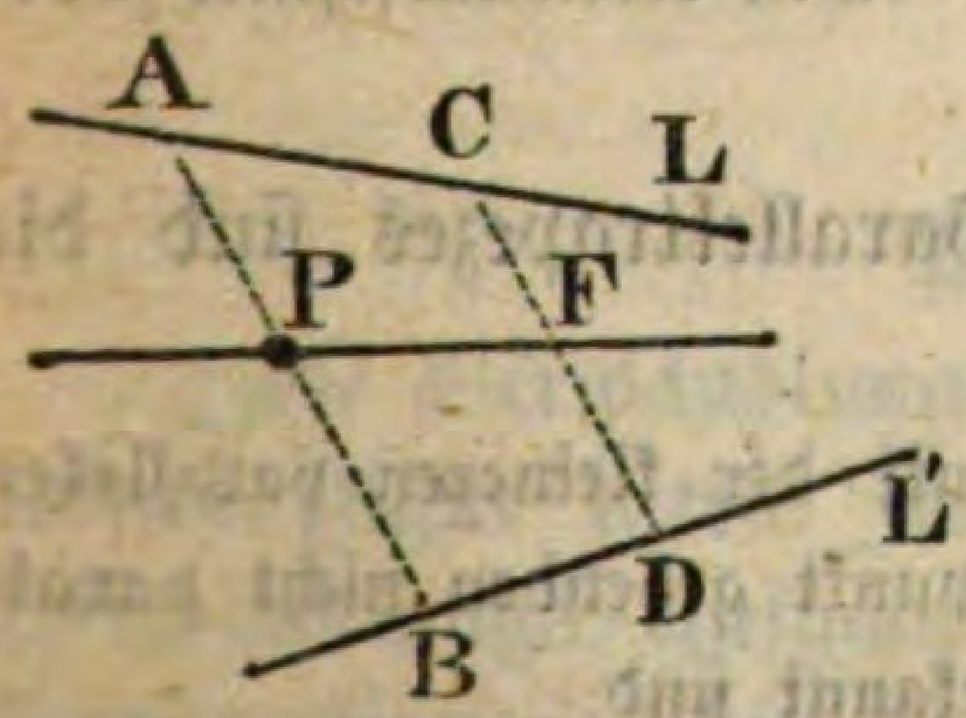
Aufg. 3. Es sind zwei begrenzte Linien AB und CD gegeben, und AB ist in F beliebig getheilt; man soll mit Benutzung der Punkte A, B, F die Linie CD nach demselben Verhältniß theilen (man soll das Verhältniß AF : FB auf die Linie CD übertragen).



Analys. Parallele Linien schneiden von den Schenkeln eines Winkels proportionale Stücke ab.

Construct. Man ziehe AD, BD und AC; dann FN ⫲ BD und NG ⫲ AC: so ist G der gesuchte Theilpunkt.

Aufg. 4. Zwischen den convergirenden Linien L und L′ ist ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine Linie legen, welche gehörig verlängert durch den Durchschnittspunkt der L und L′ geht, ohne aber den Durchschnittspunkt zu zeichnen.



Analys. PF sei die gesuchte Linie. Zieht man durch P beliebig AB und an beliebiger Stelle CD ⫲ AB, so muß sich AP : PB = CF : FD verhalten. Man hat also nur das Verhältniß AP : PB auf CD zu übertragen (Aufg. 3.).

Aehnlich verfährt man, wenn P außerhalb L und L′ liegt.

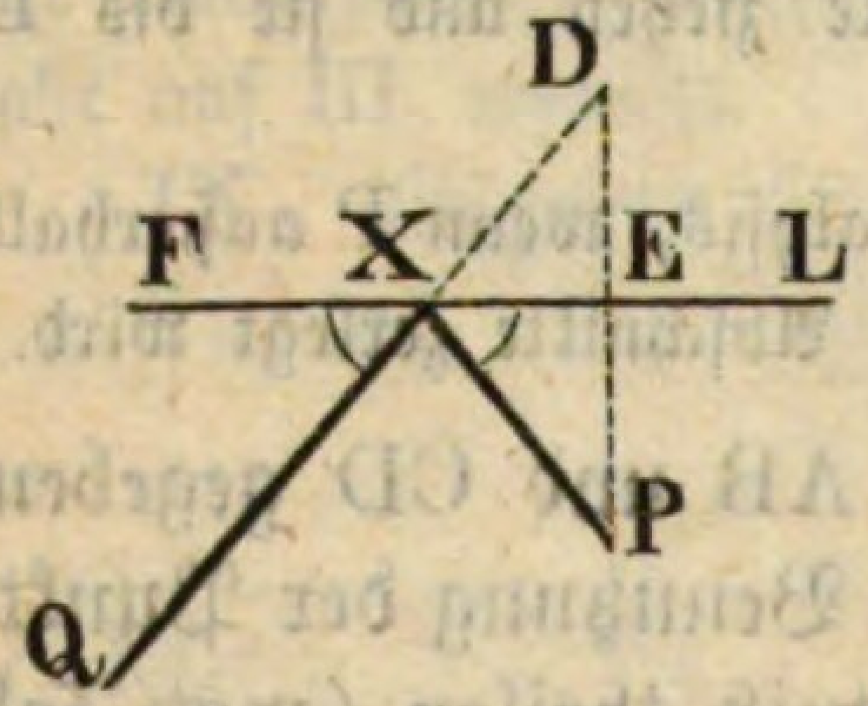
Aufg. 5. Durch einen Punkt P eine Linie zu legen, welche die Richtungen L und L′ unter gleichen inneren Winkeln schneidet, ohne L und L′ bis zu ihrem Durchschnittspunkt zu verlängern.

Analys. Die gesuchte Linie muß auf der Halbirungslinie des Winkels, den L und L′ bilden, senkrecht stehen, oder auf einer mit dieser Linie parallelen Linie. Eine solche Parallele findet man, wenn man durch P zu L und L′ Parallelen zieht und den Winkel, den sie bilden, halbirt.

Aufg. 6. Ohne L und L′ bis zu ihrem Durchschnittspunkt zu verlängern, die Halbirungslinie des Winkels zu zeichnen, den sie mit einander bilden. (Leicht aus der Aufg. 5.)

Aufg. 7. In L den Punkt zu finden, welcher von zwei gegebenen Punkten P und Q gleich weit entfernt ist. (Leicht.)

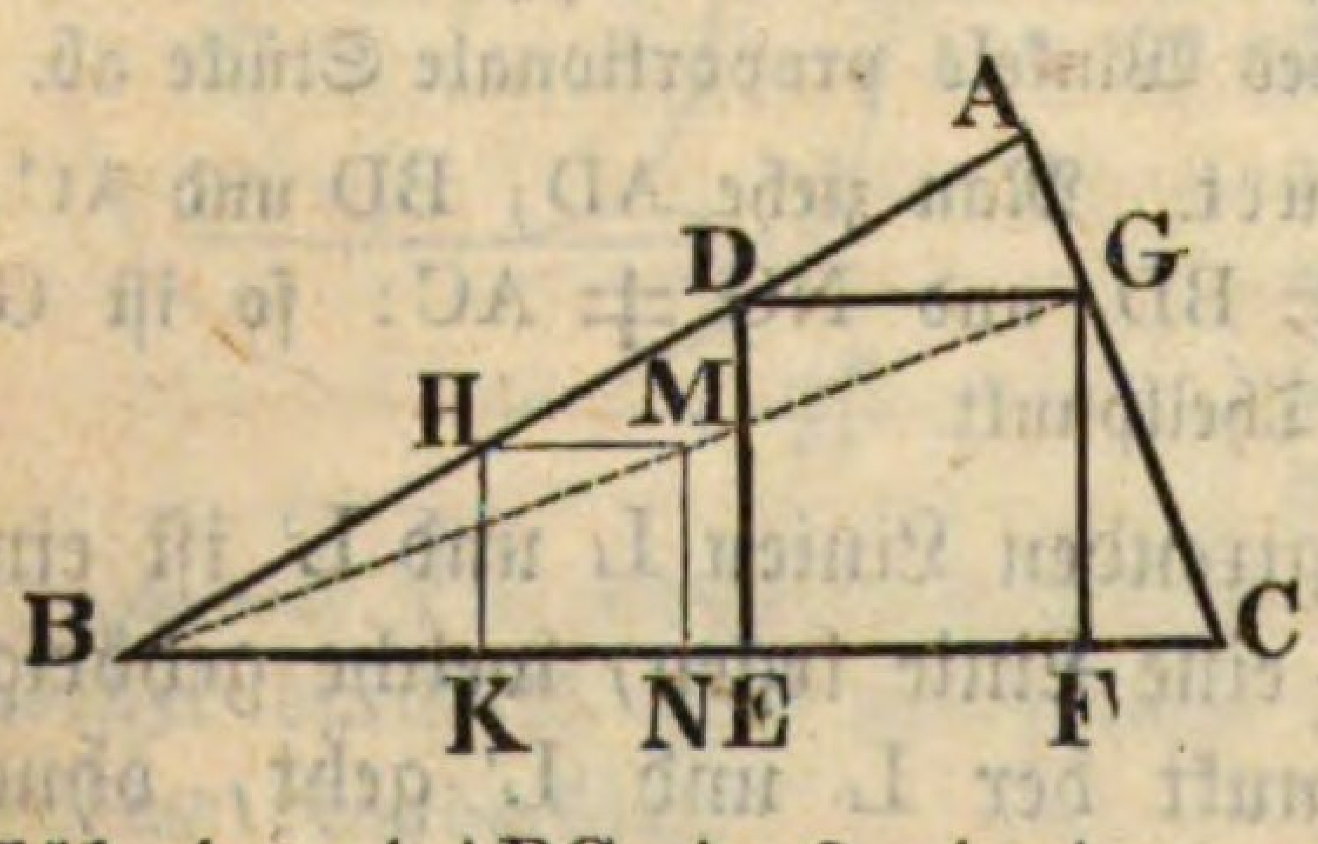
Aufg. 8. Gegeben eine Richtung L und auf derselben Seite von L zwei Punkte P und Q; man soll in L den Punkt X so bestimmen, daß PX und QX mit L gleiche Winkel bilden. (Das Doubliren auf dem Billard.)



Analys. Ist $\measuredangle PXE = \measuredangle QXF$, und man fällt $PE \perp L$ und verlängert PE bis zu ihrem Durchschnittspunkt D mit der Verlängerung von QX, so wird $\triangle XPD$ gleichschenklig, und $PE = DE$.

Aufg. 9. In ein Dreieck ABC ein Quadrat einzuzeichnen, so daß also seine Ecken in die Seiten des Quadrats fallen.

Analys. DEFG sei das Quadrat. Construirt man an beliebiger Stelle HK $\#$ DE und nun über HK das Quadrat HKNM, so haben beide Quadrate parallele Seiten und B wird ihr Aehnlichkeitspunkt (§. 93.); folglich liegen B, M und G in einer Richtung. Diese Richtung ist ein Ort für G; ein zweiter Ort ist AC.



Da die Zeichnung um so genauer wird, je weiter M von B entfernt ist, so pflegt man über die von A gefällte Höhe des $\triangle ABC$ ein Quadrat zu construiren.

Anmerk. Auf ähnliche Weise kann man in einen Kreisausschnitt oder Kreisabschnitt ein Quadrat zeichnen.

Aufg. 10. Zur Construction eines Paralleltrapezes sind die vier Seiten gegeben.

Analys. Zieht man durch den einen Endpunkt der kleineren parallelen Seite eine Parallele zu der durch den andern Endpunkt gehenden nicht parallelen Seite, so entsteht ein Dreieck, dessen Seiten bekannt sind.

Aufg. 11. Ein Viereck zu construiren, welches zugleich um einen Kreis und in einem Kreise liegt.

Analys. Legt man um einen Kreis ein Viereck, dessen Seiten mit den Seiten eines in diesen Kreis eingeschriebenen Vierecks parallel sind, so haben beide Vierecke gleiche Winkel; folglich ist das um den Kreis gelegte Viereck auch ein Viereck in einem Kreise.

Aufg. 12. In der Peripherie eines Kreises sind zwei Punkte A und B gegeben, man soll einen dritten Punkt X in der Peripherie so bestimmen, daß AX und BX zu einander ein gegebenes Verhältniß n : m haben.

Analys. Die Lage der Halbirungslinie des $\measuredangle$ AXB ist zu finden. Diese Linie halbirt den Bogen AB und theilt die Sehne AB nach dem Verhältniß n : m.

Aufg. 13. Ein Quadrat in seinen vier Ecken so abzustumpfen, daß ein reguläres Achteck entsteht.

Analys. Der Kreis im Quadrat ist auch der Kreis im regulairen Achteck. Die Durchschnittspunkte der Diagonalen des Quadrats mit dem Kreise sind sonach die vier fehlenden Berührungspunkte.

Aufg. 14. Δ aus $b + c$, t und h'.

Analysis durch Reduction. Verlängert man t um sich selbst über a, so kommt man auf die Aufgabe: ein Δ zu construiren aus einer Seite (2t), der Summe der beiden andern $(b + c)$ und der Höhe (h') auf einer dieser andern Seiten (b). Diese Aufgabe reducirt sich leicht auf folgende: Δ aus zwei Seiten (2t und $b + c$) und der Höhe (h') auf $b + c$ zu construiren.

Aufg. 15. Ein Viereck zu construiren aus zwei gegenüberliegenden Seiten a und c, den beiden Winkeln an a und einem Winkel an c.

Analys. Man kann a und die Richtungen der beiden unbekannten Seiten fest legen; die Aufgabe ist dann auf die Aufg. 1. reducirt. (Vergl. §. 37. Der Leser möge auch die anderen dort untersuchten Vierecke construiren. Soll z. B. noch ein Viereck ABCD aus drei Seiten a, b, c und den Winkeln γ und δ an der 4ten Seite construirt werden, (Figur zu §. 37. Nr. 5.), so kann man sich $AD = a$ festgelegt und $\measuredangle ADX = \delta$ gemacht denken; macht man ferner $\measuredangle DXY = \gamma$ und $XY = c$, wobei der Punkt X beliebig ist, so ist die durch Y gehende mit XD parallele Linie ein geometrischer Ort für B; ein zweiter aber ist die Peripherie des Kreises um A mit dem Radius b, u. s. w.)

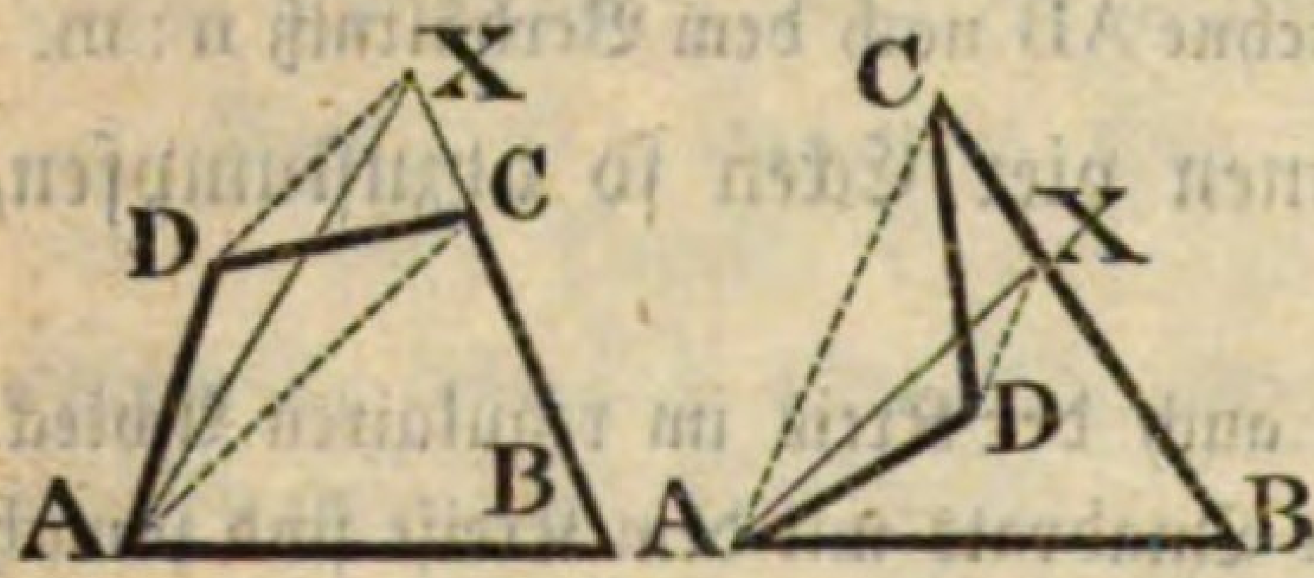
§. 179.

Verwandlungs-Aufgaben.

Jede Verwandlungs-Aufgabe setzt voraus, daß die zu verwandelnde Figur ihren Inhalt behalten soll. — Man unterscheidet bei Verwandlungs-Aufgaben (und später bei Theilungs-Aufgaben) zwei Constructionen: die Parallelen-Construction und die Halb-

kreis-Construction. Erstere besteht nur in dem Ziehen von Parallelen; man will Dreiecke oder Parallelogramme erzeugen, die gleich sind, weil sie dieselbe Grundlinie haben und zwischen denselben Parallelen liegen. Die Halbkreis-Construction kommt in Anwendung, wenn zwischen zwei Linien die mittlere geometrische Proportionale construirt werden soll; sie ist eine der beiden in §. 174. I. Beisp. 4. angegebenen Constructionen. Auf diese Construction führt die Analysis solcher Verwandlungs- und Theilungs-Aufgaben, bei welchen die zu zeichnende Figur einer gegebenen ähnlich werden soll (vergl. die folgende Aufg. 9.)

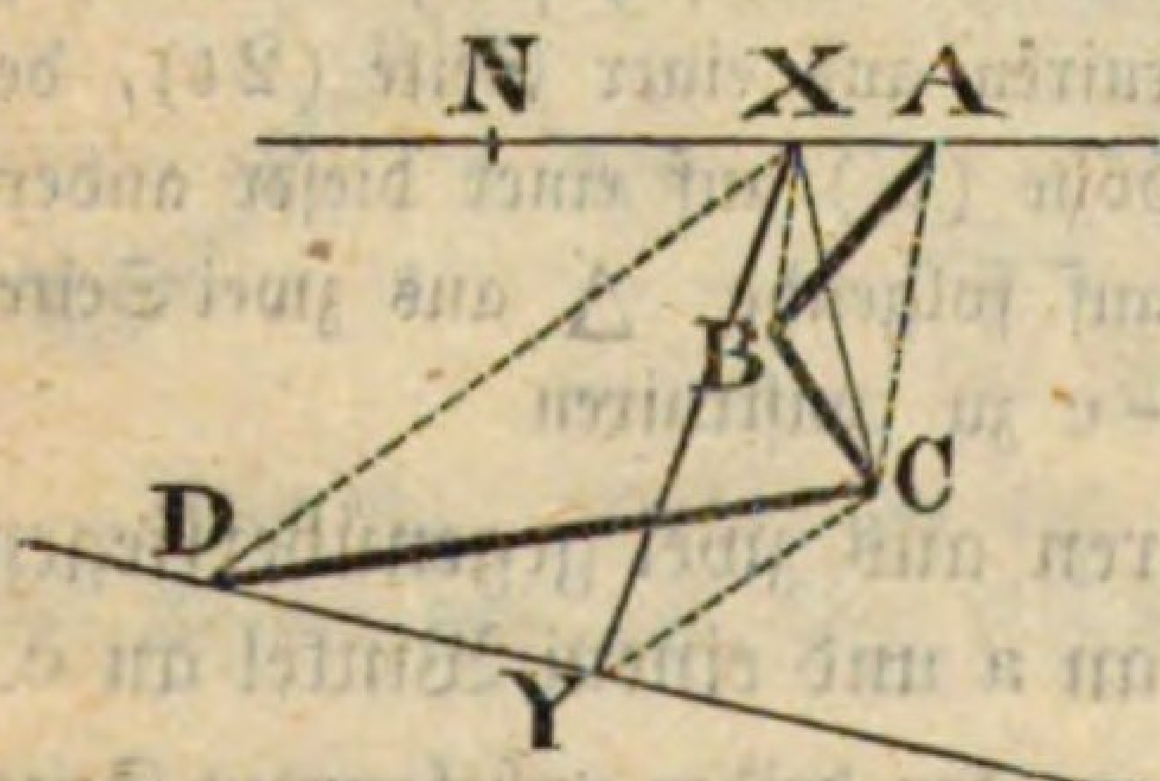
Aufg. 1. Ein Viereck ABCD in ein Dreieck zu verwandeln.



Aufl. Man ziehe die Diagonale AC, durch D mit AC eine Parallele, welche BC oder ihre Verlängerung in X schneidet, und verbinde A mit X: so ist ΔABX dem Viereck ABCD gleich.

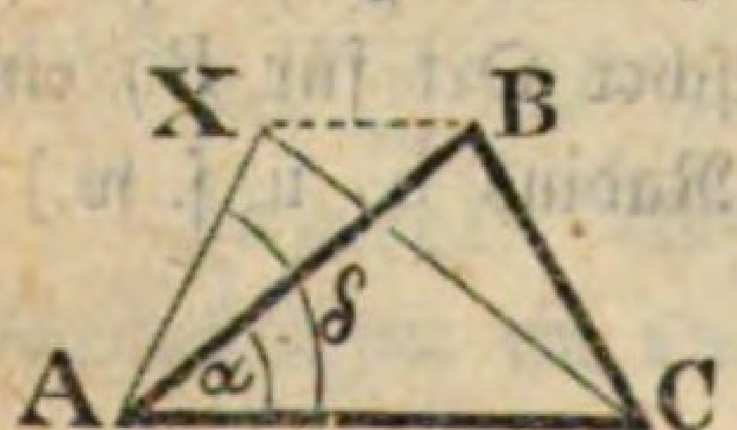
Aufg. 2. Ein Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

Analys. Man vermindert nach der Construction zur Aufg. 1. die Anzahl der Ecken nach und nach immer um eine.



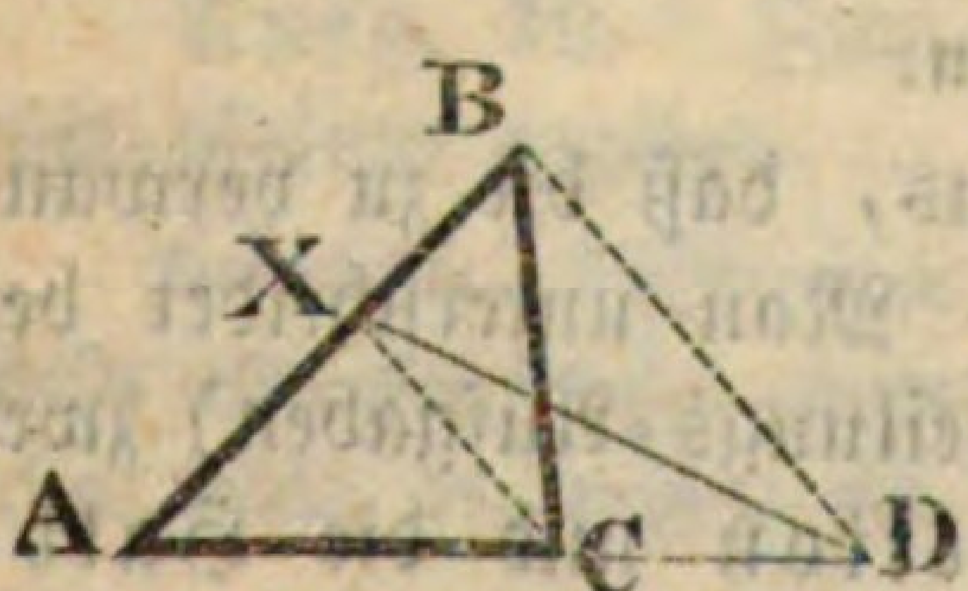
Aufg. 3. Die Grenze zweier Wiesen, welche verschiedenen Besitzern gehören, ist der Fußweg ABCD; derselbe soll gerade gelegt werden, ohne daß durch die neue gerade Grenze eine der Wiesen an Größe verliert.

Aufl. Man kann ABCD als Theil des Umfanges eines Vielecks betrachten. Die Figur zeigt die Construction. Zuerst ist B nach X, dann C nach Y verlegt; XY ist die neue Grenze. — Man kann auch noch einen Endpunkt der neuen Grenze geben, z. B. verlangen, daß dieser in N fallen soll. Man hätte dann noch YN zu ziehen und durch X eine mit YN parallele Linie zu legen. Schneidet letztere die DY in M, so wäre NM die verlangte Grenze.



Aufg. 4. Dem ΔABC statt des $\measuredangle\alpha$ einen andern Winkel δ zu geben.

Auflös. Man mache $\measuredangle$CAX $= \delta$, ziehe BX $\#$ CA und verbinde C mit X: so ist ACX das verlangte Dreieck.



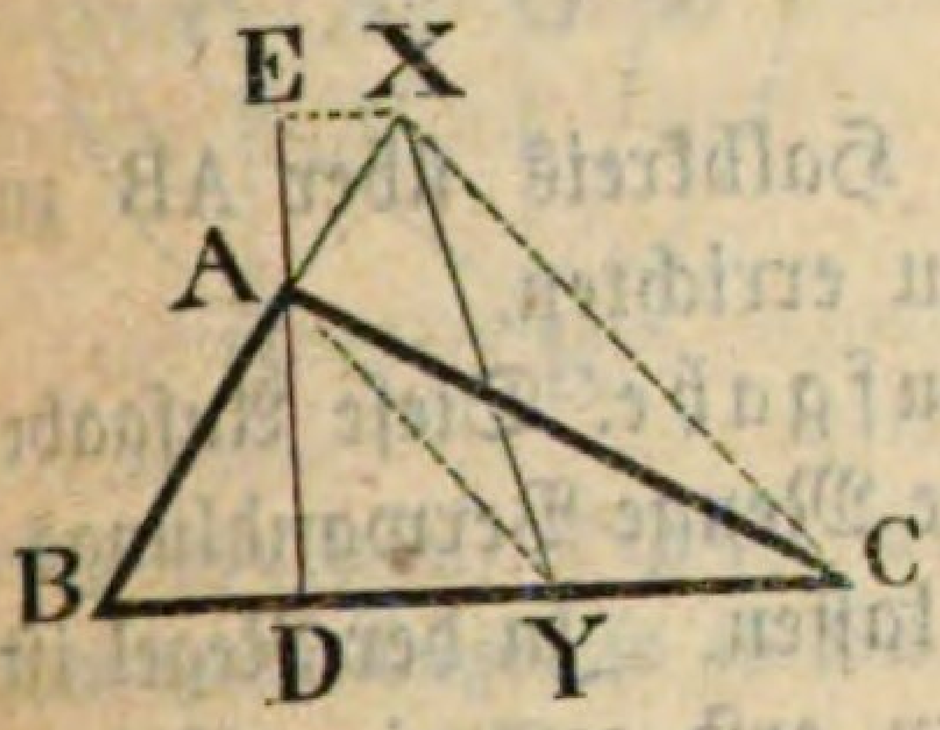
Aufg. 5. Einem ΔABC statt der Seite AC eine andere Seite AD von gegebener Länge zu geben, ohne den $\measuredangle$A zu ändern.

Aufl. Man ziehe DB, durch C die CX $\#$ DB und verbinde D mit X, so ist ΔAXD $= \Delta$ABC.

Bew. $\Delta XCD = \Delta XCB$.

Genau so ist die Construction, wenn D zwischen A und C liegt; X fällt dann in die Verlängerung von AB.

Aufg. 6. Einem Dreieck eine andere Höhe statt einer vorhandenen zu geben, ohne die Lage der Grundlinie zu ändern.



Aufl. Das ΔABC soll statt der Höhe AD die Höhe ED erhalten. Zieht man $EX \parallel BC$ und verlängert BA bis X, so ist die Aufgabe auf die vorhergehende reducirt: dem ΔABC die Seite BX zu geben. Man zieht XC, $AY \parallel XC$; ΔBXY wird das verlangte. — Ist die neue Höhe kleiner als AD, so fällt X in BA, Y in die Verlängerung der BC.

Aufg. 7. ΔABC in ein gleichschenkliges Δ zu verwandeln, so daß BC Grundlinie desselben wird. (Leicht.)

Aufg. 8. Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Aufl. Man giebt dem Dreieck einen rechten Winkel (Aufg. 4.); das Rechteck, welches die eine Kathete und die Hälfte der andern zu Seiten hat, ist das verlangte.

Aufg. 9. Das Dreieck ABC mit Beibehaltung des Winkels A so in ein anderes Δ zu verwandeln, daß die dem $\angle A$ gegenüberliegende Seite BC einer gegebenen Linie PQ parallel wird.

Analys. ΔAXY sei das verlangte. Die $\Delta\Delta AXY$ und ABC haben $\angle A$ gemein, verhalten sich also zu einander wie $AX.AY : AB.AC$; weil sie aber gleich sein sollen, so muß

$$1)\quad AX.AY = AB.AC$$

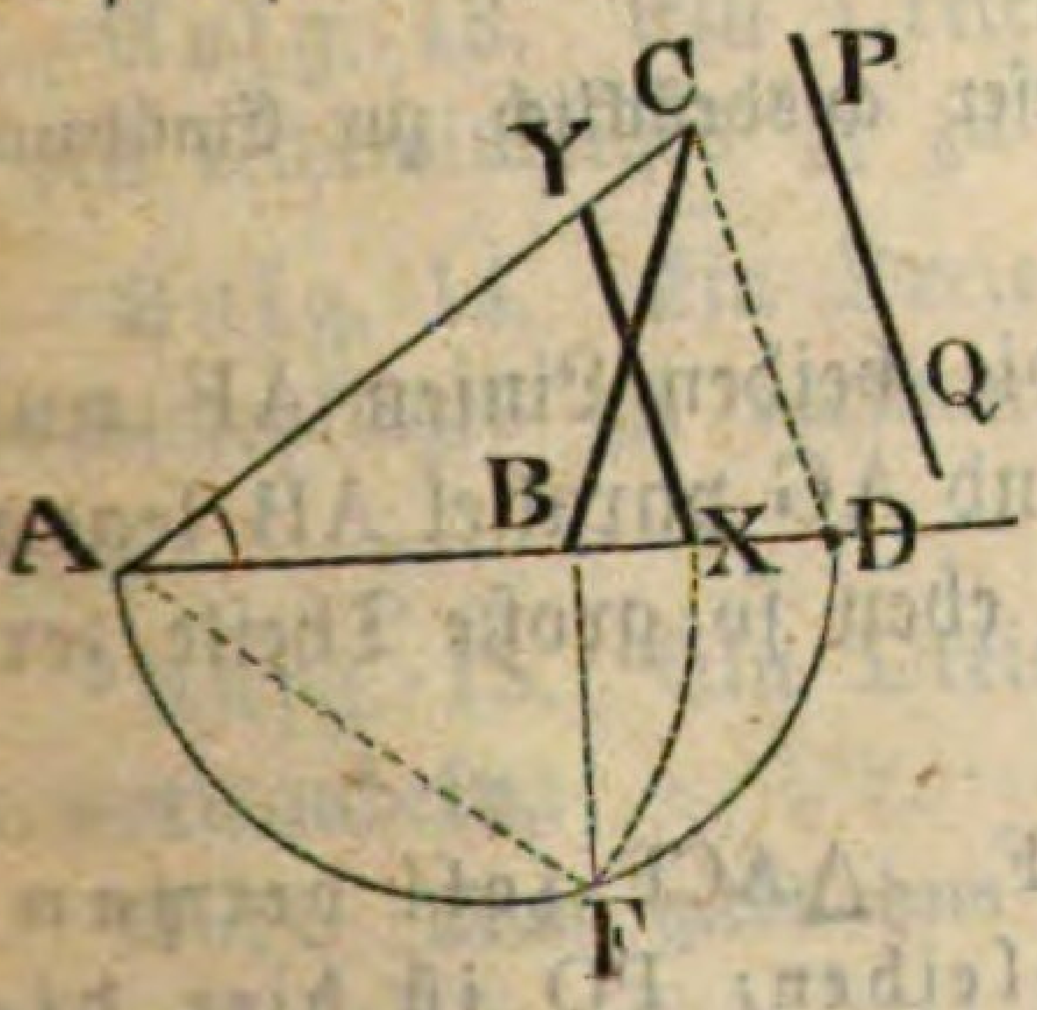
sein. Zieht man $CD \parallel PQ$ (also auch $\parallel YX$), so ist D ein Datum, und es verhält sich nun:

$$2)\quad AX : AY = AD : AC.$$

Multiplicirt man 1) mit 2), so folgt:

$$3)\quad AX^2 = AB.AD;$$

d. h. es ist AX mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und AD, also nach §. 174. I. Beisp. 4. zu construiren.



Construction. Man ziehe $CD \parallel PQ$, schlage über AD einen Halbkreis, errichte $BF \perp AD$, schlage mit AF um A einen Kreis, welcher AD in X schneiden mag, ziehe $XY \parallel CD$: so ist ΔAXY das verlangte.

Bew. Zunächst ist $XY \parallel CD \parallel PQ$; man hat also noch zu zeigen, daß $\Delta AXY = \Delta ABC$ ist. Aus $\Delta AXY \sim \Delta ADC$ folgt:

$$\begin{aligned}\triangle AXY : \triangle ADC &= AX^2 : AD^2\\ &= AF^2 : AD^2\\ &= AB.AD : AD^2\\ &= AB : AD.\end{aligned}$$

Nun hat $\triangle ABC$ zu dem $\triangle ADC$ auch das Verhältniß AB : AD; folglich ist $\triangle AXY = \triangle ABC$.

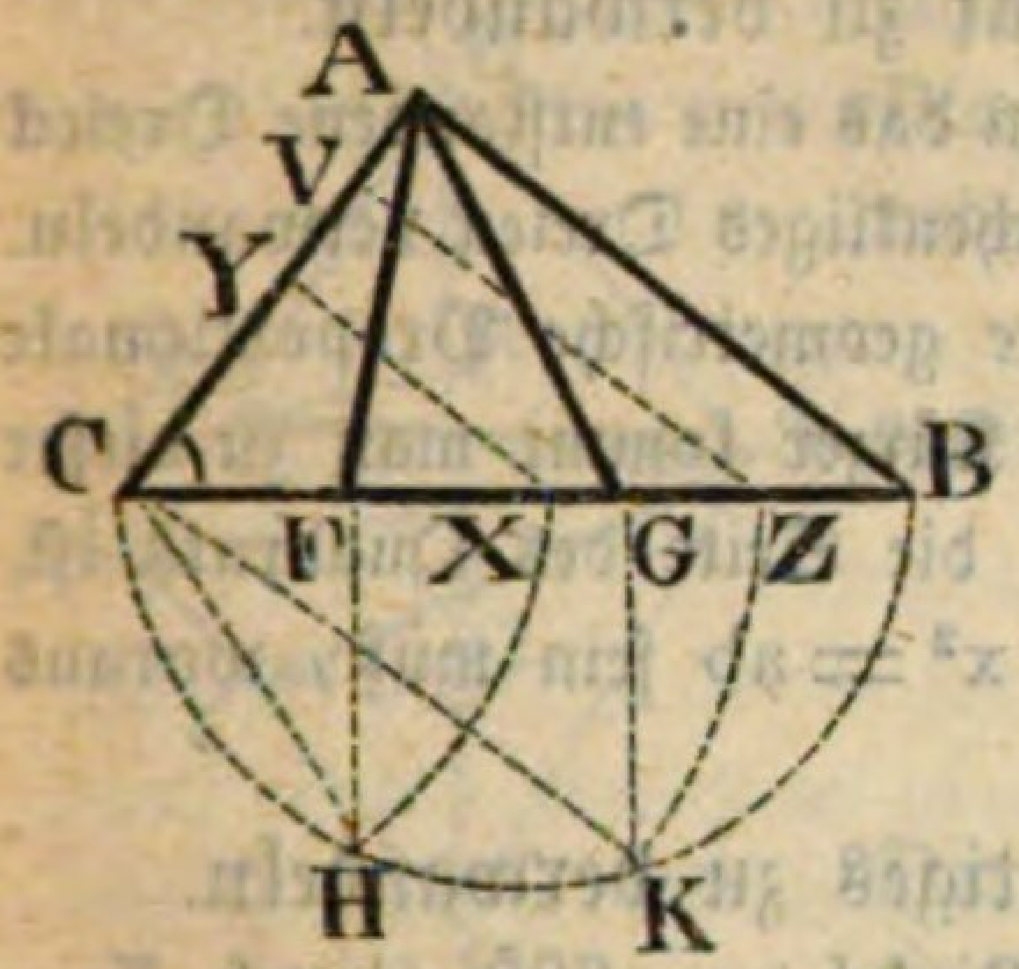
Fällt D zwischen A und B, so ist der Halbkreis über AB zu schlagen und in D eine Senkrechte auf AB zu errichten.

Bemerkung zu der vorstehenden Aufgabe. Diese Aufgabe ist deshalb besonders wichtig, weil eine große Menge Verwandlungs- und Theilungs-Aufgaben sich auf sie reduciren lassen. In der Regel ist hierbei PQ nicht unmittelbar gegeben, sondern erst aus einer besonderen Bedingung zu entnehmen; man kann dann häufig CD unmittelbar richtig ziehen, also den Punkt D erhalten, ohne PQ als besondere Linie gezeichnet zu haben. Statt der Bedingung »XY soll mit PQ parallel werden« kann z. B. verlangt werden: XY soll mit einem Schenkel des Winkels A einen bestimmten Winkel bilden (z. B. einen rechten W.), oder: XY soll von den Schenkeln des $\angle$A gleiche Theile abschneiden 2c. Bei den Anwendungen der vorstehenden Aufgabe beantworte man sich folgende Fragen: Welches Dreieck soll verwandelt werden? Welcher Winkel soll unverändert bleiben? Welche Lage hat PQ? Nachdem hierüber entschieden ist, geht man zur Construction über und muß Folgendes im Gedächtniß haben: Die Linie XY schneidet von dem einen Schenkel des Winkels A eine Länge ab, welche mittlere geometrische Proportionale zwischen diesem Schenkel selbst und derjenigen Länge ist, welche eine durch die gegenüberliegende Ecke mit PQ parallele Linie von dem Schenkel abschneidet. Welchen Schenkel des $\angle$A man nimmt, ist gleichgültig; denn man kann ja in der Figur zur vorhergehenden Aufgabe statt AX auch die Linie AY construiren, indem man durch B eine Parallele mit PQ legt und nun die mittlere Proportionale zwischen AC und der Länge construirt, welche diese Parallele von AC abschneidet.

Die beiden nächsten Aufgaben sind dem Leser ausdrücklich zur Einübung des hier Gesagten vorgelegt.

Aufg. 10. Das $\triangle ABC$ ist durch die beiden Linien AF und AG in drei Theile getheilt; man soll AF und AG parallel AB legen, so daß diese Parallelen das Dreieck in drei eben so große Theile zerlegen, wie AF und AG.

Analys. 1) Verlegung der Linie AF. $\triangle ACF$ soll verwandelt werden; $\angle ACF$ soll unverändert bleiben; PQ ist hier die

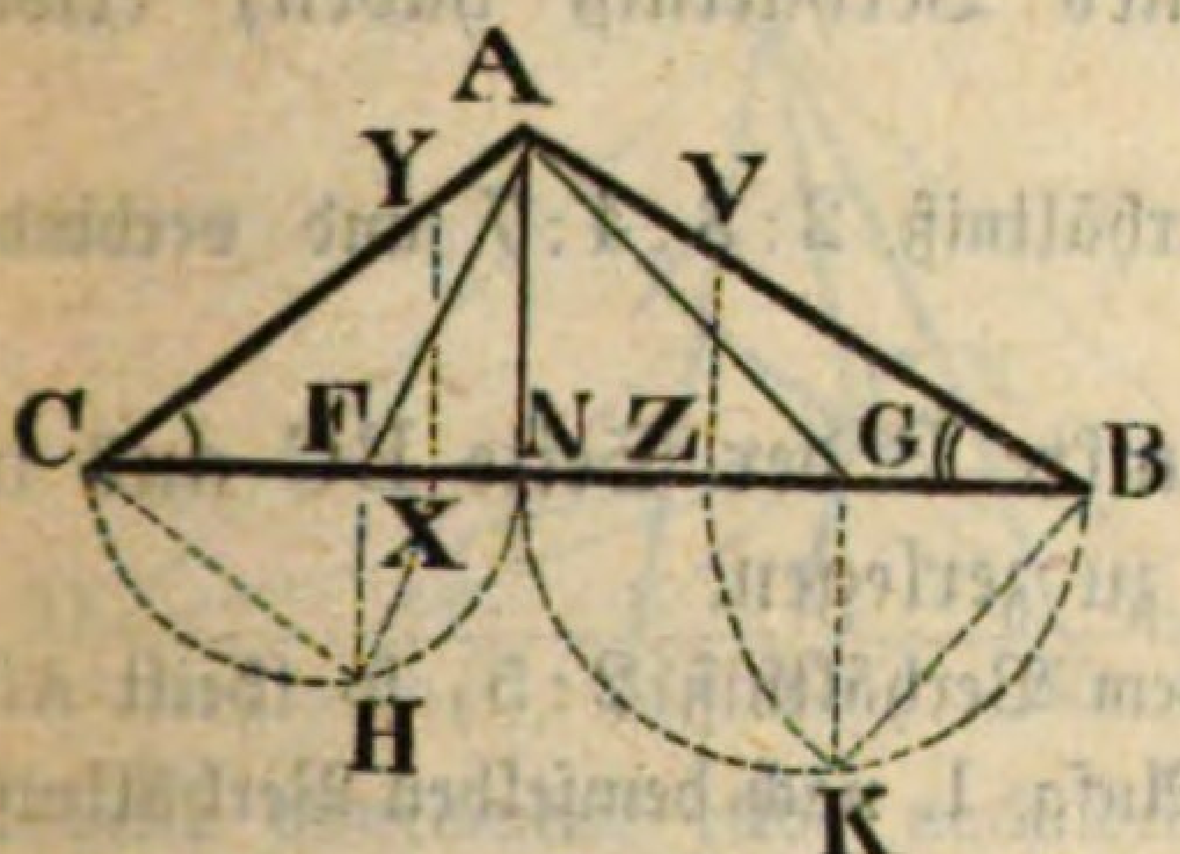


Linie AB selbst. Ist also YX die Linie AF in ihrer neuen Lage, so ist CX mittlere geometrische Proportionale zwischen CB und CF (also CX = CH).

2) Verlegung der Linie AG. (Es wäre jetzt falsch, wenn man sagen wollte: △AFG soll mit Beibehaltung des ∡F verwandelt werden, weil dann die neue Theilungslinie nicht in CA, sondern in FA enden würde.) △ACG soll verwandelt werden; ∡ACG soll unverändert bleiben; PQ ist wieder AB selbst. Ist also VZ die Linie AG in ihrer neuen Lage, so ist CZ mittlere geom. Proportionale zwischen CB und CG (also CZ = CK).

Aufg. 11. Dieselbe Aufgabe, aber AF und AG sollen der Höhe AN parallel gelegt werden.

Analys. 1) Verlegung der Linie AF. △ACF soll verwandelt werden; ∡ACF soll unverändert bleiben; PQ ist die Höhe AN.



Ist also YX die Theilungslinie AF in ihrer neuen Lage, so muß CX mittlere geometrische Proportionale zwischen CF und CN sein (also CX = CH).

2) Verlegung der Linie AG. (Weder △AFG noch △ACG ist jetzt das zu verwandelnde.) △ABG soll verwandelt werden; ∡ABG soll unverändert bleiben; PQ ist die Höhe AN. Ist also VZ die AG in ihrer neuen Lage, so ist BZ mittlere geometrische Proportionale zwischen BG und BN (also BZ = BK).

Aufg. 12. Ein Dreieck so zu verwandeln, daß es einem gegebenen anderen Dreieck ähnlich wird.

Aufl. Man gebe dem Dreieck nach Aufg. 4. zuerst einen Winkel des gegebenen anderen Dreiecks und dann nach Aufg. 9. noch einen zweiten.

Aufg. 13. Ein Dreieck mit Beibehaltung eines spitzen Winkels in ein rechtwinkliges △ zu verwandeln.

Aufg. 14. Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein gleichschenkliges zu verwandeln, so daß jener Winkel an der Spitze liegt.

Aufg. 15. Ein Dreieck in ein rechtwinkliges gleichschenkliges △ zu verwandeln.

Aufl. Man giebt dem Dreieck zuerst einen rechten Winkel; dann nach Aufg. 14.

Aufg. 16. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Zieht man die Diagonale, so kann man das eine entstandene Dreieck mit Beibehaltung des rechten Winkels in ein gleichschenkliges Dreieck verwandeln. Die Auflösung kommt darauf hinaus, die mittlere geometrische Proportionale zu den beiden Seiten des Rechtecks zu construiren. Kürzer kommt man zu dieser Construction durch die Betrachtung, daß, wenn x die Seite des Quadrats ist, und a und b die Seiten des Rechtecks sind, dann $x^2 = ab$ sein muß, woraus $a : x = x : b$ folgt.

Aufg. 17. Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Aufl. Man gebe dem Dreieck zuerst einen Winkel von 60° (durch Construction eines beliebigen gleichseitigen Dreiecks) und verfahre nach Aufg. 14. Man hat die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Seiten zu construiren, welche den Winkel von 60° einschließen (vergl. §. 69.).

§. 180.

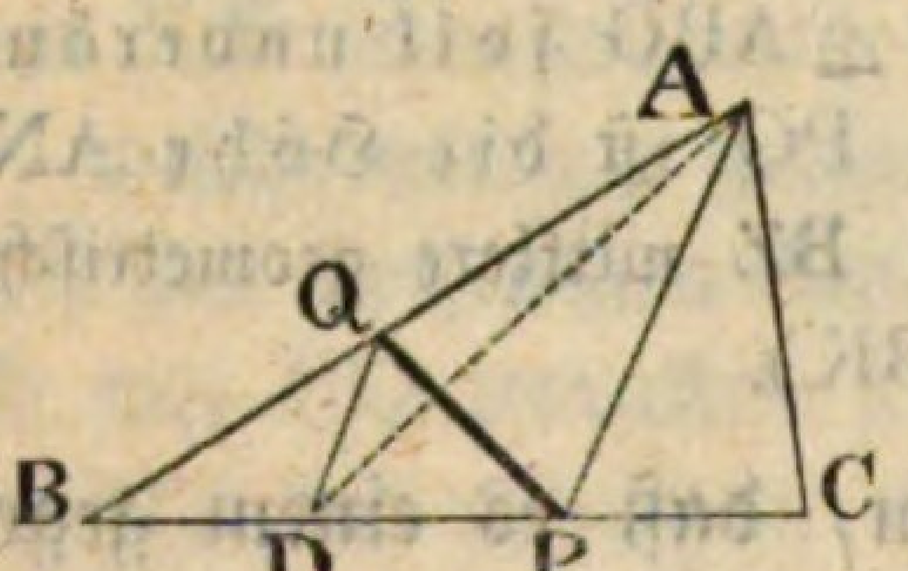
Theilungs-Aufgaben.

Aufg. 1. $\triangle ABC$ von einer Ecke A aus in vier Theile zu zerlegen, welche zu einander ein gegebenes Verhältniß haben, etwa 2:3:4:7.

Aufl. Man theile BC nach dem Verhältniß 2:3:4:7 und verbinde die Theilpunkte mit A (§. 52.,2.).

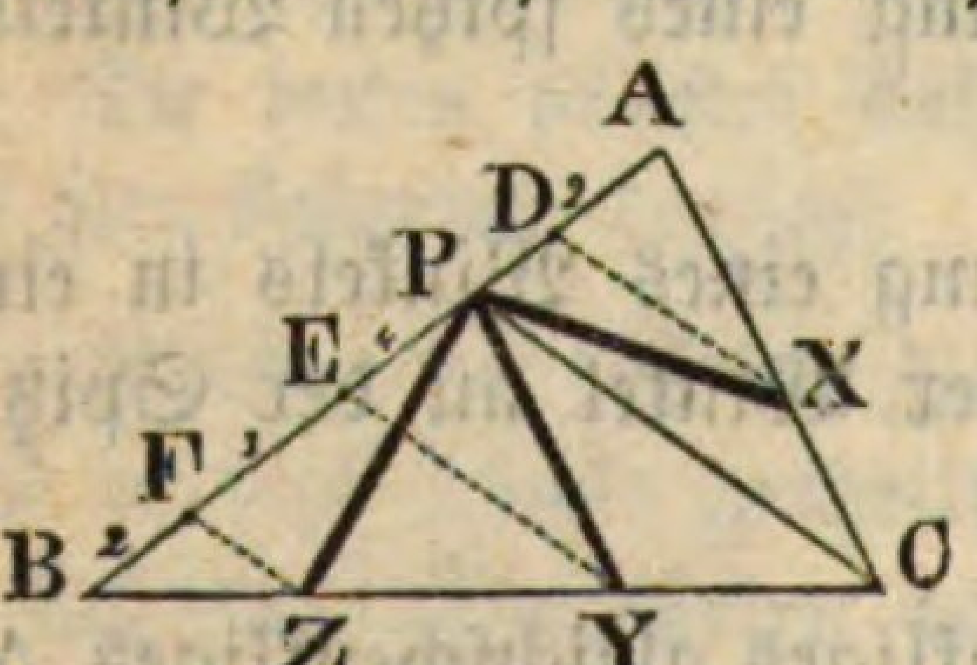
Aufg. 2. $\triangle ABC$ von einem Punkte P der Seite BC aus in zwei Theile nach dem Verhältniß 2:5 zu zerlegen.

Analys. Theilt man BC in D nach dem Verhältniß 2:5, so theilt AD das $\triangle ABC$ nach Aufg. 1. nach demselben Verhältniß. Man hat sonach nur dem $\triangle ABD$ statt der Seite BD die Seite BP zu geben. Bei der Construction wird AD selbst nicht gebraucht.



Construct. Man theile BC in D so, daß sich $BD : DC = 2 : 5$ verhält, ziehe PA und durch D eine Parallele DQ mit PA; PQ ist dann die gesuchte Theilungslinie.

Aufg. 3. $\triangle ABC$ von einem Punkte P der Seite AB aus in 4 Theile nach dem Verhältniß 2:4:3:2 zu theilen.

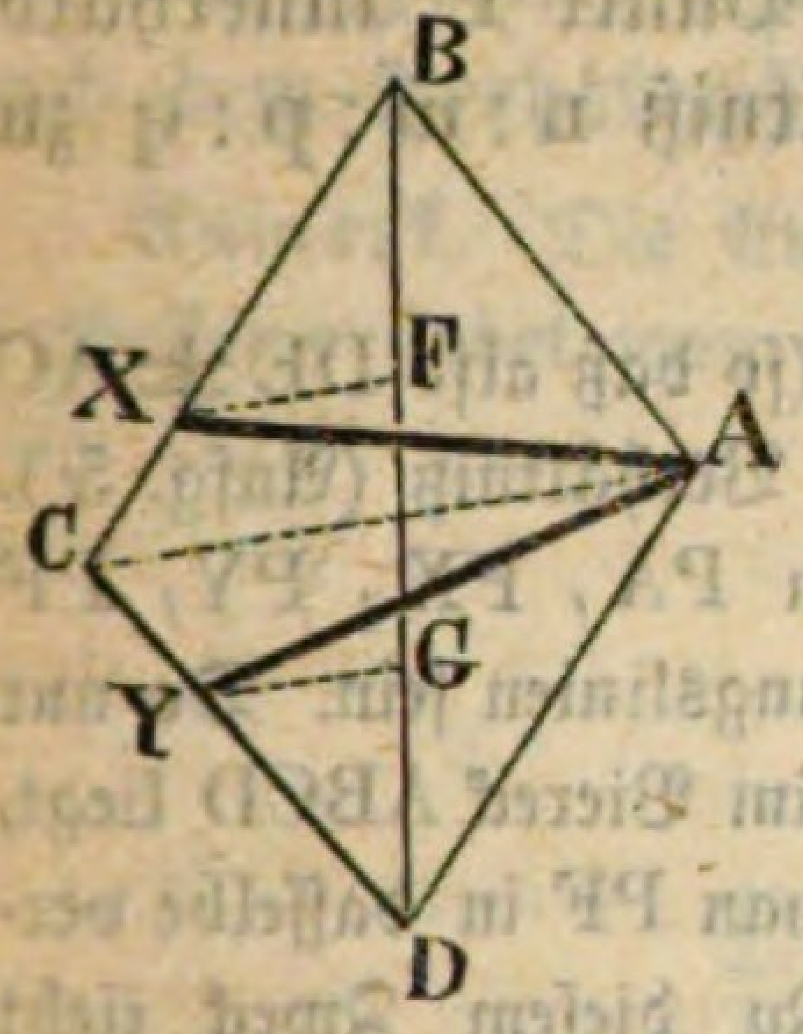


Analys. nach Aufg. 2.

Construct. Man theile AB in D, E und F nach dem Verhältniß 2:4:3:2, ziehe PC und parallel mit PC die Linien DX, EY und FZ: so werden PX, PY und PZ die gesuchten Theilungslinien.

Aufg. 4. Ein Viereck ABCD von einer Ecke A aus in 3 gleiche Theile zu zerlegen.

Aufl. Man theile die Diagonale BD in drei gleiche Theile und ziehe



durch die Theilpunkte F und G Parallelen mit der andern Diagonale AC, nämlich FX und GY; dann sind AX und AY die gesuchten Theilungslinien.

Bew. Denkt man sich F und G mit A und C verbunden, so ist leicht zu zeigen,

daß $\triangle ABX = \triangle ABF + \triangle CBF$,

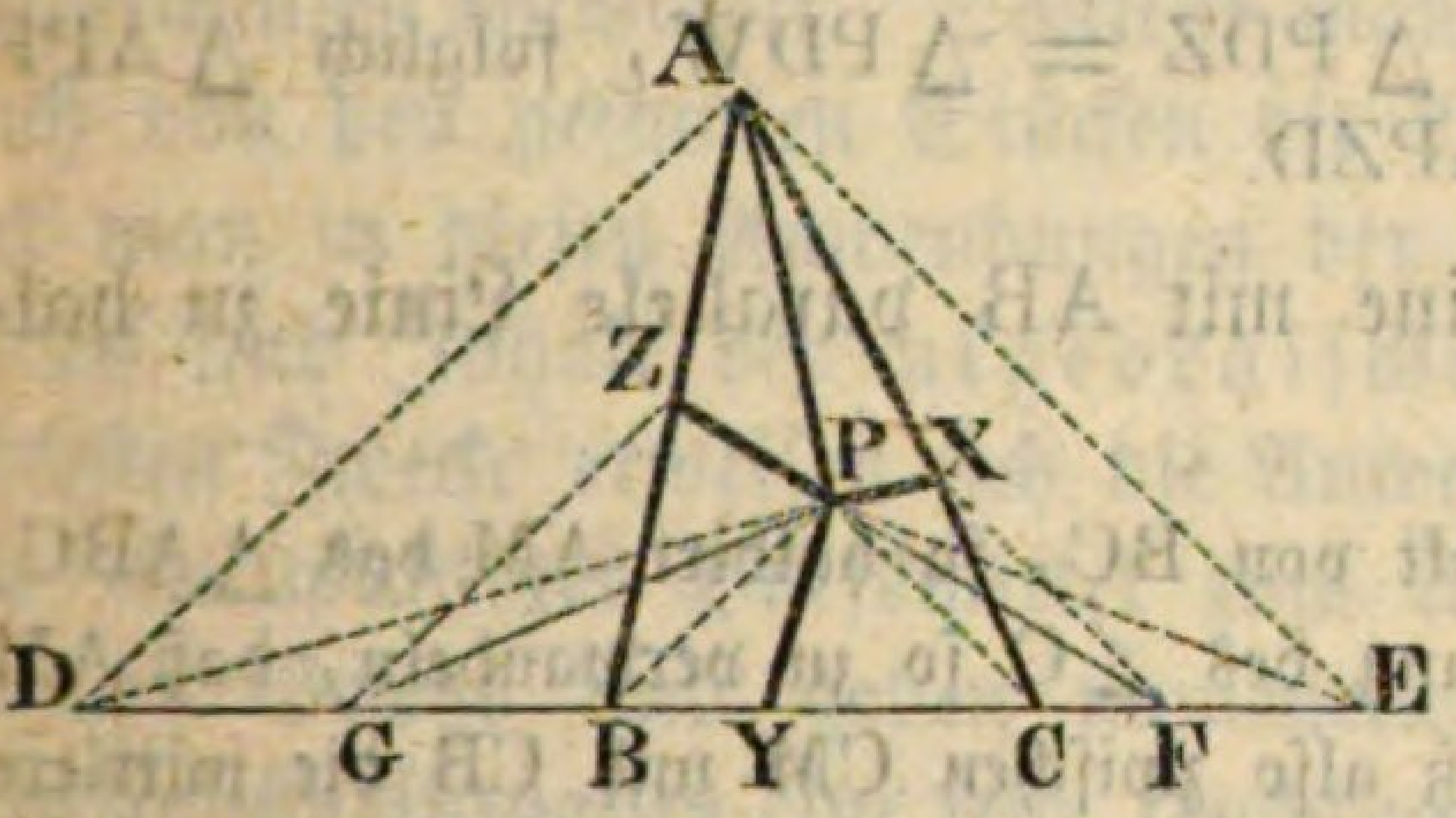
$\square AXCY = \triangle AFC + \triangle AGC$,

$\triangle ADY = \triangle ADG + \triangle CDG$ ist.

Die rechten Seiten dieser drei Gleichungen sind aber einander gleich.

Aufg. 5. Ein Dreieck ABC von einem Punkte P innerhalb desselben in beliebig viele Theile nach gegebenem Verhältniß zu theilen.

Analys. Die Aufgabe ist eine unbeschränkt unbestimmte, wird aber zu einer bestimmten, wenn man eine Theilungslinie giebt. Wir wollen PA als eine solche annehmen. Bei der Analysis kann man davon ausgehen, daß die Auflösung bekannt sein würde, wenn P eine Ecke des Dreiecks wäre. Hieraus nimmt man Veranlassung, zunächst $\triangle ABC$ so zu verwandeln, daß P eine Ecke



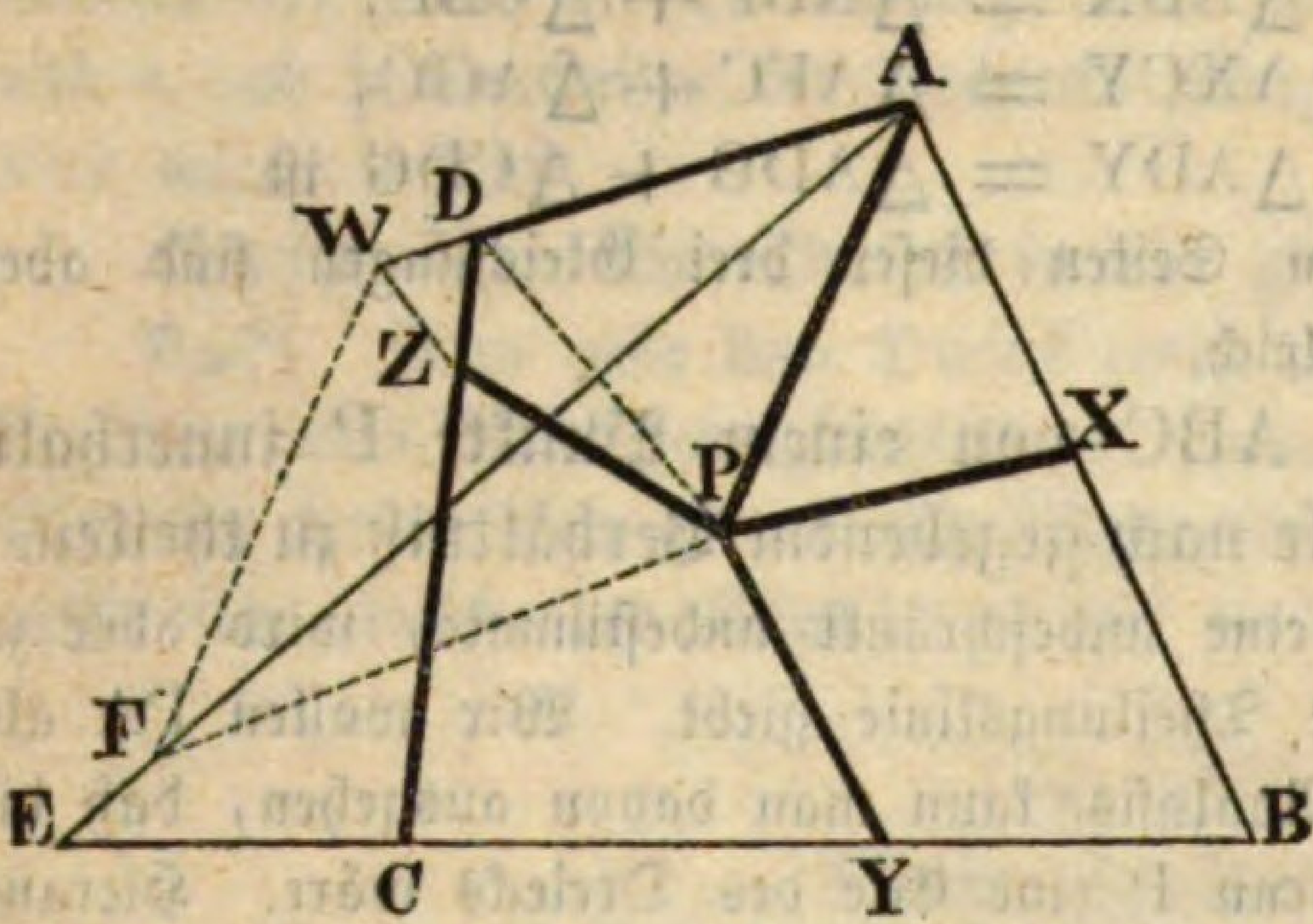
wird, BC aber die Richtung einer Seite bleibt. Man zieht daher PB und PC und parallel mit ihnen AD und AE. Das $\triangle PDE$ wird dann dem $\triangle ABC$ gleich. Man kann nun $\triangle PDE$ von P aus nach dem gegebenen Verhältniß theilen, indem man DE nach diesem Verhältniß theilt. Wir wollen vier Theile annehmen, etwa nach dem Verhältniß n : m : p : q. Sind also G, Y und F so bestimmt, daß sich verhält:

$$DG : GY : YF : FE = n : m : p : q,$$

so sind PG, PY und PF die Theilungslinien des $\triangle PDE$, und es fragt sich nur, wie wir von ihnen zu den Theilungslinien des $\triangle ABC$ übergehen können. Nun erkennt man aber leicht, daß das Viereck $APYB = \triangle PYD$ ist; man müßte also nur die Theilungslinie PG in dies Viereck übertragen. Dies geschieht aber einfach durch die mit DA parallele Linie GZ. Durch sie erhält man PZ und $\triangle PBG = \triangle PBZ$, folglich $\triangle PYG$ gleich dem Viereck PYBZ; daher auch $\triangle PGD = \triangle PZA$. Ganz ebenso trägt man PF aus dem $\triangle PYE$ in das ihm gleiche Viereck APYC über, indem man FX $\#$ EA zieht und P mit X verbindet. Es wird dann $\triangle PYF$ gleich dem Viereck PYCX und $\triangle PFE = \triangle PXA$. Es ist sonach $\triangle ABC$ durch PA, PX, PY, PZ der Aufgabe gemäß getheilt, weil die Theile den Theilen des $\triangle PDE$ gleich sind. Bei der Construction hat man nicht nöthig, die Linien PD, PG, PF und PE zu ziehen. Das Wesentliche der Construction besteht also darin: man construirt zuerst die Linie DE, theilt sie nach dem gegebenen Verhältniß und verbindet die Theilpunkte mit P. Diejenigen Theilungslinien, welche ihrer ganzen Länge nach in das $\triangle ABC$ fallen (hier PY), bleiben unverändert, die andern verlegt man in das $\triangle ABC$.

Aufg. 6. Ein Viereck ABCD von einem Punkt P innerhalb desselben aus in 4 Theile nach gegebenem Verhältniß n : m : p : q zu zerlegen.

Aufl. Man verwandele das Viereck in das $\triangle$ABE (so daß also DE $\parallel$ AC ist) und zerlege $\triangle$ABE von P aus nach dem gegebenen Verhältniß (Aufg. 5.). Es mögen PA, PX, PY, PF die Theilungslinien sein. Da nur PF nicht im Viereck ABCD liegt, so muß man PF in dasselbe verlegen. Zu diesem Zweck zieht man FW $\parallel$ PA. Da W nicht zwischen A und D fällt, so zieht man DP und nun WZ $\parallel$ DP. Verbindet man P mit Z, so ist PZ die vierte Theilungslinie.



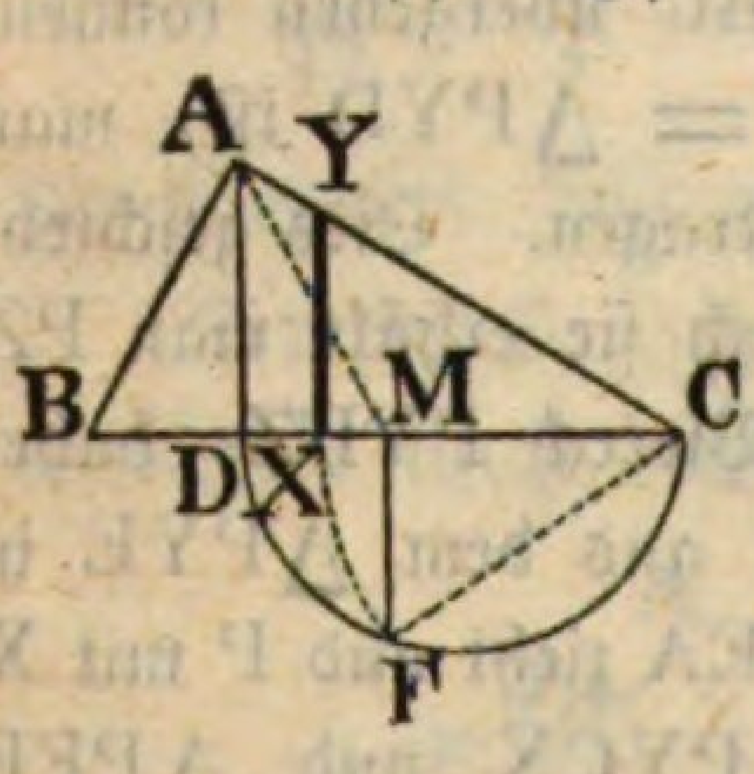
Bew. Man hat nur zu zeigen, daß $\triangle$ APF = $\square$ APZD ist. Denkt man sich noch PW gezogen, so ist $\triangle$ APF = $\triangle$APW; ferner $\triangle$ PDZ = $\triangle$ PDW, folglich $\triangle$ APF = $\triangle$APD + $\triangle$PDZ, d. h. = $\square$APZD.

Aufg. 7. $\triangle$ABC durch eine mit AB parallele Linie zu halbiren.

Analys. Ist M der Mittelpunkt von BC, so halbirt AM das $\triangle$ABC; man hat nun $\triangle$ACM mit Beibehaltung des $\measuredangle$C so zu verwandeln, daß AM $\parallel$ AB wird (§. 179. Aufg. 9.), muß also zwischen CM und CB die mittlere geometrische Proportionale construiren.

Aufg. 8. $\triangle$ABC durch eine mit der Höhe AD parallele Linie zu halbiren.

Analys. Ist M der Mittelpunkt von BC, so ist $\triangle$ACM mit Beibehaltung des $\measuredangle$ C so zu verwandeln, daß AM $\parallel$ AD wird. (Läge M links von D, so würde man $\triangle$ABM verwandeln müssen.



Construct. Man schlage über CD einen Halbkreis, errichte MF $\perp$ CD, schlage um C mit CF einen Kreis, welcher BC in X schneidet, ziehe XY $\parallel$ DA: so ist XY die gesuchte Theilungslinie.

Anmerk. Es ist wohl leicht einzusehen, daß auf dieselbe Weise die allgemeine Aufgabe zu lösen ist: $\triangle$ABC nach gegebenem Verhältniß so in beliebig viele Theile zu zerlegen, daß die Theilungslinien einer gegebenen Linie parallel sind. Man theilt zunächst das Dreieck von einer Ecke aus und legt dann die Theilungslinien der gegebenen Linie parallel. Ein Beispiel ist die folgende Aufgabe, deren Auflösung dem Leser überlassen sei.

Aufg. 9. Im $\triangle$ABC sei M der Mittelpunkt von BC; man

soll das ΔABC durch 3 mit AM parallele Linien in vier Theile nach dem Verhältniß $1:2:4:2$ zerlegen.

Anmerk. Die Aufgabe »ein Dreieck von einem Punkt außerhalb desselben zu theilen« findet man in der algebraischen Analysis.

Siebentes Kapitel.

Die algebraische Geometrie.

§. 181.

Wie die Arithmetik (im engeren Sinne), so gestattet auch die Algebra eine Anwendung auf die Geometrie, d. h. man kann aus bekannten Stücken oder gegebenen Bedingungen einer Figur dadurch unbekannte Stücke zu finden suchen, daß man letztere durch x, y, z... bezeichnet, so viel Gleichungen, als Unbekannte sind, ansetzt und die Unbekannten entwickelt. Schließt man sowohl von den gegebenen, als auch von den gesuchten Stücken die Winkel im Allgemeinen aus, so hat man in diesen Anwendungen der Algebra auf die Geometrie den Zweck und Inhalt der algebraischen Geometrie. Neben diesem nächsten Zwecke erweisen sich die Anwendungen der Algebra überhaupt als ein wichtiges Hülfsmittel zum Auffinden und Erkennen geometrischer Gesetze und geben namentlich für die Auflösung der Constructions-Aufgaben eine sehr fruchtbare Methode, die algebraische Analysis, welche einen besonderen Theil der algebraischen Geometrie bildet.

Die Gleichungen, welche man zur Entwicklung der Unbekannten ansetzt, gehen entweder unmittelbar aus der Aufgabe hervor, oder mittelbar durch Benutzung geometrischer Gesetze. Von diesen Gesetzen kommen am häufigsten der Pythagoreische Lehrsatz und die aus parallelen Linien und ähnlichen Dreiecken entspringenden Proportionen zur Anwendung.

Da man in der Algebra die Rechnungen mit unbenannten Zahlen ausführt, so muß man darauf achten, daß in allen angesetzten Gleichungen die Benennungen sich fortheben. Um daher Reductionen zu vermeiden, halte man immer darauf, daß alle Linien, bekannte und unbekannte, durch dieselbe Einheit ausgedrückt sind, die Flächen dann durch die entsprechende Flächeneinheit.

§. 182.

Da man in der algebraischen Geometrie sehr häufig mit Buchstaben rechnet, theils um Untersuchungen allgemeiner zu führen, theils

auch um Formeln für einzelne häufig wiederkehrende Fälle zu bilden, so möge der Leser in Bezug hierauf Folgendes nicht unbeachtet lassen:

Bezeichnen alle Buchstaben a, b, c, ... Linien, welche auf dieselbe Einheit sich beziehen, so haben a^2, ab, bc, ... die geometrische Bedeutung von Flächen; daher nennt man a, b, c, ... Ausdrücke von der ersten Dimension (Abmessung), a^2, ab, ... Ausdrücke von der zweiten Dimension; analog heißen $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{ab}{c^2}$, ..., welche als Verhältnisse von Linien oder Flächen zu einander abstracte Zahlen sind, Ausdrücke von der 0ten Dimension. In der Stereometrie haben Producte dreier Linien (die natürlich auch gleiche sein können) die Bedeutung der Inhalte von Körpern; daher heißen abc, a^2b, c^3, ... Ausdrücke von der dritten Dimension. Diese Bezeichnung dehnt man endlich auf Producte von vier und mehr Factoren aus und nennt einen Ausdruck von der nten Dimension, wenn er ein Product von n Buchstaben ist (unter denen wieder beliebig viele einander gleich sein können), wenn auch mit ihm der Begriff der Räumlichkeit nicht mehr verbunden werden kann. So sind z. B. a^3bc, $\frac{2}{3}a^5$, a^2bc^2 von der fünften Dimension, $a^n b^m c^2$ von der $n + m + 2$ten Dimension.

Wenn nun Ausdrücke, welche die zweite Dimension übersteigen, weder Linien, noch Flächen bedeuten, so können doch Quotienten solcher Ausdrücke, oder Wurzeln aus ihnen, Linien und Flächen vorstellen. So ist z. B., weil ab eine Fläche, $\sqrt{a^2 + b^2}$ eine Linie (Hypotenuse zu den Katheten a und b) ist und $\frac{a}{b}$, $\frac{ac}{de}$, $\frac{a}{c}$ abstracte Zahlen sind:

$$\frac{a}{b} \times \frac{ac}{de} \times ab = \frac{a^3c}{de} \text{ eine Fläche,}$$

$$\frac{a}{c} \times \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{a^4 + a^2b^2}}{c} \text{ eine Linie.}$$

Summen von zwei oder mehr Gliedern heißen homogen, wenn alle Glieder von derselben Dimension sind, z. B. $a^2 + bc$, $a^3 - 3a^2b + abc$. Zunächst ist klar, daß nur homogene Ausdrücke eine räumliche Bedeutung haben können; und zwar bedeuten sie Linien, Flächen, Körper, je nachdem sie von der 1ten, 2ten, 3ten Dimension sind; hingegen bedeutet auch bei höheren Dimensionen der Quotient solcher Ausdrücke eine Linie oder Fläche, wenn der Zähler resp. um eine oder um zwei Dimensionen höher, als der Nenner ist. Es läßt sich dies leicht in jedem einzelnen Falle nachweisen. z. B. $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$ ist eine

Linie; denn man kann zunächst für den Nenner, der eine Fläche ist, c^2 setzen und erhält

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = \frac{a^3+b^3}{c^2} = \frac{a^2}{c^2}\cdot a + \frac{b^2}{c^2}\cdot b.$$

Bei einer Wurzel muß der Radicand homogen sein, der Grad seiner Dimension durch den Wurzelexponenten theilbar; der Quotient giebt die Dimension der Wurzel. z. B. $\sqrt{a^4+b^4}$ ist eine Fläche; denn es ist

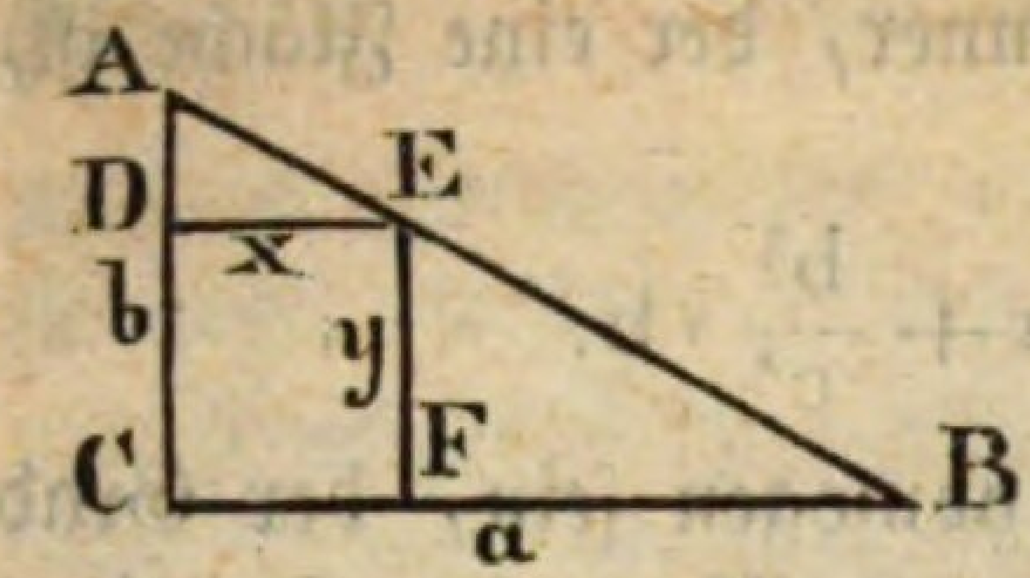
$$\sqrt{a^4+b^4} = \sqrt{a^2\left(a^2+\frac{b^4}{a^2}\right)} = a \times \sqrt{a^2+\frac{b^2}{a^2}\cdot b^2}.$$

Da der Radicand eine Fläche ist, so kann man c^2 für ihn setzen und erhält $a \times \sqrt{c^2} = a \times c$.

Hieraus ergiebt sich nun Folgendes für die Anwendungen der Algebra auf die Geometrie: Bezeichnet man alle Linien einer Figur, bekannte und unbekannte, durch einfache Buchstaben, alle Inhalte von Flächen aber durch Ausdrücke von der zweiten Abmessung (a^2, ab, u. s. w.) und setzt nun eine Gleichung an, indem man eine Fläche, oder Linie, oder das Verhältniß zweier Linien oder Flächen zu einander doppelt ausdrückt: so müssen alle Glieder auf beiden Seiten resp. von der 2ten, oder 1ten, oder 0ten Dimension sein. Löst man nun diese Gleichung auf, wobei man doch immer auf beiden Seiten gleiche Operationen ausführt, so müssen nothwendig im ganzen Verlauf der Rechnung beide Seiten immer homogene Ausdrücke von gleicher Dimension bleiben, wiewohl der Grad der Dimension sich ändern kann. Abgesehen von der geregelteren Form der Gleichungen und ihrer Endresultate, *liegt in dieser Eigenschaft der Gleichungen eine vortreffliche Controle der Rechnung*, deren Nutzen selbst der Geübtere sich ungern entgehen läßt. Um ein Beispiel anzuführen, so würde man aus dem Endresultat $x = \frac{a}{b}\sqrt{ab^3 - \frac{2}{3}abc}$ sofort erkennen, daß in der Rechnung wenigstens zwei Fehler gemacht worden sind. — Will man Flächen nicht durch Ausdrücke von der zweiten Dimension ausdrücken, so markire man diese Dimension wenigstens durch die Wahl großer Buchstaben für die Inhalte.

Beisp. Im rechtwinkligen $\triangle$ABC das Rechteck DEFC so zu bestimmen, daß $\triangle$EFB mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden andern Theilen des $\triangle$ABC wird.

Aufl. Bezeichnet man die Katheten mit a und b, die Seiten des Rechtecks mit x und y, so folgt unmittelbar aus der Aufgabe und dann aus Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$BFE und BCA:



$$1)\quad \frac{x}{2}\cdot(b-y) : \frac{a-x}{2}\cdot y = \frac{a-x}{2}\cdot y : xy$$

$$2)\quad a-x : y = a : b.$$

Beide Seiten jeder Gleichung sind als Verhältnisse von der 0ten Dimension. Aus 2) folgt:

$$3)\quad y = \frac{b}{a}(a-x).$$

Aus 1) ergiebt sich:

$$(a-x)^2 . y = 2x^2(b-y).$$

Jede Seite ist hier von der 3ten Dimension. Setzt man den Werth von y aus 3) ein, so folgt:

$$(a-x)^2 \cdot \frac{b}{a}(a-x) = 2x^2\left[b - \frac{b}{a}(a-x)\right]$$

oder

$$(a-x)^3 = 2x^3,$$

also:

$$a - x = x\sqrt[3]{2}, \text{ daher}$$

$$x = \frac{a}{1+\sqrt[3]{2}} \text{ und } y = \frac{b\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

In einzelnen Fällen kann eine Aufgabe Bedingungen enthalten, welche den Gleichungen die oben angegebene Eigenschaft nehmen.

Beisp. Ein Quadrat zur Seite a Fuß, soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen Umfang eben so viel Fuß hat, als der Inhalt Quadratfuß.

Aufl. Die eine Seite des Rechtecks möge x, die andere y Fuß lang sein, so ist

$$1)\quad xy = a^2$$

$$2)\quad 2x + 2y = a^2.$$

Die zweite Gleichung ist hier nothwendig eine Gleichung zwischen abstracten Zahlen und zeigt, wenn man jeder Seite ihre geometrische Bedeutung unterlegt, einen Widerspruch.

Man erhält $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a^2}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{a^2 - 16}.$

Anmerk. Der Leser sei noch auf einen Vortheil aufmerksam gemacht, den die algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben gewährt, wenn man die bekannten Stücke durch Buchstaben bezeichnet. Hat man nämlich ein unbekanntes Stück x einer Figur durch die bekannten Stücke ausgedrückt, so hat man in der gefundenen Formel nicht nur das Mittel zur Berechnung dieses unbekannten Stückes in allen Figuren, in welchem dieselben bekannten Stücke durch bestimmte Zahlen gegeben sind, sondern die Formel kann auch zur Berechnung eines *gleichartigen* Stückes y *derselben* Figur dienen, wenn nur die gegebenen Stücke zu x dieselbe Lage haben, wie diese Stücke, *in anderer Ordnung genommen*, zu y. Um y zu finden, hat man nur nöthig, *die Buchstaben in der gefundenen Formel so zu vertauschen, daß die neue Formel*

dem Sinne nach in Bezug auf y eben so lautet, wie die ursprüngliche Formel in Bezug auf x.

Der Grund liegt in der allgemeinen Gültigkeit, welche eine Buchstaben-Formel hat. Sind z. B. in einem Dreieck die Seiten a, b, c gegeben, und hat man durch sie die Höhe x auf a gefunden, so gilt natürlich die Auflösung für jeden Zahlenfall. Sind etwa die Seiten 13′, 14′ und 15′ gegeben, und wird die zu 13′ gehörige Höhe gesucht, so muß man in jene Formel $a = 13$ setzen, und 14 und 15 in beliebiger Ordnung statt b und c. Wäre aber die Höhe auf 14′ die gesuchte, so würde man $a = 14$ setzen, und 13 und 15 statt b und c. Sind n, m, p die Seiten, und wird die Höhe auf p gesucht, so setzt man $a = p$, und n und m statt b und c.

Aber ganz mit demselben Rechte kann man, wenn bei den gegebenen Seiten a, b, c die Höhe y auf b gesucht wird, in jene Formel b statt a setzen, und a und c in beliebiger Ordnung statt b und c; d. h. man braucht nur a mit b zu vertauschen, weil x zu a, b, c dieselbe Lage hat, wie y resp. zu b, a, c oder zu b, c, a. Die Formel für y wird richtig, weil sie in Bezug auf y, b, a, c dem Sinne nach eben so lautet, wie die Formel für x in Bezug auf resp. x, a, b, c. — Der Leser wird in der Folge zahlreiche Beispiele hierzu finden; ein Fall mag noch angeführt werden: Sind die 3 Seiten eines ebenen (oder sphärischen) Dreiecks gegeben, und hat man zur Berechnung eines Winkels durch die Seiten eine Formel gefunden, so dient sie zur Berechnung jedes Winkels; man muß nur die Buchstaben (Seiten) richtig vertauschen.

Das Gesagte findet noch eine andere Anwendung. Hat man durch gegebene Stücke einer Figur ein unbekanntes Stück x gefunden, so kann man dasselbe Stück x durch Vertauschung der Buchstaben durch andere Stücke der Figur ausdrücken, nur müssen diese Stücke jenen gleichartig sein und zu einander und zu x dieselbe Lage haben, wie jene zuerst gegebenen Stücke. Sind z. B. a und b zwei Seiten eines Dreiecks, und ist h die Höhe auf a, so ist die dritte Seite x nach dem Pythagoreischen Lehrsatze:

$$x = \sqrt{h^2 + (a - \sqrt{b^2 - h^2})^2}.$$

Ist aber h die Höhe auf b, so vertauscht man a mit b und erhält richtig:

$$x = \sqrt{h^2 + (b - \sqrt{a^2 - h^2})^2}.$$

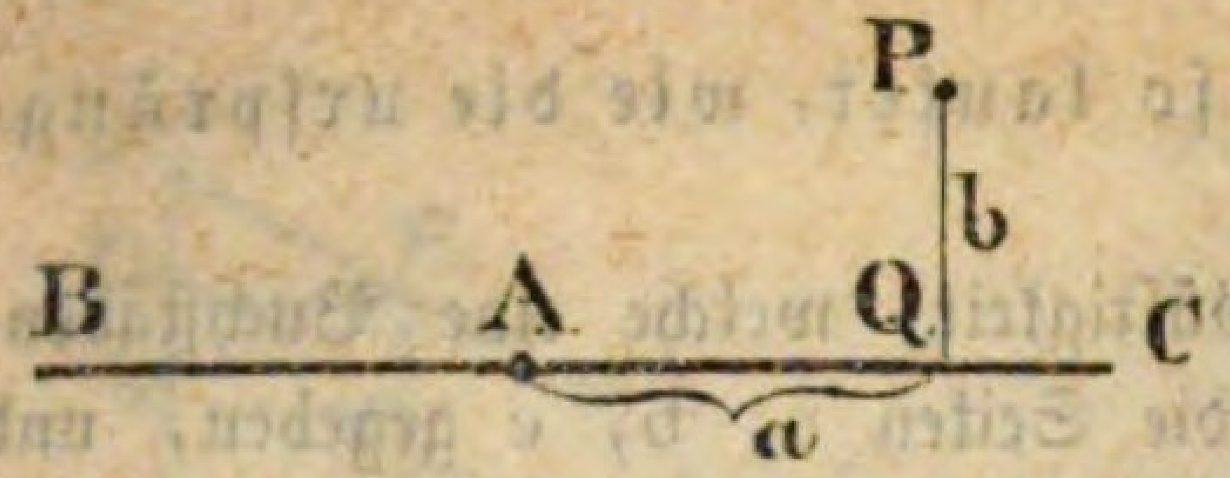
Hat man den Inhalt eines Dreiecks durch die drei Seiten a, b, c ausgedrückt, so muß die gefundene Formel richtig bleiben, wenn man die Seiten beliebig mit einander vertauscht; in einzelnen Fällen kann sie sogar ganz unverändert bleiben und ist dann eine symmetrische Formel. Beispiele zu diesen zwei Fällen sind die Formeln I. und II. in §. 185.

§. 183.

Von den Coordinaten. Positive und negative Coordinaten-Werthe.

I. Rechtwinklige (orthogonale) Coordinaten.

Denkt man sich in einer Ebene eine Linie BC ihrer Richtung nach gegeben, und in derselben einen Punkt A, so kann die Lage eines



beliebigen Punktes P der Ebene dadurch bestimmt werden, daß man PQ ⊥ BC fällt und die auf eine bestimmte Längeneinheit bezogenen Zahlenwerthe der beiden Linien AQ und QP giebt. Ist etwa AQ = a, QP = b, so ist durch a und b die Lage des Punktes P bestimmt, wenn man die Richtungen dieser Linien als bekannt annimmt. Man nennt AQ und QP die Coordinaten des Punktes P; im Besonderen heißt AQ seine Abscisse, QP seine Ordinate, die Linie BC die Abscissenlinie, der Punkt A der Anfangspunkt der Abscissen. Die Zahlen a und b heißen die Coordinatenwerthe des Punktes P (gewöhnlich auch nur die Coordinaten). Häufig legt man noch durch A eine Senkrechte zu BC, und nennt dann diese und BC die Coordinaten-Axen.

Drückt man nun a und b als Differenzen zweier Linien aus, etwa a = c — d, b = e — f, so kann man P construiren, indem man zuerst AM = c macht und von N aus nach links MQ = d abträgt; dann errichtet man QN ⊥ BC, macht QN = e und trägt von N aus nach unten hin NP = f ab. Die Coordinaten des Punktes P sind jetzt: AQ = c — d = a, QP = e — f = b. Läßt man nun in den Differenzen c — d und e — f, c und e unverändert, macht aber d und f nach und nach größer: so rückt Q nach und nach mehr nach links, P mehr nach unten. Wird d = c, so fällt Q in A; wird f = e, so fällt P in die Abscissenlinie; wird aber gleichzeitig d = c und f = e, so fällt P in A und hat dann die Coordinatenwerthe a = 0 und b = 0. Endlich kann man sich d > c denken: dann fällt Q links von A, etwa in Q'; und f > e: dann fällt P unterhalb BC, etwa in P'. Die Coordinatenwerthe sind jetzt negativ, nämlich a = c — d = — (d — c) und b = e — f = — (f — e), während der absolute Längenwerth von AQ' gleich d — c, von Q'P' gleich f — e ist. Das Vorzeichen — vor d — c und f — e hat also die Bedeutung, daß d — c von A aus nach links und f — e nach unten hin abgetragen werden soll.



Hieraus ergiebt sich eine Anwendung der positiven und negativen Zahlen auf die Geometrie, wenn diese Zahlen Coordinatenwerthe sind, und die Vorzeichen + und — beziehen sich auf die entgegengesetzten Lagen, welche die Coordinaten haben können, oder auf

die entgegengesetzten Richtungen, nach welchen sie hinzutragen sind. Haben also die Coordinaten positive Werthe, so ist die Abscisse nach rechts, die Ordinate nach oben hinzutragen; sind diese Werthe aber negativ, so ist die Abscisse nach links, die Ordinate nach unten hinzutragen. Natürlich kann man mit demselben Recht eine andere Bestimmung treffen, z. B. positive Coordinaten nach links und unten, dann aber auch die negativen nach rechts und oben liegend annehmen; man kann also in besondern Fällen, so oft dies bequemer erscheint, von der oben angegebenen conventionellen Bestimmung abweichen.

Die Einführung positiver und negativer Coordinaten gestattet zunächst, jeden beliebigen Punkt der Ebene, in welcher BC liegt, durch seine Coordinaten allein zu bestimmen. So entspricht z. B. die Lage der Punkte P, P_1, P_2, P_3 den nebenstehenden Coordinaten:



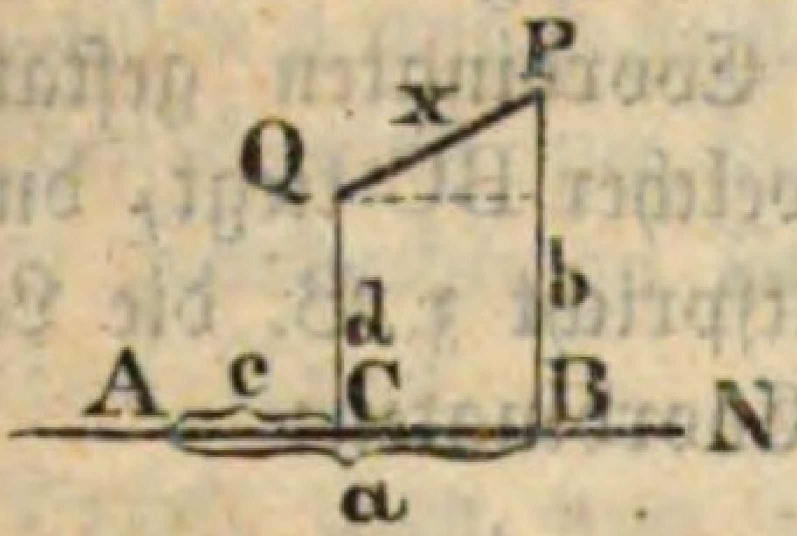
Punkt.	Abscisse.	Ordinate.
P	+ 3.	+ 3.
P_1	+ 4.	− 2.
P_2	− 2.	+ 4.
P_3	0.	− 3.

Besonders wichtig werden aber die Coordinaten durch folgende Anwendungen:

1) Benutzt man bei einer Aufgabe die in Buchstaben gegebenen Coordinaten a und b eines Punktes P, so kann man aus der Auflösung das Resultat für jede besondere Lage des Punktes P entnehmen, welche bestimmten Coordinatenwerthen entspricht; man muß nur für a und b diese bestimmten Werthe einsetzen. Wie überzeugt man sich aber von der Richtigkeit dieses Schlusses? Die Auflösung geht aus dem Ansatze einer Gleichung (oder mehrerer) hervor, und dieser Ansatz entspricht einer bestimmten, gezeichneten oder gedachten Figur, welche a und b in einer bestimmten Lage enthält. Daß nun die Auflösung für beliebige Werthe von a und b dem Ansatze entspricht, folgt aus den Gesetzen der Algebra; also fragt es sich nur, ob der Ansatz selbst für jede Lage des Punktes P, also für ganz beliebige Werthe von a und b richtig ist. Um dies zu prüfen, nimmt man die Richtung der Coordinaten in der Figur als die positive und ändert nun die Figur so ab, daß a, oder b, oder beide entgegengesetzt liegen. Gleichzeitig setzt man in den Ansatz resp. — a statt a, oder — b statt b, oder zugleich — a und — b statt a und b. Stimmt in jedem Falle der Ansatz mit der

Figur und der Aufgabe überein, so ist der Ansatz, also auch das Resultat, allgemein richtig. Auch die Fälle $a = 0$ und $b = 0$ kann man untersuchen; nach einiger Uebung erlangt man bald den nöthigen Ueberblick, um über die allgemeine Gültigkeit eines Ansatzes schnell entscheiden zu können.

Beisp. Zwei Punkte P und Q sind durch ihre Abscissen a und c, und ihre Ordinaten b und d gegeben; man soll die Länge x der Linie PQ berechnen.



Aufl. AN sei die Abscissenlinie; die Coordinaten sind in positiver Lage gezeichnet. Zieht man durch Q eine Parallele zu AN, so erhält man nach dem Pythagoreischen Lehrsatz:

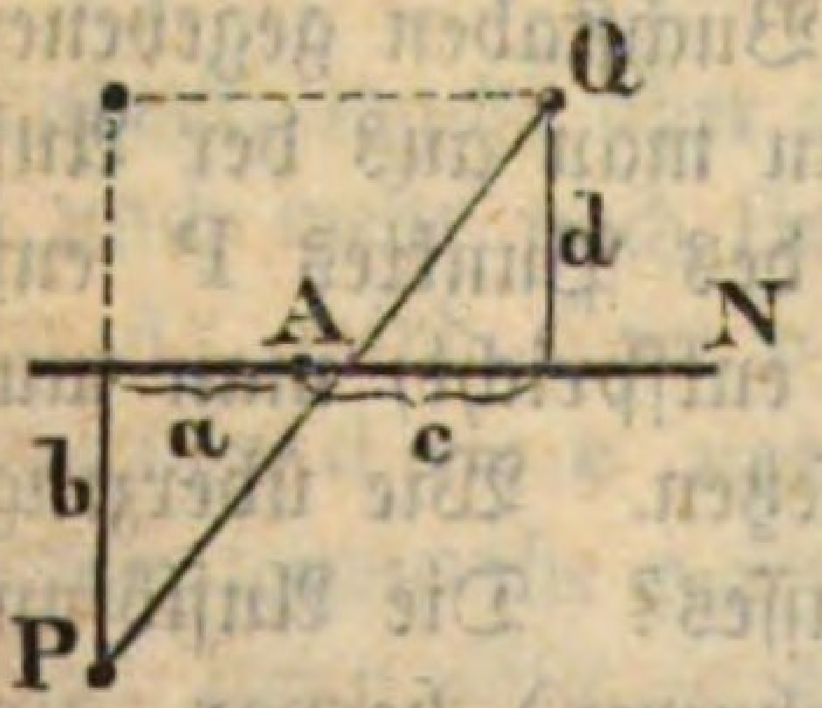
$$x^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2.$$

Ist nun dieser Ansatz allgemein richtig? Zunächst kann man den Fall betrachten, wenn $a < c$ und $b < d$ ist; man vertauscht also in der Figur a mit c, b mit d, P mit Q. Der Ansatz wird dann

$$x^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2,$$

d. h. der Ansatz bleibt derselbe, weil $(c - a)^2 = (a - c)^2$ und $(d - b)^2 = (b - d)^2$ ist.

Von den übrigen Fällen wollen wir noch zwei hervorheben: es sei $b = d$. Dann wird $x \mathrel{+\!\!\!=} AN$, also $x = a - c$. Der Ansatz stimmt hiermit; denn es entsteht $x^2 = (a - c)^2 + 0$ oder $x = a - c$.



Es liege ferner P unterhalb AN und links von A, wie nebenstehende Figur zeigt. In den Ansatz setzt man also $-a$ statt a, und $-b$ statt b ein, so entsteht:

$$x^2 = (-a - c)^2 + (-b - d)^2$$

oder: $x^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2$.

Dieser Ansatz entspricht vollkommen der neuen Figur; daher gilt auch der ursprüngliche Ansatz für diesen besonderen Fall. Man sieht überhaupt leicht ein, daß, wenn eine Abscisse oder Ordinate negativ wird, gleichzeitig in der Figur die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse x ist, in die Summe der Abscissen oder Ordinaten, und im Ansatz das Quadrat dieser Linie, die eine Differenz ist, in das Quadrat einer Summe übergeht. Der Ansatz ist allgemein richtig, daher auch das Resultat $x = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$.

2) Wenn man bei einer Aufgabe einen unbekannten Punkt P durch seine Coordinaten x und y bestimmen will, so geht der Ansatz wieder aus einer Figur hervor, in welcher x und y in bestimmter

Richtung angenommen sind, während die wirkliche Lage von P vielleicht gerade die entgegengesetzte Richtung verlangt. Ergeben sich nun x und y positiv, so ist gegen die Richtigkeit der Auflösung im Allgemeinen kein Bedenken; im Besonderen können aber auch positive Werthe von x und y einer Aufgabe nicht entsprechen, wenn nämlich aus der Natur der Aufgabe folgt, daß die Coordinaten zwischen bestimmten Grenzen liegen müssen, und die gefundenen Werthe diese Grenzen nicht inne halten (vergl. den nächsten §.)

Ergeben sich aber x und y (oder auch nur die eine Coordinate) negativ, so ist zu untersuchen, ob durch die entgegengesetzte Richtung der Coordinaten und den dieser Lage entsprechenden Punkt P die Aufgabe gelöst wird. Das Beispiel 2. zeigt, daß dies nicht immer der Fall ist; wie entscheidet man aber hierüber? Wieder dadurch, daß man in die Figur x und y in entgegengesetzter Richtung einzeichnet und zugleich in den Ansatz $-x$ und $-y$ statt x und y setzt, nun aber untersucht, ob der neue Ansatz noch der Aufgabe und der jetzigen Figur entspricht. Ist dies der Fall, so hat man die richtige Auflösung gefunden; denn aus der neuen Gleichung müssen sich x und y gerade entgegengesetzt, also positiv ergeben. Ergeben sich mehrere Werthe für x und y, so ist mit jedem diese Untersuchung anzustellen; die Aufgabe kann mehr als eine Auflösung haben. Hierbei kommt die Algebra häufig der Geometrie wesentlich zur Hülfe; nicht allein dadurch, daß sie auf mehrere Auflösungen der Aufgabe aufmerksam macht: es kommen auch Fälle vor, in welchen einzelne Werthe von x und y zwar nicht der vorgelegten Aufgabe, aber einer andern entsprechen, die so nahe mit jener verwandt ist, daß es möglich wird, die gegebene Aufgabe allgemeiner zu fassen, so daß beide Aufgaben nur als specielle Fälle einer umfassenderen Aufgabe erscheinen.

Beisp. 1. In einem Halbkreise sind zwei auf dem Durchmesser senkrechte bis zur Peripherie reichende Linien von 12′ und 7′ Länge in der Entfernung 8′ von einander gegeben; man soll den Radius des Kreises und die Lage seines Mittelpunkts finden.



Aufl. Es sei M der gesuchte Mittelpunkt, $AM = x$, also $BM = 8 - x$, und der Radius $MC = MD = y$, so hat man:

1) $x^2 + 144 = y^2$

2) $(8 - x)^2 + 49 = y^2$, subtrahirt:

$16x - 64 + 95 = 0$; hieraus:

$x = -1\frac{15}{16}$, $y = \pm \frac{1}{16}\sqrt{37825} = \pm 12{,}155$. Weil nun x als Abscisse des Punktes M angesehen werden kann, dessen Ordinate $= 0$

gegeben ist, so bedeutet der Werth $-1\frac{15}{16}$, daß M links von A in der Verlängerung der BA und in der Entfernung $1\frac{15}{16}$ Fuß von A liegt. Daß dies richtig ist, erkennt man, wenn man in den Ansatz $-x$ statt x setzt. Man erhält

$$1)\quad x^2+144=y^2$$
$$2)\quad (8+x)^2+49=y^2.$$

Beide Gleichungen entsprechen aber der Aufgabe und der Figur, wenn man M links von A zeichnet; daher ist der oben angegebene Sinn der Auflösung richtig. Da y keine Coordinate ist, sondern der absolute Werth einer Länge, so hat die Aufgabe nur die eine Auflösung

$$x=-1\tfrac{15}{16}\text{ Fuß},\quad y=12{,}155\text{ Fuß}.$$

Beisp. 2. Gegeben ist das Rechteck ABCD mit den Seiten $AB=6'$ und $AD=14'$; man soll es durch eine mit AD parallele Linie so theilen, daß sich die Umfänge der beiden Theile zu einander wie 2 : 3 verhalten.

Aufl. Es sei PQ die theilende Linie, und $AP=x$, so verhält sich:

$$2x+2.14:2(6-x)+2.14=2:3.$$



Aus diesem Ansatze folgt:

$$x=-0{,}4.$$

In dem Rechteck giebt es also eine der Aufgabe entsprechende Linie nicht. Weil aber hier x die Abscisse des Punktes P ist, so könnte man dem Resultat die Bedeutung unterlegen, daß P links von A, in der Entfernung 0,4′ von A liegt, etwa in N, und daß, wenn man NM $\#$ AD zieht, dann der Umfang des □ ANMD sich zum Umfange des □ BNMC wie 2 : 3 verhält. Um hierüber Gewißheit zu erhalten, nehmen wir also an, P fiele links von A in N, so daß $AN=x$ ist, und setzen in den Ansatz $-x$ statt x, so entsteht:

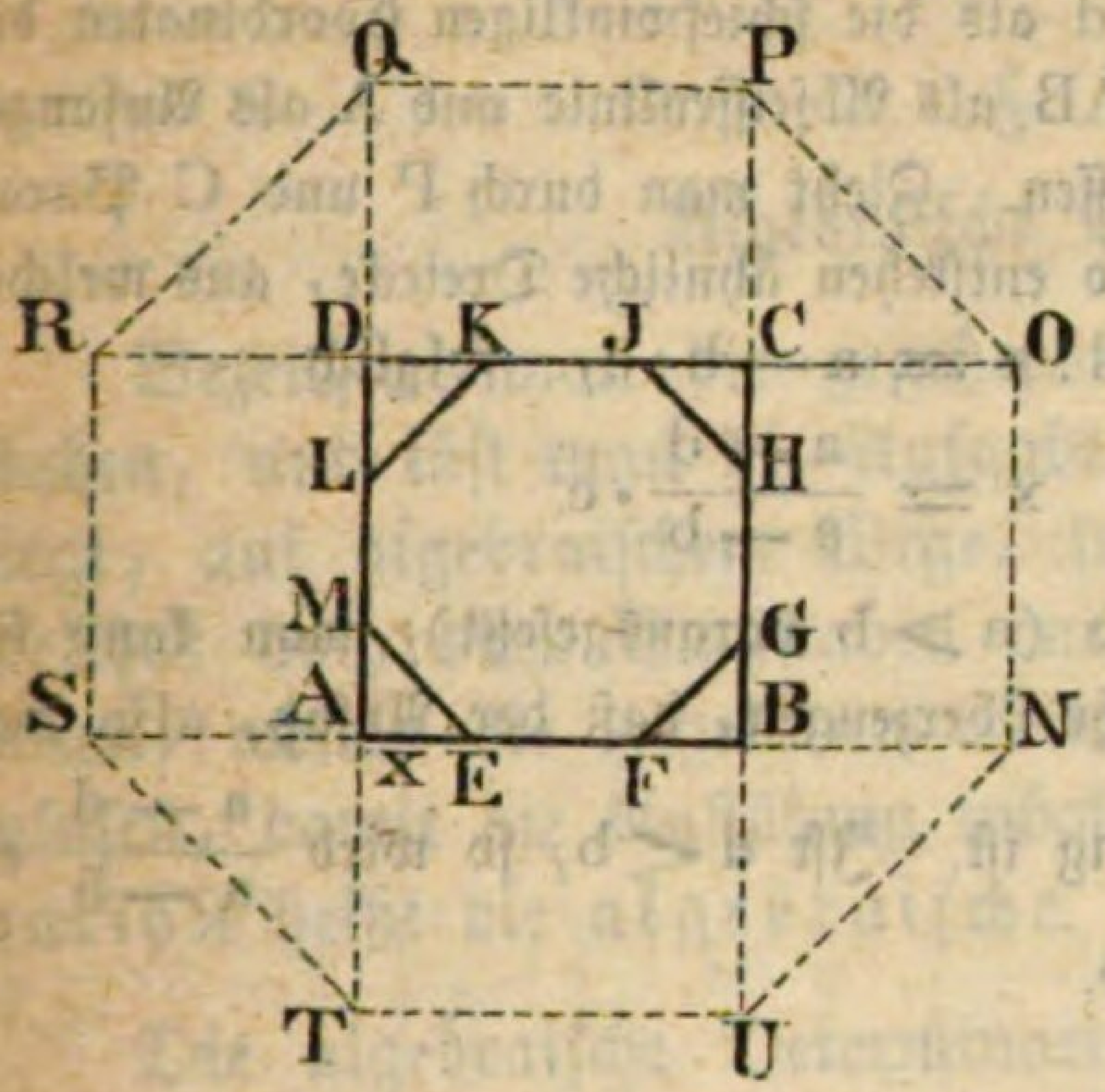
$$2.14-2x:2.(6+x)+2.14=2:3.$$

Nun ist $2(6+x)+2.14$ allerdings der Umfang des □BNMC, aber $2.14-6x$ ist nicht der Umfang des □ ANMB; denn dieser ist $2.14+6.x$. Der neue Ansatz entspricht also der Aufgabe in Bezug auf die jetzige Figur nicht; daher hat die vorliegende Aufgabe überhaupt keine Auflösung.

Anmerk. Nur auf sehr gezwungene Weise ließe sich das gefundene Resultat als eine Auflösung der vorliegenden Aufgabe ansehen; man müßte unter dem Umfange eines Rechtecks die algebraische Summe seiner Seiten verstehen.

Beisp. 3. Ein Quadrat ABCD in seinen vier Ecken so abzu-

stumpfen, daß ein reguläres Achteck entsteht; man soll die Ecken des Achtecks durch Rechnung finden.



Aufl. Es sei $AB = a$, und EFGHJKLM das verlangte Achteck. Bezeichnet man AE durch x, so ist auch $AM = x$, folglich $ME^2 = 2x^2$. Weil nun $EF = a - 2x$ ist und $ME = EF$, so hat man den Ansatz:

$$2x^2 = (a - 2x)^2.$$

Hieraus folgt

$$x = a \pm a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = a(1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

In so fern die Ecken des Achtecks in den Seiten des Quadrats liegen sollen, gilt nur das eine Resultat $x = a(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$; welche Bedeutung hat das andere? Es ist $a(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}) > a$; folglich müßte der gesuchte Punkt (E) in der Verlängerung von AB liegen. Es giebt aber wirklich ein reguläres Achteck (NOPQRSTU), dessen Ecken in den Verlängerungen der Seiten des Quadrats liegen; daher ist es wahrscheinlich, daß der Werth $a(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ eine Ecke dieses Achtecks nachweist, d. h. daß $AN = a(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ ist.

Wie überzeugt man sich hiervon? Man setzt $AN = x$ und untersucht, ob der Ansatz $2x^2 = (a - 2x)^2$ auch jetzt richtig ist. Aus $AN = x$ folgt aber auch $AQ = x$; folglich ist $NQ^2 = 2x^2$. Ferner ist auch $BS = x$, also $NS = 2x - a$. Da aber NQ und NS als Sehnen, welche zu gleichen Bogen gehören (im Kreise um das Achteck), einander gleich sind, so ist

$$2x^2 = (2x - a)^2.$$

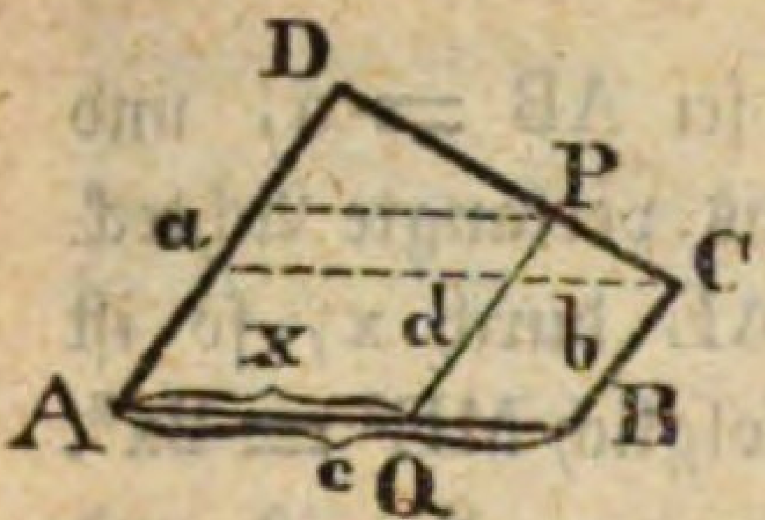
Dieser Ansatz ist aber dem Ansatze oben identisch, weil $(a - 2x)^2 = (2x - a)^2$; folglich entspricht $a(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ wirklich der Länge AN.

II. Schiefwinklige Coordinaten.

Stehen die Coordinaten x und y nicht senkrecht auf einander, sondern bilden sie mit einander einen bestimmten unveränderlichen Winkel α (den Coordinatenwinkel), so daß alle Ordinaten (y) parallel sind, so nennt man sie schiefwinklige Coordinaten. Alles über rechtwinklige Coordinaten Gesagte läßt sich mit Leichtigkeit auf schiefwinklige übertragen, namentlich können ihre Coordinatenwerthe positiv und negativ sein.

Beispiel. Es sei das Paralleltrapez ABCD gegeben; man soll eine Linie von gegebener Länge d so parallel AD und BC legen, daß sie in den beiden andern Seiten des Vierecks endet.

Aufl. PQ = d sei die gegebene Linie in der verlangten Lage. Es sei



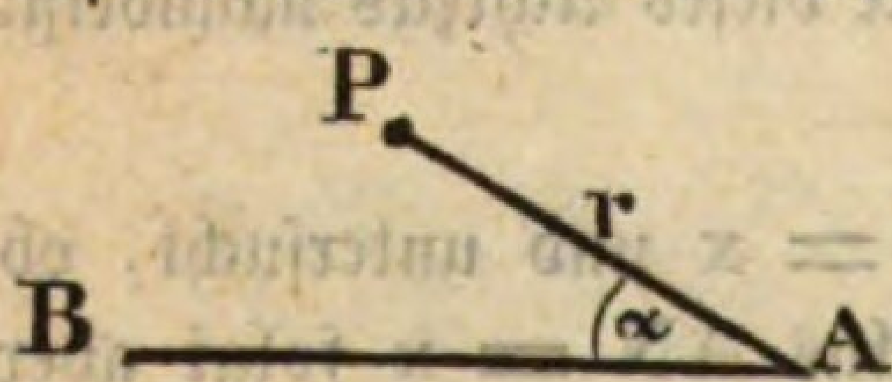
AD = a, BC = b, AB = c, AQ = x, so erscheinen x und d als die schiefwinkligen Coordinaten des Punktes P für AB als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Abscissen. Zieht man durch P und C Parallelen mit BA, so entstehen ähnliche Dreiecke, aus welchen folgt: $a - d : x = a - b : c$, folglich

$$x = \frac{a - d}{a - b} \cdot c.$$

Ist $d > a$ gegeben, so wird x negativ ($a > b$ vorausgesetzt); man kann sich auf dem früher angegebenen Wege leicht überzeugen, daß der Ansatz, also auch die Auflösung, für den Fall noch richtig ist. Ist $d < b$, so wird $\frac{a - d}{a - b}$ ein unächter Bruch, also $x > c$, u. s. w.

III. Polar-Coordinaten.

Einen Punkt P in einer Ebene kann man noch auf folgende Art bestimmen: Man wählt in der Ebene eine Linie AB, in ihr einen



Punkt A und verbindet A mit P. Ist der Winkel PAB = α und die Länge AP = r gegeben, so ist auch der Punkt P bekannt. Man nennt α und r die Polar-Coordinaten des Punktes P, α den Polarwinkel, r den Radius vector, den festen Punkt A den Pol und die feste Linie AB die Polar-Axe. Da man sich α und r wieder (wie dies bei rechtwinkligen Coordinaten geschah) als Differenzen denken und von diesen zu negativen Zahlen übergehen kann, so finden positive und negative Zahlen auch auf Polar-Coordinaten Anwendung. Ist α negativ, so ist dieser Winkel auf der andern Seite von AB anzutragen; ist r negativ, so liegt P in der Verlängerung des angetragenen Schenkels des ∡α über A hinaus. Durch Polar-Coordinaten kann ein Punkt P im Allgemeinen auf vier verschiedene Arten bestimmt werden. So z. B. kann der Punkt P, wie die Figur ihn zeigt, durch folgende Coordinaten bestimmt sein:

α	+ spitz	+ zwischen 180° u. 270°	— stumpf	— zwischen 270° u. 360°
r	+	—	—	+

Außerdem kann α noch um ein beliebig Vielfaches von 360° vermehrt oder vermindert werden, ohne daß die Lage von P sich ändert.

Als Resultat der vorstehenden Untersuchungen halten wir fest: die positiven und negativen Zahlen finden in der Geome-

trie da eine Anwendung, wo sie Coordinaten-Werthe bezeichnen.

§. 184.

Algebraische Determination.

Bezeichnet man die gegebenen Stücke einer Figur durch Buchstaben, und löst man die Aufgabe, welcher diese Figur zum Grunde liegt, auf algebraischem Wege, so kann man aus dem Endresultat, welches doch diese Buchstaben enthalten muß, die Bedingungen ableiten, welche die gegebenen Stücke in Bezug auf einander erfüllen müssen, damit die Auflösung möglich sei. Diese Art der Determination heißt die algebraische.

Die algebraische Determination entspringt allerdings aus der besonderen Form des gefundenen Ausdrucks im Zusammenhange mit der Aufgabe; es lassen sich aber doch einige allgemeine Regeln als leitend feststellen. Zunächst darf kein Resultat imaginär sein; ergiebt sich z. B. $x = a + \sqrt{2a^2 - b^2}$, so heißt die Determination $2a^2 \overline{>} b^2$. Im Allgemeinen hat eine Aufgabe keine Auflösung, wenn sie auf die Form $\frac{a}{0}$ führt; im Besonderen kann aber diese Form eine geometrische Bedeutung zulassen, wenn z. B. die Abscisse des Durchschnittspunktes zweier Linien $\frac{a}{0}$ wird: die Linien können parallel sein. Häufig ergiebt sich die Determination aus dem Urtheil, daß ein gefundenes Resultat nicht negativ sein kann; endlich kommen auch Fälle vor, in denen man weiß, daß das Resultat zwischen bestimmten Grenzen liegen muß; das Resultat muß dann kleiner als der größere und größer als der kleinere Grenzwerth sein.

Die Determination kann sich auch auf das Aufsuchen der Bedingungen erstrecken, unter welchen eine Aufgabe nur eine, oder mehrere Auflösungen hat. Ergiebt sich z. B. eine Coordinate $x = a \pm \sqrt{4ab - b^2}$, so hat die Aufgabe nur eine Auflösung ($x = a$), wenn $b = 4a$ ist. Ist $b < 4a$, so kann sie zwei Auflösungen haben; ob beide Werthe für x dann zulässig sind, ist besonders zu beurtheilen. — Führt die Auflösung auf die Form $\frac{0}{0}$, so ist die Aufgabe eine unbeschränkt unbestimmte, wenn nicht ein bestimmter Werth sich unter dieser Form verbirgt (Arithm. §. 91.). — Endlich kann man auch die Relationen zwischen den gegebenen Stücken aufsuchen, unter welchen gesuchte Punkte

oder Linien oder ganze Figuren bestimmte Lagen annehmen; die nachfolgenden Beispiele werden dies näher erläutern.

Beisp. 1. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b gegeben; man soll das in dieses Dreieck eingezeichnete Rechteck bestimmen, welches mit dem Dreieck den rechten Winkel gemein hat, und dessen Inhalt gleich $\frac{n}{m}$ vom Inhalte des Dreiecks ist. (Fig. in §. 182.)

Aufl. Es mögen x und y die Seiten des Rechtecks sein, und $x \mp a$, $y \mp b$, so folgt aus der Aufgabe und aus ähnlichen Dreiecken:

$$1)\qquad xy = \frac{n}{m}\cdot\frac{ab}{2}$$

$$2)\ a-x : y = a : b.$$

Hieraus: $x = \frac{a}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 2\cdot\frac{n}{m}}\right]$, $y = \frac{b}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 - 2\cdot\frac{n}{m}}\right]$.

Determination. Es muß $\frac{n}{m} \leqq \frac{1}{2}$ sein. Ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, so ist $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, das Rechteck aber von allen eingeschriebenen Rechtecken das größte. (Vergl. Arithm. §. 202. Beisp. 12.) Die Aufgabe hat dann nur eine Auflösung, sonst zwei.

Beispiel 2. Das rechtwinklige Dreieck mit einer gegebenen Kathete a zu bestimmen, bei welchem der Inhalt des eingeschriebenen Kreises gleich $\frac{n}{m}$ vom Inhalte des Dreiecks ist.

Aufl. Es sei x der Radius des Kreises, y die unbekannte Kathete, so ist die Hypotenuse $= a + y - 2x$; daher:

$$1)\qquad x^2\pi = \frac{n}{m}\cdot\frac{a}{2}\cdot y$$

$$2)\ (a + y - 2x)^2 = a^2 + y^2.$$

Hieraus folgt:

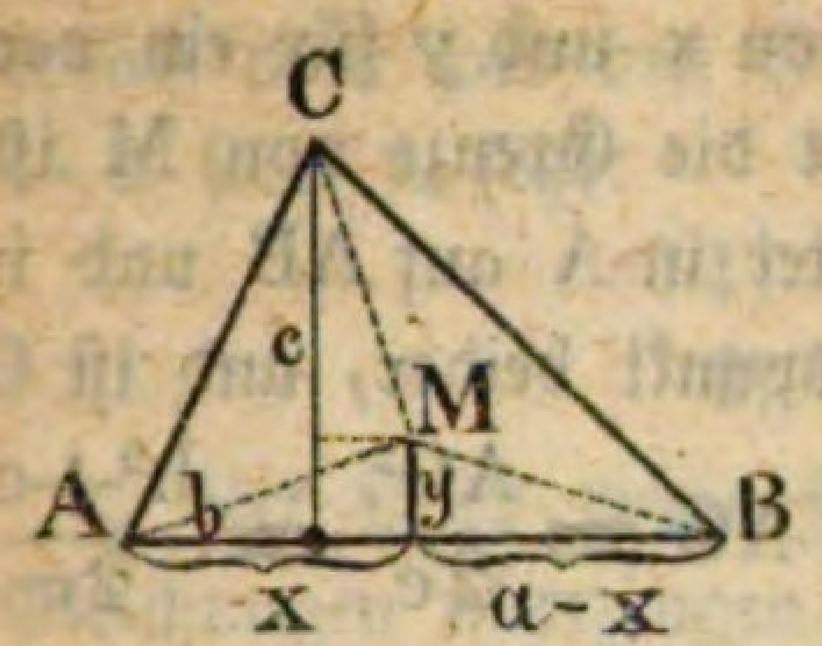
$$x = \frac{a}{4\pi}\left[\pi + \frac{n}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 6\pi\cdot\frac{n}{m} + \pi^2}\right].$$

Determination. Aus $\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 6\pi\cdot\frac{n}{m} + \pi^2 \geqq$ folgt (Arithmetik §. 157. II.):

$$\frac{n}{m} \overline{\leqq} \pi(3 - 2\sqrt{2}) \text{ oder } \frac{n}{m} \overline{\leqq} 0{,}539012.$$

Ist $\frac{n}{m} = \pi(3 - 2\sqrt{2})$, so folgt $x = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$ und aus 1) $y = a$; d. h. von allen rechtwinkligen Dreiecken ist im gleichschenkligen das Verhältniß des eingeschriebenen Kreises zum Dreieck am größten.

Beisp. 3. Den Mittelpunkt eines $\triangle ABC$ aus den Coordinaten seiner Ecken zu berechnen.



Aufl. Wir wollen AB selbst als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Abscissen wählen. Es sei $AB = a$, C habe die Coordinaten b und c, M sei der gesuchte Mittelpunkt, x und y sollen seine Coordinaten bezeichnen.

Der Ansatz entspringt aus $MA^2 = MB^2 = MC^2$.

1) $x^2 + y^2 = (a - x)^2 + y^2$

2) $x^2 + y^2 = (x - b)^2 + (c - y)^2$.

Man überzeugt sich leicht, daß beide Gleichungen allgemein richtig sind, also für alle besonderen Coordinatenwerthe gültig; z. B. wenn b negativ ist, wo dann im Ansatz, aber auch in der Figur, $(x - b)^2$ in $(x + b)^2$ übergeht; eben so, wenn x negativ angenommen wird, oder y u. s. w.

Man erhält aus obigen Gleichungen:

$$x = \frac{a}{2} \text{ und } y = \frac{b^2 + c^2 - ab}{2c}.$$

Determination. Keine Auflösung würde die Aufgabe nur haben, wenn $c = 0$ ist, weil dann $y = \infty$ wird; es wäre aber dann auch ABC kein Dreieck, sondern A, C und B lägen in einer geraden Linie. — x ist nur von a abhängig, d. h. M liegt immer in der auf AB in ihrer Mitte errichteten Senkrechten. Da dies Gesetz von jeder Seite gilt, denn jede hätte als Abscissenlinie gewählt werden können, so folgt hieraus schon die bekannte Construction von M. Ist b negativ, so ist y positiv (wie bekannt, denn $\measuredangle CAB$ ist dann stumpf). Sind a, b, c positiv, so können wir 3 Lagen des Punktes M erkennen:

1) Ist $b^2 + c^2 = ab$, so ist $y = 0$.

2) Ist $b^2 + c^2 > ab$, so ist y positiv.

3) Ist $b^2 + c^2 < ab$, so ist y negativ.

Man kann sich hiervon leicht geometrisch überzeugen, wenn man AC^2 statt $b^2 + c^2$ setzt. In obigen 3 Fällen wird dann $\measuredangle ACB$ resp. ein rechter, spitzer, stumpfer Winkel. — Auffallend erscheint, daß für $a = 0$, y den Werth $\frac{b^2 + c^2}{2c}$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{AC^2}{c}$ annimmt, und $x = 0$ wird; man sollte erwarten, daß y und x die Form $\frac{0}{0}$ annehmen müßten, weil durch zwei Punkte A und C unendlich viele Kreise gelegt werden können. Bei näherer Betrachtung findet man aber leicht die Bedeutung der Coordinaten $x = 0$ und $y = \frac{b^2 + c^2}{2c}$. Denkt man sich nämlich im $\triangle ABC$ den Punkt B nach und nach stetig näher an A gerückt, so ändert auch M stetig seine Lage, weil die Coordinaten von M, $x = \frac{a}{2}$ und $y = \frac{b^2 + c^2 - ab}{2c}$, sich stetig mit a ändern. Für ein unendlich kleines a kommt x der Null und y dem Werthe $\frac{b^2 + c^2}{2c}$ unendlich

nahe; folglich sind diese Coordinaten die Grenzwerthe von x und y für ein verschwindendes a, während der durch sie gegebene Punkt die Grenze von M ist. Diesen Punkt kann man leicht construiren. Man errichtet in A auf AB und in C auf AC eine Senkrechte; bezeichnet F den Durchschnittspunkt beider, und ist G der Mittelpunkt von AF: so ist $AC^2 = c \,.\, AF$, woraus $AG = \frac{AC^2}{2c} = \frac{b^2+c^2}{2c}$ folgt. Dem Punkte G nähert sich also M um so mehr, je näher a der Null kommt. Denkt man sich a negativ, zunächst auch unendlich klein, so liegt M wieder unendlich nahe an G, aber nach links hin, und läßt man nun den absoluten Werth von a wachsen, so entfernt sich M immer mehr und mehr von G.

Beisp. 4. Die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= a$, die Hypotenuse $= b$; wie groß ist der Inhalt F?

Aufl. Bezeichnen x und y die Katheten, so ist

$$1)\quad x + y = a$$
$$2)\quad x^2 + y^2 = b^2.$$

Quadrirt man die 1ste Gleichung und zieht dann die 2te von ihr ab, so folgt $2xy = a^2 - b^2$, und hieraus $F = \frac{a^2 - b^2}{4}$.

Determination. Es muß $a > b$ sein.

Beisp. 5. Zwei Punkte P und Q (vergl. die erste Fig. Seite 226) sind durch ihre Abscissen $AB = a$ und $AC = c$, und ihre Ordinaten $BP = b$ und $CQ = d$ gegeben. Wenn nun A mit Q, und C mit P verbunden wird: wo liegt der Durchschnittspunkt M beider Linien?

Aufl. Es sei x die Abscisse und y die Ordinate des gesuchten Punktes M für AB als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt der Abscissen, so folgt aus ähnlichen Dreiecken:

$$1)\quad x : y = c : d$$
$$2)\quad x - c : y = a - c : b.$$

Hieraus: $x = \frac{bc^2}{bc + cd - ad}$, $y = \frac{bcd}{bc + cd - ad}$.

Determination. AQ und CP schneiden sich gar nicht, wenn $bc + cd - ad = 0$ ist, weil dann $x = y = \infty$ wird. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$bc = (a - c)d \quad \text{oder} \quad c : d = a - c : b,$$

und hieraus folgt wieder $\Delta ACQ \sim \Delta CBP$, also $AQ \# CP$.

Es sei dem Leser überlassen, die verschiedenen Lagen des Punktes M für specielle Coordinatenwerthe aus den Ausdrücken für x und y zu entnehmen und mit der Figur zu vergleichen. Ein Fall mag noch hervorgehoben werden: Wie liegt M, wenn c negativ ist, aber a, b, d positiv sind? Setzt man in die Ausdrücke für x und y, $-c$ statt c, so folgt

$$x = -\frac{bc^2}{bc + cd + ad}, \quad y = \frac{bcd}{bc + cd + ad};$$

x ist dann immer negativ, y positiv, d. h. M liegt oberhalb AB, aber links von A (also über der Verlängerung von BA). Die Gleichungen für diesen Fall

erhält man aus den Gleichungen 1) und 2) oben, wenn man $-c$ statt c und $-x$ statt x setzt:

$$1) \quad x:y = c:d$$

$$2) \quad c - x:y = a + c:b.$$

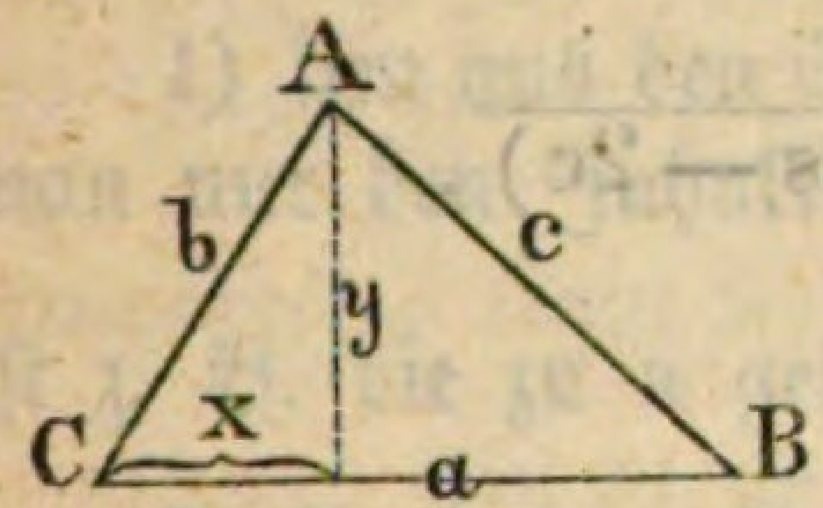
Der Leser möge sich durch Zeichnung der Figur von der Richtigkeit dieser Gleichungen überzeugen; x und y ergeben sich aus ihnen positiv.

§. 185.

Aufgabe.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt F zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnen x und y die Coordinaten der Ecke A in Bezug auf CB als Abscissenlinie und C als Anfangspunkt der Abscissen (oder ist x die Projection von b auf a, und y die Höhe auf a), so ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatz:



$$1) \quad x^2 + y^2 = b^2$$

$$2) \quad (a - x)^2 + y^2 = c^2.$$

Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, daß diese Gleichungen allgemein richtig sind, d. h. für jede Lage des Punktes A. Den Fall, wenn y negativ ist, können wir außer Acht lassen, weil die Seite von BC, auf welcher A liegt, immer als die positive angesehen werden kann, und y auf dieser Seite liegt. In Bezug auf x können wir die Fälle unterscheiden: $x > a$, $x = a$, $x < a$, $x = 0$, x negativ. In jedem dieser Fälle sind beide Gleichungen noch richtig; wir wollen nur den Fall »x ist negativ« hervorheben. Die Gleichung 2) geht dann in $(a + x)^2 + y^2 = c^2$ über und entspricht der Figur vollkommen. ($\measuredangle$ ACB ist in diesem Falle stumpf.)

Zieht man, zur Entwicklung von x und y, die Gleichung 2) von 1) ab, so folgt:

$$-a^2 + 2ax = b^2 - c^2, \text{ daher}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}; \text{ folglich aus 1)}$$

$$y^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 \text{ oder}$$

$$(2ay)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Nun ist $\frac{1}{2}ay$ dem Inhalte F des Dreiecks gleich; folglich ist $2ay = 4F$; daher

$$\text{I.} \qquad (4F)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Die Aufgabe ist im Wesentlichen gelöst; es läßt sich aber der rechten Seite vorstehender Gleichung eine zur practischen Berechnung bequemere Form geben.

$$(4F)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$
$$(4F)^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$
$$(4F)^2 = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$$

Hieraus folgt:

$$\text{II.} \quad F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Bezeichnet ferner s die halbe Summe der Seiten, ist also

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \text{ so folgt:}$$

$$a+b+c = 2s$$
$$b+c-a = 2s-2a$$
$$a+c-b = 2s-2b$$
$$a+b-c = 2s-2c; \text{ daher ist}$$
$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}.$$

Setzt man $\frac{1}{4}$ unter die Wurzel, so folgt:

$$\text{III.} \quad F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Anmerk. 1. Die vorstehende Aufgabe ist eine der wichtigsten der algebraischen Geometrie, weil eine große Menge von Aufgaben sich auf dieselbe reduciren läßt. Auch in der Trigonometrie findet sie häufig eine bequeme Anwendung. Der Leser sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß s die halbe Summe der Seiten a, b, c bedeutet.

Beisp. 1. Die Seiten eines Dreiecks sind 13′, 14′ und 15′; wie groß ist der Inhalt?

Aufl. $13+14+15 = 42$; $13+15-14 = 14$;
$13+14-15 = 12$; $14+15-13 = 16$.

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = \sqrt{14 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 14} = 14 \cdot 3 \cdot 2 = 84\,\square'.$$

Beisp. 2. Die Seiten eines Dreiecks sind 2,7345′; 3,0728′ und 4,0429′; wie groß ist der Inhalt?

Aufl. $a+b+c = 9{,}8502$ folglich $s = 4{,}9251$.

$$F = \sqrt{4{,}9251 \cdot 2{,}1906 \cdot 1{,}8523 \cdot 0{,}8822};$$
$$\log F = 0{,}6231283. \quad F = 4{,}19883\,\square'.$$

Beisp. 3. Die Seiten eines Dreiecks sind 12′, 10,4′ und 3,2′; wie groß ist der Inhalt?

Antw. 15,36 □′.

Beisp. 4. In jeder Seite des $\triangle ABC$ ist ein Punkt gegeben: X in AB, so daß AX = 3′ und BX = 4′ ist; Y in AC, so daß AY = 5′ und CY = 6′ ist; Z in BC, so daß BZ = 3′ und CZ = 7′ ist. Wie groß ist der Inhalt des $\triangle XYZ$?

Antw. $\frac{194\sqrt{6}}{55} = 8{,}640019\,\square'$. (Vergl. §. 69. Beisp. 1.)

Anmerk. 2. Kennt man zwei Seiten und den Inhalt eines Dreiecks, so wende man, um die dritte Seite zu finden, die Formel I. an; nur muß man,

um die Rechnung nicht ohne Noth weitläuftig zu machen, die Seite (c), welche in der Gleichung nur einmal vorkommt, als die unbekannte Seite ansehen.

Beisp. 5. Zwei Seiten eines Dreiecks sind gleich 20′ und 4,8′; der Inhalt ist gleich 38,4 □′; wie groß ist die dritte Seite x?

Aufl. Aus Formel I. folgt:

$$(4 . 38{,}4)^2 = (2 . 20 . 4{,}8)^2 - (20^2 + 4{,}8^2 - x^2)^2.$$

Hieraus folgt (vergl. Arithm. §. 134. Beisp. 2.):

$$20^2 + 4{,}8^2 - x^2 = \pm 115{,}2; \text{ daher}$$
$$x = 17{,}545' \text{ oder } x = 23{,}2'.$$

§. 186.

Zusatz.

1) Um aus den Seiten eines Dreiecks die Höhen zu finden, braucht man nur den Inhalt durch die halben Grundlinien zu dividiren. Es ist z. B. die zu a gehörige Höhe gleich $\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$.

2) Auch den Inhalt und die Höhen des gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecks erhält man aus dem vorigen §.; doch ist die Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes hier in der Regel noch bequemer (§. 63., 3. und 4.). Bei dem gleichschenkligen Dreieck mit den Seiten a, a und b, ist die Höhe auf a gleich $\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2 - b^2}$. — Die Formeln für Höhe und Inhalt des gleichseitigen Dreiecks zur Seite a müssen dem Gedächtniß eingeprägt werden:

$$\text{Höhe} = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad \text{Inhalt} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Beisp. Zwei sich schneidende Kreise haben die Radien a und b; ihre Centrale ist = c. Von einem der Durchschnittspunkte aus ist in jedem Kreise eine Sehne gezogen, welche den anderen Kreis berührt; wie groß sind die Sehnen?

Aufl. Die halben Sehnen sind in dem Dreieck, welches a, b, c zu Seiten hat, die Höhen auf a und b. Die Sehnen sind daher:

$$\frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} \quad \text{und} \quad \frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b}.$$

§. 187.

Aufgaben.

Die nachfolgenden Aufgaben sind durch Anwendung der in §. 185. gefundenen Formeln zu lösen.

I. Aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius r des umschriebenen Kreises zu finden.

Aufl. Es bezeichne F den Inhalt des Dreiecks; aus $F = \frac{abc}{4r}$ (§. 143.) folgt $r = \frac{abc}{4F}$.

Beisp. 1. Es sind von 4 Dreiecken die Seiten gegeben, nämlich

160 Fuß,	120 Fuß	und 56 Fuß
160 »	120 »	» 200 »
160 »	56 »	» 187,2 »
120 »	56 »	» 70,4 » ;

wie groß ist bei jedem Dreieck der Radius des umschriebenen Kreises?

Antw. 100 Fuß.

Beisp. 2. A sei in einer Abscissenlinie der Anfangspunkt der Abscissen. Zwei Punkte B und C sind durch ihre Coordinaten gegeben; ihre Abscissen sind resp. 10′ und 14′, ihre Ordinaten 4′ und 10′; wie groß ist der Radius des Kreises durch A, B, C?

Aufl. Der Inhalt des ΔABC ist leicht aus der Figur zu entnehmen (22 □′). Man erhält den Radius $= \frac{\sqrt{74.29.13}}{11} = 15{,}184'$.

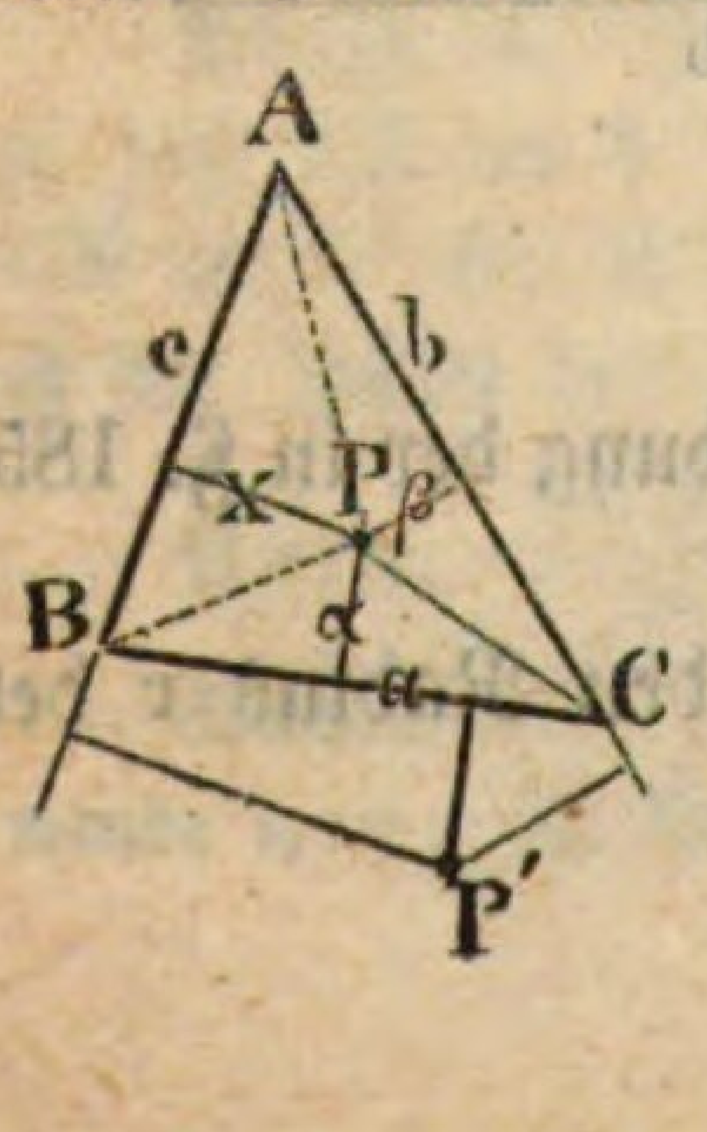
Beisp. 3. Die Seiten eines Dreiecks sind 1,2°; 1,6° und 2°; wie groß sind Inhalt und Umfang des umschriebenen Kreises?

Antw. Inh. $= \pi$ □°, Umf. $= 2\pi°$.

II. Ein Dreieck ist durch seine Seiten a, b, c gegeben. Ein Punkt P hat von a den Abstand α, von b den Abstand β; welchen Abstand x hat P von c?

Aufl. Die Aufgabe ist nicht ganz bestimmt, weil nicht gesagt ist, auf welcher Seite von a und von b, P liegen soll; folglich kann P vier verschiedene Lagen haben. Für alle Fälle entspringt aber der Ansatz aus demselben Princip: man verbindet P mit den Ecken des Dreiecks und drückt nun den Inhalt dieses Dreiecks doppelt aus. Wir wollen für zwei Fälle die Auflösung geben:

1) α und β mögen auf der dem Dreieck zugekehrten Seite von a und b liegen. — Zunächst kann man den Inhalt des ΔABC nach Formel II. oder III. in §. 185. berechnen; bezeichnet F den gefundenen Werth, so entsteht, wenn man dasselbe Dreieck noch als Summe dreier Dreiecke ausdrückt:



$$\frac{a\alpha}{2} + \frac{b\beta}{2} + \frac{cx}{2} = F, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{2F - a\alpha - b\beta}{c}.$$

Ergiebt sich x negativ, so liegt P auf der andern Seite von c, wovon man sich leicht durch den Ansatz für diesen Fall überzeugt.

2) Es möge α auf der entgegengesetzten Seite

von a liegen (auf der also das Dreieck nicht liegt); β hingegen liege auf der dem Dreieck zugekehrten Seite von b, so daß der Punkt P die Lage von P′ hat. — Verbindet man P′ mit A, B und C, so kann $\triangle ABC$ als algebraische Summe dreier Dreiecke ausgedrückt werden; hierdurch entsteht:

$$\frac{b\beta}{2} + \frac{cx}{2} - \frac{a\alpha}{2} = F, \quad \text{folglich } x = \frac{2F + a\alpha - b\beta}{c}.$$

Dasselbe Resultat erhält man aus der Gleichung in Nr. 1., wenn man dort $-\alpha$ statt α setzt, und der Leser wird sich leicht davon überzeugen, daß in der Auflösung zu dem Falle 1) die Auflösungen aller Fälle enthalten sind; α und β (auch x) können als Ordinaten des Punktes P betrachtet werden.

Beisp. 1. Innerhalb eines Dreiecks mit den Seiten 36′, 29′ und 25′ liegt ein Punkt in der Entfernung 5′ von der Seite 36′, und 9′ von der Seite 25′; wie weit ist er von der dritten Seite entfernt?

Antw. $10\frac{25}{29}$ Fuß.

Beisp. 2. Ein Punkt P liegt außerhalb eines Dreiecks, dessen Seiten 6′, 10′ und 12′ sind. Er hat von der Seite 12′ den Abstand 4′ und liegt in der Halbirungslinie des der Seite 12′ gegenüberliegenden Winkels; wie weit ist er von den andern Seiten entfernt?

Antw. 6,748′.

III. Den Inhalt eines Paralleltrapezes aus den vier Seiten zu berechnen.

Aufl. Es mögen a und b die parallelen Seiten sein, und $a > b$, c und d die beiden andern Seiten. Zieht man durch den einen Endpunkt von b eine Parallele zu der nicht parallelen Seite, welche durch den andern Endpunkt von b geht, so entsteht ein Dreieck mit den Seiten $a - b$, c und d, dessen Inhalt F sein mag. Bezeichnet W den Inhalt des Paralleltrapezes, x seine Höhe, so hat man

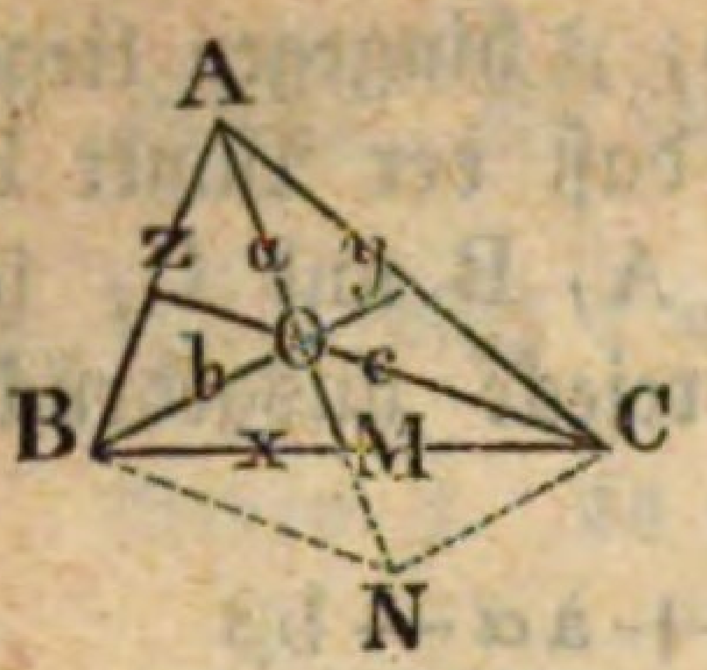
$$1) \quad \frac{a-b}{2} x = F.$$

$$2) \quad W = \frac{a+b}{2} \cdot x.$$

Hieraus folgt: $$W = \frac{a+b}{a-b} \cdot F.$$

Beisp. Die parallelen Seiten sind 27′ und 10′, die beiden anderen 26′ und 25′, so ist der Inhalt 444 □′.

IV. Es sind in einem Dreieck die drei Transversalen a, b, c von den Ecken nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten gegeben; man soll die Seiten x, y, z und den Inhalt W des Dreiecks berechnen.



Aufl. Verlängert man a über M bis N, so daß $MN = MO = \frac{a}{3}$ wird, und zieht NC und NB, so ist im ⧺ OCNB (§. 68., II. und §. 87.):

$$x^2 + (\tfrac{2}{3}a)^2 = 2.(\tfrac{2}{3}b)^2 + 2.(\tfrac{2}{3}c)^2.$$

Hieraus folgt:

$$x = \tfrac{2}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$ daher (§. 182. Anmerk.):

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$z = \tfrac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Um W zu finden, hat man $\Delta OCN = \Delta OCB = \frac{1}{3}W$. Die Seiten des ΔOCN sind aber $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}c$; folglich ist dieses Dreieck demjenigen ähnlich, welches a, b, c zu Seiten hat.

Bezeichnen wir den Inhalt des Dreiecks mit den Seiten a, b, c durch F, so folgt (§. 85.):

$$\tfrac{1}{3}W : F = (\tfrac{2}{3})^2 : 1^2, \text{ also } W = \tfrac{4}{3}F \text{ oder}$$

$$W = \tfrac{1}{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Hieraus ergiebt sich das, auch leicht geometrisch zu beweisende Gesetz:

$$W : F = 4 : 3.$$

Beisp. Die Transversalen sind 5′; 7′ und 10′, so findet man die Seiten resp. 11,0151′; 9,4516′ und 4,6188′; den Inhalt = 21,6641 □′.

V. Es sind die drei Höhen a, b, c eines Dreiecks gegeben; man soll die Seiten x, y, z und den Inhalt F bestimmen.

Aufl. Aus dem doppelten Inhalt des Dreiecks folgt:

$$ax = by = cz.$$

Dividirt man durch abc, so ist

$$\frac{x}{bc} = \frac{y}{ac} = \frac{z}{ab} \text{ oder}$$

$$x : y : z = bc : ac : ab.$$

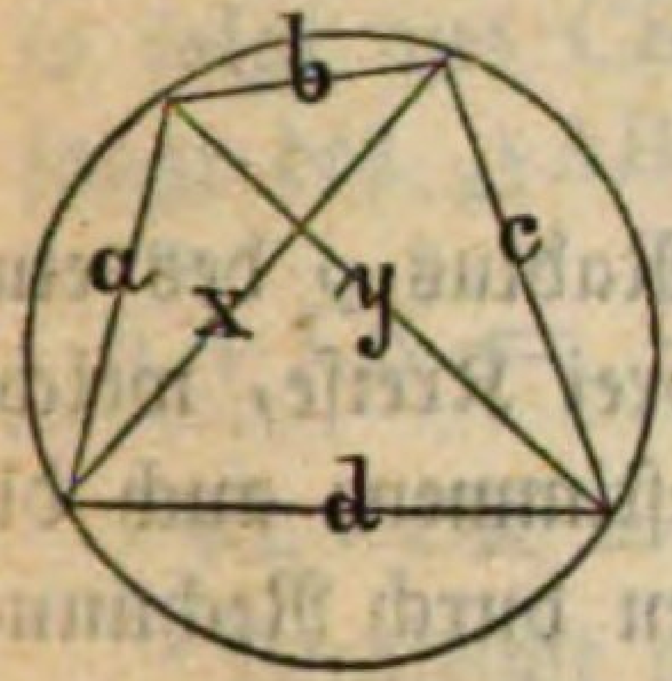
Hier sind bc, ac, ab abstracte Zahlen, und denkt man sich ein Dreieck, welches bei der für a, b und c vorausgesetzten Einheit die Seiten bc, ac, ab hat, so ist dies Dreieck, dessen Inhalt W sein mag, dem Dreieck F ähnlich, und x und bc sind homologe Seiten. Zu bc gehört aber im ΔW die Höhe $\frac{2W}{bc}$; folglich ist diese Höhe der Höhe a im ΔF homolog. Es verhält sich also:

$$F : W = a^2 : \left(\frac{2W}{bc}\right)^2; \text{ daher ist } F = \frac{(abc)^2}{4W} \text{ oder}$$

$$F = \frac{(abc)^2}{\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab+bc-ac)(ac+bc-ab)}}.$$

Hieraus folgt aber $x = \frac{ab^2c^2}{2W}$, $y = \frac{a^2bc^2}{2W}$ und $z = \frac{a^2b^2c}{2W}$.

VI. Es sind die vier Seiten a, b, c, d eines Vierecks im Kreise gegeben; man soll den Inhalt F berechnen.



Aufl. Bezeichnet man die Diagonalen durch x und y, das Dreieck mit den Seiten a, b, x durch F′ und das Dreieck mit den Seiten c, d, x durch F″, so ist (§. 147.)

1) $x \cdot y = ac + bd$

2) $x : y = ad + bc : ab + cd$.

Hieraus folgt $x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} = \frac{a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd}{ab+cd}$.

Nach §. 185. I. ist:

3) $(4F')^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2$.

4) $(4F'')^2 = (2cd)^2 - (c^2 + d^2 - x^2)^2$.

Der Werth von x^2 ist nun in diese Gleichungen einzusetzen. Hierbei ist zu bemerken, daß es genügt, x^2 in 3) einzusetzen und die rechte Seite möglichst zu vereinfachen. Aus dem Resultat kann dann das Resultat der rechten Seiten in 4) unmittelbar dadurch erzeugt werden, daß man a und b resp. mit c und d vertauscht, und umgekehrt. Der Grund liegt darin, daß x^2 seinen Werth nicht ändert, wenn man c und d statt a und b setzt, und a und b statt c und d.

Setzt man den Werth von x^2 in 3) ein, so folgt:

$$(4F')^2 = (2ab)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab+cd}\, ab\right)^2 \text{ oder}$$

$$(4F')^2 = (ab)^2\left[2^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab+cd}\right)^2\right] \text{ oder}$$

$$(4F')^2 = (ab)^2 \cdot \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{ab+cd} \cdot \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{ab+cd}.$$

Daher endlich:

5) $4F' = \frac{ab}{ab+cd} \cdot \sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}$.

Hieraus entnimmt man, wie oben angegeben:

6) $4F'' = \frac{cd}{ab+cd} \cdot \sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}$.

Wenn man jetzt 5) und 6) addirt, so folgt:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}.$$

Anmerk. Giebt man nur drei Seiten a, b, c des Vierecks im Kreise, fügt aber die Bedingung hinzu, daß dasselbe auch um einen Kreis liegen soll,

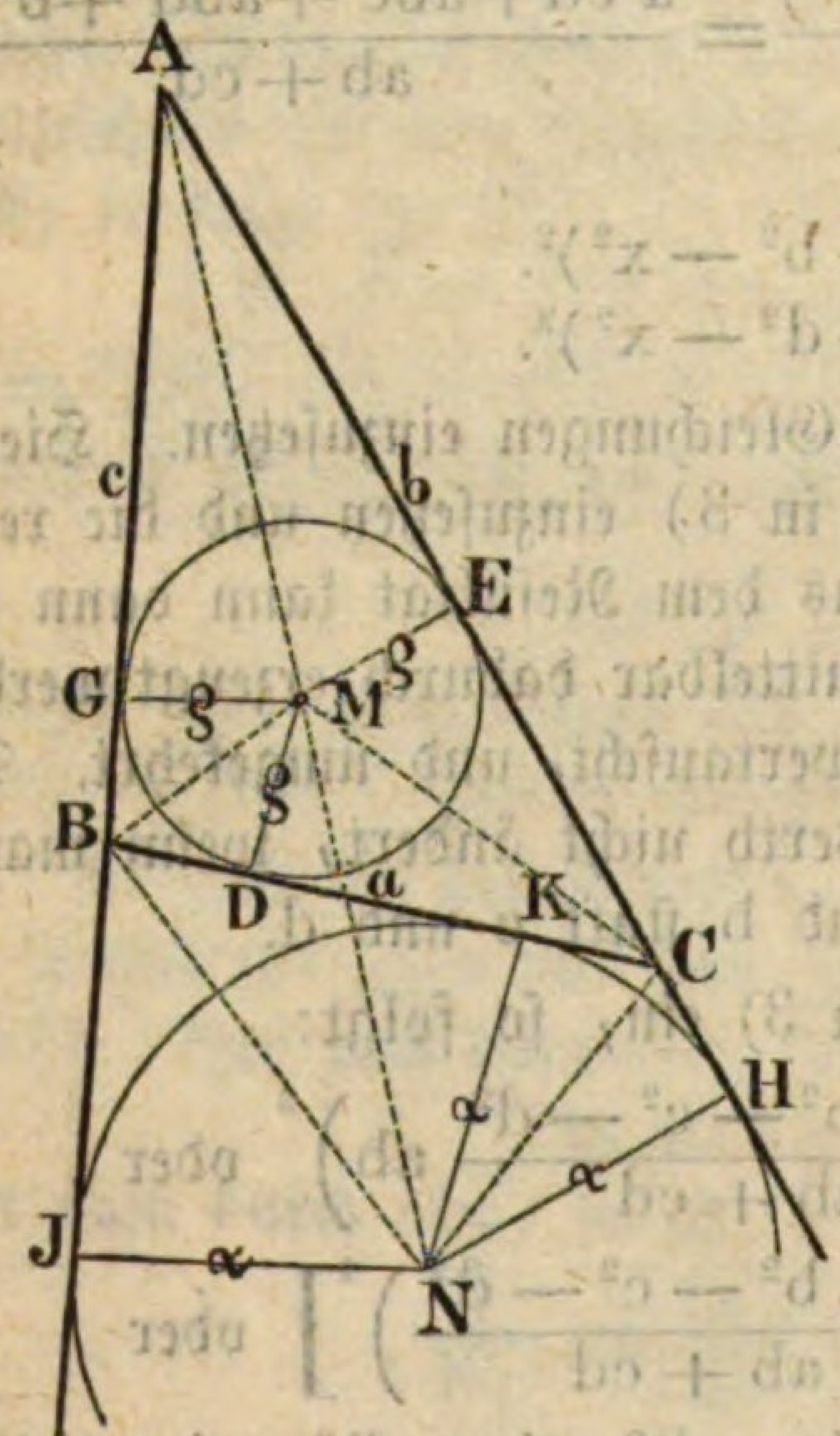
so ist die vierte Seite d aus der Gleichung $a + c = b + d$ zu entnehmen. Aus der vorstehenden Formel ergiebt sich dann der Inhalt des Vierecks:

$$F = \sqrt{abcd}.$$

§. 188.

Aufgabe.

Aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises und die Radien α, β, γ der drei Kreise, welche die Seiten des Dreiecks von außen berühren, zu bestimmen; auch die Berührungspunkte sämmtlicher Kreise mit den Seiten durch Rechnung zu finden.



Aufl. Um ϱ zu finden, verbindet man M mit A, B und C; dann ist, wenn F den Inhalt des ΔABC bezeichnet:

$$1) \; \frac{a}{2}\varrho + \frac{b}{2}\varrho + \frac{c}{2}\varrho = F.$$

Hieraus folgt $\varrho = \frac{F}{s}$. Um α zu finden, drückt man den Inhalt des Vierecks NBAC doppelt aus:

$$\frac{b}{2}\cdot\alpha + \frac{c}{2}\cdot\alpha = \frac{a}{2}\cdot\alpha + F;$$

folglich

$$\frac{b+c-a}{2}\cdot\alpha = F \text{ oder } \alpha = \frac{F}{s-a}.$$

Setzt man für F den Werth (§. 185. III.), so erhält man, wenn die Kreise mit den Radien β und γ resp. b und c von außen und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berühren (§. 182. Anm.).

$$\text{I.} \quad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \qquad \text{II.} \quad \alpha = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

$$\text{III.} \quad \beta = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}. \qquad \text{IV.} \quad \gamma = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}.$$

Die Berührungspunkte des Kreises um M findet man so: Es ist

$BG + CE = a$, folglich $AG + AE = 2.AG = b + c - a$;
$AG + CD = b$, „ $BG + BD = 2.BG = a + c - b$;
$BD + AE = c$, „ $CD + CE = 2.CD = a + b - c$.

Hieraus folgt:

V. $AG = AE = s - a$; $BG = BD = s - b$;
$CD = CE = s - c$.

Um endlich die Berührungspunkte des Kreises um N zu finden, so folgt aus $CK = CH$ und $BK = BI$, daß $AI + AH$ dem Umfange des ΔABC gleich ist, also $AI = AH = s$. Aus

$b + CK = \frac{a+b+c}{2}$ und $c + BK = \frac{a+b+c}{2}$ folgt aber

VI. $CK = CH = s - b$; $BK = BI = s - c$.

Vergleicht man VI. mit V., so ergiebt sich das Gesetz:

$$CK = BD \text{ und } BK = CD,$$

d. h. der Punkt (K), in welchem der Kreis um N die Seite a berührt, ist eben so weit von den Endpunkten dieser Seite entfernt, als der Punkt (D), in welchem der Kreis um M diese Seite berührt, von den entgegengesetzten Endpunkten.

Anmerk. Aus I. bis IV. folgt, daß der Inhalt des $\Delta ABC = \sqrt{\alpha\beta\gamma\varrho}$ ist, und daß sich verhält:

$$\alpha : \beta : \gamma : \varrho = \frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c} : \frac{1}{s}.$$

Beisp. 1. Sind die Seiten eines Dreiecks $a = 26'$, $b = 25'$, $c = 3'$, so findet man:

$$\varrho = \frac{4'}{3}, \ \alpha = 36', \ \beta = 18', \ \gamma = \frac{3'}{2}.$$

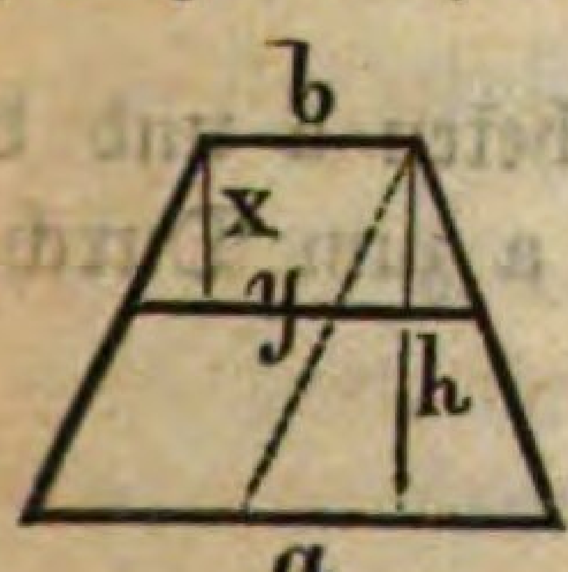
Beisp. 2. Die Seiten eines Dreiecks sind $3'$, $4'$ und $5'$; wie groß sind Inhalt und Umfang des eingeschriebenen Kreises?

Antw. Inh. $= \pi\square'$, Umf. $= 2\pi'$.

§. 189.

Aufgaben.

I. In einem Paralleltrapez mit den parallelen Seiten a und b und der Höhe h ist in der Entfernung x von b eine mit b parallele Linie y gezogen, welche in den nicht parallelen Seiten endet; man soll y durch x (als Function von x) ausdrücken.



Aufl. Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$y - b : a - b = x : h$, folglich:

$$y = b + \frac{a-b}{h} \cdot x.$$

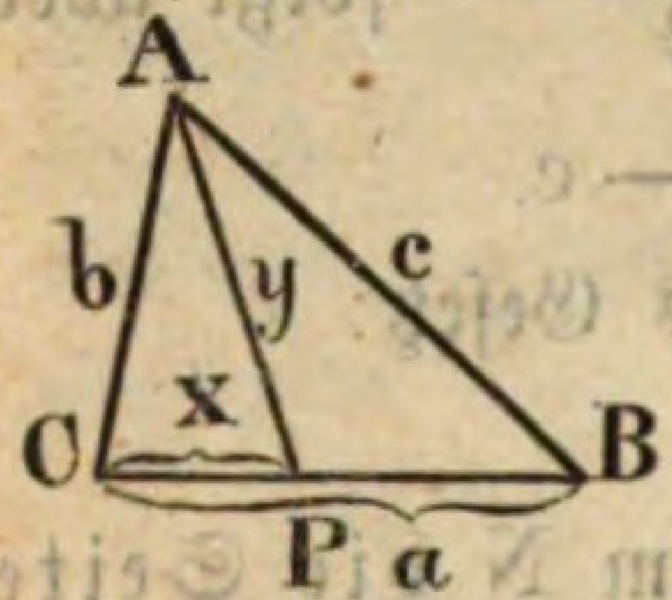
Es ist hierbei gleichgültig, ob $a > b$ oder $a < b$ ist.

Setzt man $b = 0$, so erhält man für das Dreieck

$$y = \frac{a}{h} x$$

als die Länge der mit der Seite a parallelen Linie y in der Entfernung x von der gegenüberliegenden Ecke.

II. Im ΔABC, welches durch seine Seiten a, b, c gegeben ist, hat ein Punkt P in der Seite a von C den Abstand x; man soll AP durch x ausdrücken.



Aufl. Es sei $AP = y$, und z bezeichne die Projection von b auf a, so folgt aus §. 64., je nachdem $\measuredangle C$ spitz oder stumpf ist:

$$1)\quad y^2 = b^2 + x^2 \mp 2xz$$
$$2)\quad c^2 = b^2 + a^2 \mp 2az.$$

Multiplicirt man 1) mit a und 2) mit x, und zieht dann beide Gleichungen von einander ab, so folgt:

$$ay^2 - xc^2 = b^2(a - x) + ax^2 - a^2x; \text{ folglich}$$

$$y = \sqrt{\frac{c^2x + (a-x)(b^2 - ax)}{a}}.$$

Diese Formel gilt auch, wenn x negativ ist.

Anmerk. Nach dieser Formel kann man in einem durch seine Seiten gegebenen Dreieck die Transversalen von den Ecken nach den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seiten und die Transversalen, welche die Winkel halbiren, berechnen. Im ersten Falle ist $x = \frac{a}{2}$, im zweiten ist $x = \frac{ab}{b+c}$ aus der Proportion $x : a - x = b : c$. Die Berechnung von y geschieht aber in diesen Fällen bequemer durch die Gesetze §. 68., 1. und §. 72., 1. und 4.

Man erhält: Die Transversale nach dem Mittelpunkte von a

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

die Transversale, welche den a gegenüberliegenden Winkel halbirt

$$= \frac{1}{b+c} \cdot \sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben ergeben sich hieraus die den andern Seiten zugehörigen Transversalen. (Vergl. §. 182. Anmerk.)

Man vergl. im nächsten §. die Aufg. 53. und 54.

§. 190.

Algebraisch-geometrische Aufgaben.

1) Ein rechtwinkliges Dreieck ist durch seine Katheten a und b gegeben; wie groß ist die Sehne, welche ein Kreis, der a zum Durchmesser hat, von der Hypotenuse abschneidet?

Antw. $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2) Innerhalb eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist sowohl über a, als auch über b ein Halbkreis construirt; wie groß ist die gemeinschaftliche Sehne?

Antw. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Man zeigt zuerst, daß der Durchschnittspunkt der Halbkreise in der einen Diagonale liegt, und wendet dann das hervorgehobene Gesetz in §. 88. Anmerk. 1. an.

3) In einem Rechteck mit den Seiten a und b sind von zwei gegenüberliegenden Ecken Lothe auf die zwischenliegende Diagonale gefällt; wie weit sind die Lothe von einander entfernt?

Antw. $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, wenn $a > b$ ist.

4) Der Radius $MA = r$ eines Kreises ist in 3 gleiche Theile getheilt, und C und D sind die Theilpunkte. In C und D sind auf derselben Seite des Radius zwei Perpendikel auf MA errichtet, welche in der Peripherie, resp. in F und G, enden; wie groß ist die Sehne FG?

Aufl. Nach §. 129. I. findet man zunächst CF und DG und dann nach dem Pythagoreischen Lehrsatz $FG = \frac{-2+\sqrt{10}}{3} \cdot r$ (vgl. Arithm. §. 122. V.).

5) a und b sind die Radien zweier sich von außen berührenden Kreise; wie lang ist die gemeinschaftliche Tangente zwischen den Berührungspunkten?

Antw. $\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2} = 2\sqrt{ab}$.

6) r und ϱ sind die Radien zweier Kreise, die Centrale ist $= a$ und es ist $a > r + \varrho$; wie lang ist die gemeinschaftliche Tangente zwischen den Berührungspunkten?

Antw. Die äußere $= \sqrt{a^2-(r-\varrho)^2}$; die innere $= \sqrt{a^2-(r+\varrho)^2}$.

7) Im ⏢ ABCD ist $AB = a$, $BC = b$, die Winkel bei B und D sind rechte, und die Summe der beiden unbekannten Seiten ist $= c$; man soll diese Seiten (x und y) und den Inhalt des Vierecks finden.

Aufl. $x + y = c$, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$; hieraus die Seiten

$$= \tfrac{1}{2}[c \pm \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}]$$

und der Inhalt $= \frac{(a+c-b)(b+c-a)}{4}$. (Vergl. §. 184. Beisp. 4.)

8) In einem gleichseitigen Dreieck von der Höhe h hat ein Punkt von zwei Seiten die Abstände b und c; wie groß ist sein Abstand von der dritten Seite?

Antw. $h - b - c$. (Welches Gesetz folgt hieraus?)

9) In einem Halbkreise ist a ein Loth auf dem Durchmesser, der eine Abschnitt des Durchmessers = b; wie groß ist der Radius?

Antw. $\frac{a^2 + b^2}{2b}$.

10) Der Umfang eines Quadrats sei = a; wie groß ist der Umfang des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises?

Antw. $\frac{a\pi}{4}\sqrt{2}$ und $\frac{a\pi}{4}$.

11) Die Seiten eines Dreiecks sind 62′, 123′ und 125′; wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, die drei Höhen, der Radius des umschriebenen und der Radius des eingeschriebenen Kreises?

Antw. Inh. = 3720 □′; die Höhen $59\frac{13}{25}$′, $60\frac{20}{41}$′ und 120′; die beiden Radien = $64\frac{1}{16}$′ und 24′.

12) Die Diagonale eines Quadrats sei = a; wie groß Inhalt und Umfang des Quadrats?

Antw. Inh. = $\frac{a^2}{2}$, Umf. = $2a\sqrt{2}$.

13) In einem Kreise hat die Sehne a vom Mittelpunkt den Abstand b; wie groß ist der Radius?

Antw. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}$.

14) In einem Kreise ist die Peripherie um die Länge a größer als der Durchmesser; wie groß ist der Radius?

Antw. $\frac{a}{2(\pi - 1)}$.

15) Der Inhalt eines Rhombus sei a^2, eine Diagonale = b; wie groß ist die andere?

Antw. $\frac{2a^2}{b}$.

16) Der Umfang eines Halbkreises sei = a; wie groß ist der Inhalt?

Antw. $\frac{a^2\pi}{2(\pi + 2)^2}$.

17) Der Inhalt eines Halbkreises sei = a^2; wie groß ist der Umfang?

Antw. $(\pi + 2)a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

18) Ein Kreisausschnitt zum Mittelpunktswinkel $\alpha°$ ist einem Kreise zum Radius r gleich; wie groß ist der Radius des Sectors?

Antw. $r \cdot \sqrt{\frac{360}{\alpha}}$.

19) Um wie viel muß man den Durchmesser a eines Kreises verlängern, wenn die vom Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente die Länge b haben soll?

Antw. Man erhält die Verlängerung $= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$.

20) Wie groß muß aber die Verlängerung sein, wenn die Tangente das Doppelte der Verlängerung sein soll?

Antw. $\frac{a}{3}$.

21) Vom Mittelpunkt einer Seite a eines Quadrats ist auf die eine Diagonale ein Loth gefällt; wie lang ist es?

Antw. $\frac{a}{4}\sqrt{2}$.

22) Der Inhalt eines Dreiecks ist $= a^2$. Eine Seite ist nach dem Verhältniß 3 : 7 getheilt, und durch den Theilpunkt ist eine Parallele mit der dem kleineren Theile anliegenden Seite gezogen; wie groß ist jeder der beiden Theile, in welche das Dreieck durch die Parallele zerlegt wird?

Antw. Das Dreieck $= 0{,}49 \,.\, a^2$, das Paralleltrapez $= 0{,}51 \,.\, a^2$.

23) Zwei sich schneidende Kreise haben die Radien a und b, ihre Centrale ist $= c$; wie groß ist die gemeinschaftliche Sehne?

Antw. $\frac{4}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wenn $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist.

24) Die drei Seiten eines Dreiecks sind a, b und c. Von der c gegenüberliegenden Ecke aus ist auf a die Länge p, auf b die Länge q abgetragen, und die Endpunkte von p und q sind verbunden; wie groß sind die beiden Theile des Dreiecks, in welche es durch diese Verbindungslinie zerlegt wird, wenn man $p < a$, $q < b$ annimmt?

Antw. Das Dreieck mit den Seiten p und q hat den Inhalt

$$\frac{pq}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

der andere Theil ist $= \frac{ab - pq}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

25) Die Seite eines regulären Fünfecks sei $= a$; wie groß ist die Diagonale?

Antw. $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$. — Alle Diagonalen sind gleich lang; bezeichnet man jede durch x, so folgt aus dem Ptolemäischen Lehrsatz: $x^2 = ax + a^2$.

26) Wie groß ist der Inhalt F dieses Fünfecks?

Aufl. Zieht man von einer Ecke aus beide Diagonalen, so reducirt sich die Auflösung auf die Inhaltsbestimmung dreier gleichschenkligen Dreiecke, von welchen zwei congruent sind. Bezeichnet x die Diagonale, so ist

$$F = \frac{x}{2}\sqrt{4a^2 - x^2} + \frac{a}{4}\sqrt{4x^2 - a^2}.$$

Setzt man für x den Werth aus 25) ein, so folgt:

$$F = \frac{a^2}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right] \text{ oder}$$

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$ (Vgl. Arithm. Beisp. 13. am Schlusse des §. 122.)

27) Ein Radius r eines Kreises ist über die Peripherie hinaus um r verlängert, und der Endpunkt der Verlängerung ist mit dem Endpunkte eines zweiten Radius verbunden, welcher auf dem verlängerten senkrecht steht; wie groß sind die beiden Theile dieser Secante?

Antw. Der äußere $= \frac{3}{5}r\sqrt{5}$, der innere $= \frac{2}{5}r\sqrt{5}$.

28) Wie lang hätte man die Verlängerung machen müssen, wenn die Secante durch die Kreisperipherie halbirt werden sollte?

Antw. $r(-1 \pm \sqrt{3})$.

29) Die parallelen Seiten eines Paralleltrapezes sind a und b; eine dritte Seite sei = c und stehe auf den parallelen Seiten senkrecht; wie weit ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Paralleltrapezes von jeder Seite entfernt?

Antw. Der Abstand von $a = \frac{ac}{a+b}$, von $b = \frac{bc}{a+b}$, von $c = \frac{ab}{a+b}$, von der 4ten Seite $= \frac{abc}{(a+b)\sqrt{(a-b)^2 + c^2}}$.

Bezeichnet man die Abstände von a, b, c resp. durch x, y, z (man zeichne sie in die Figur ein), so ist $x + y = c$; $x : z = c : b$; $y : z = c : a$. Den Abstand von der vierten Seite findet man, wenn man den Inhalt des ganzen Vierecks doppelt ausdrückt. Die vierte Seite selbst ergiebt sich durch den Pythagoreischen Lehrsatz.

30) Lehrsatz. Die beiden Kreise, von denen der eine durch die Ecken A, B, C eines Parallelogramms ABCD geht, der andere aber durch die Ecken A, B, D, verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Diagonalen des Parallelogramms.

Bew. Der Beweis läßt sich algebraisch führen, wenn man das Verhältniß der Radien r und ρ dieser Kreise sucht, woraus das Verhältniß der Kreise selbst zu finden ist. Es sei AB = a, BC = b, die Diagonalen AC und BD resp. gleich p und q, die Radien der Kreise um die $\Delta\Delta$ ABC und ABD resp. gleich r und ρ, so folgt aus Gleichheit dieser Dreiecke:

$$\frac{abp}{4r} = \frac{abq}{4\rho}; \text{ folglich } r : \rho = p : q, \text{ daher } r^2\pi : \rho^2\pi = p^2 : q^2.$$

31) Giebt es einen Kreis, ein Quadrat, ein gleichseitiges Dreieck, dessen Umfang so viel Fuß hat, als der Inhalt Quadratfuß?

Antw. Diese Eigenschaft hat der Kreis zum Radius 2 Fuß, das Quadrat zur Seite 4 Fuß und das gleichseitige Dreieck zur Seite $4\sqrt{3}$ Fuß.

32) Giebt es auch eine durch zwei concentrische Kreise gebildete Ringfläche dieser Art?

Antw. Jeder Ring von der Breite 2′ hat diese Eigenschaft.

33) Ein gleichseitiges Dreieck zur Seite a soll durch eine Kreislinie, welche eine Ecke zum Mittelpunkt hat, halbirt werden; wie groß ist der Radius?

Antw. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$.

34) Theilt man jede Seite eines $\triangle ABC$, und zwar AB, BC, CA resp. von A, B, C aus, in zwei Theile nach dem Verhältniß $n:m$ und verbindet die Theilpunkte: wie verhält sich dann das neue Dreieck zum $\triangle ABC$?

Antw. Wie $n^3 + m^3 : (n+m)^3$. (Vergl. §. 69. Beisp. 1.)

35) Dieselbe Aufgabe für das Viereck.

Aufl. Es verhält sich das eingeschriebene Viereck zum gegebenen, wie

$$n^2 + m^2 : (n+m)^2.$$

36) In einem Viereck, welches um einen Kreis liegt, sind zwei an einander stoßende Seiten a und b bekannt, und die der Seite b anliegenden Winkel sind rechte; man soll die unbekannten Seiten und den Inhalt finden.

Aufl. Die Seiten sind $\frac{ab}{2a-b}$ und $\frac{2a^2-2ab+b^2}{2a-b}$, der Inhalt $= \frac{a^2b}{2a-b}$.

37) Vier auf einander folgende Seiten a, b, c, d eines Fünfecks sind gegeben, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind rechte; wie groß ist die fünfte Seite?

Antw. $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

38) Fünf auf einander folgende Seiten a, b, c, d, e eines Sechsecks sind gegeben, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind rechte; wie groß ist die sechste Seite?

Antw. $\sqrt{(a+e-c)^2+(b-d)^2}$.

39) Der Durchmesser eines Kreises ist in drei Theile getheilt, welche die Längen b, a, c haben, so daß a zwischen b und c liegt. In jedem Endpunkte von a ist auf derselben Seite des Durchmessers

ein Loth auf ihn errichtet und bis zur Peripherie verlängert; wie groß ist die Sehne x, welche die Endpunkte dieser Lothe verbindet?

Aufl. Die Lothe sind $\sqrt{b(a+c)}$ und $\sqrt{c(a+b)}$. Man findet x nach dem Pythagoreischen Lehrsatz:

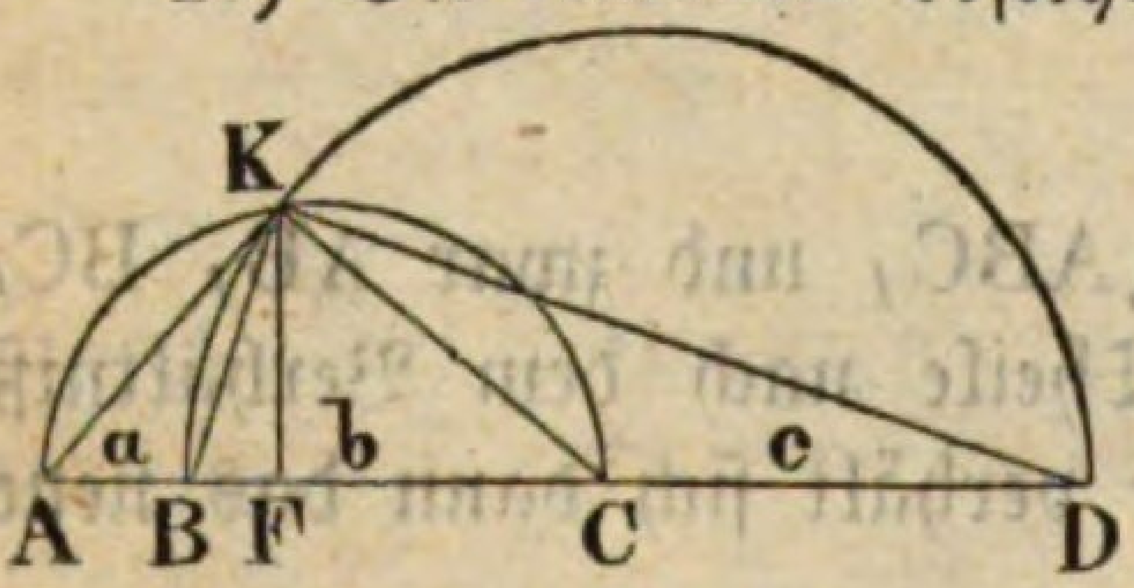
$$x = \sqrt{(a+b)(a+c)+bc-2\sqrt{(a+b)(a+c)bc}} \quad \text{oder}$$

$$x = \sqrt{(a+b)(a+c)}-\sqrt{bc} \quad \text{(Arithm. §. 122. V.)}$$

Beisp. Ist $a = 17'$; $b = 8'$; $c = 32'$, so folgt $x = 19'$.

Anmerk. Sind die Lothe auf verschiedenen Seiten des Durchmessers errichtet, so ist $x = \sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}$.

40) Die Linie AD besteht aus den drei Theilen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Ueber AC und BD sind auf derselben Seite von AD Halbkreise construirt, die sich in K schneiden; wie weit ist K von A, B, C, D und von der Linie AD entfernt?



Aufl. Es sei $KF \perp AD$, so kann man KF^2 doppelt ausdrücken und erhält: $(a+BF).(b-BF) = BF.(b+c-BF)$.

Hieraus folgt $BF = \frac{ab}{a+c}$, und nun findet man leicht:

$$KA = \sqrt{\frac{a+b}{a+c}(a+b+c)a}\,; \quad KB = \sqrt{\frac{b+c}{a+c}\cdot ab}\,;$$

$$KC = \sqrt{\frac{a+b}{a+c}bc}\,; \quad KD = \sqrt{\frac{b+c}{a+c}(a+b+c)c} \quad \text{und}$$

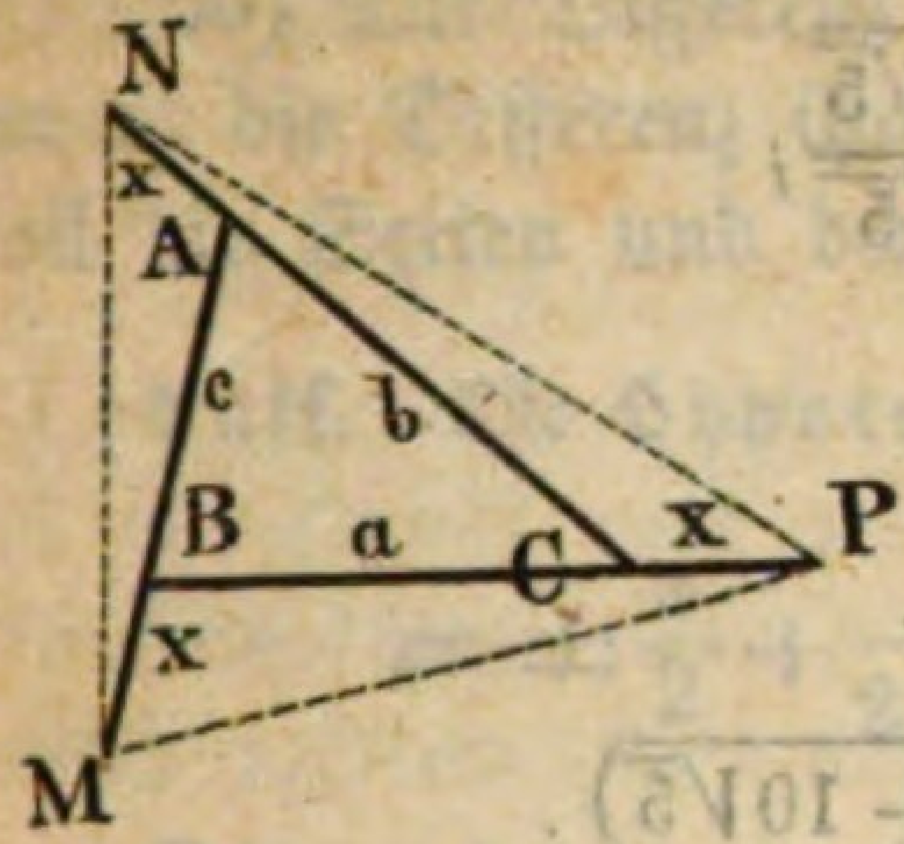
$$KF = \frac{\sqrt{(a+b+c)abc}}{a+c}.$$

41) In einem Quadrat zur Seite a ist eine Diagonale gezogen und in das eine entstandene Dreieck ein die Seiten berührender Kreis gelegt; wie weit ist sein Mittelpunkt von den Ecken des Quadrats entfernt?

Antw. Die kleinste der vier Entfernungen $= a(-1+\sqrt{2})$,
die größte » » » $= a$,
jede der letzten beiden » $= a\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(Der Radius $= \frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$).

42) Es ist $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c gegeben. Um welche Länge x muß man jede der drei Seiten verlängern, AB über B, BC über C, CA über A, wenn das Dreieck, dessen Ecken die Endpunkte dieser Verlängerungen sind, doppelt so groß sein soll, als das $\triangle ABC$?



Aufl. Bezeichnet man den Inhalt des ΔABC durch F, so hat man:

$$F : \Delta BMP = ac : (a + x)x$$
$$F : \Delta CPN = ab : (b + x)x$$
$$F : \Delta ANM = bc : (c + x)x.$$

Hieraus folgt nach der Aufgabe:

$$F = \frac{(a+x)x}{ac} \cdot F + \frac{(b+x)x}{ab} \cdot F + \frac{(c+x)x}{bc} \cdot F.$$

F hebt sich fort, und man erhält:

$$x = -\frac{ab+ac+bc}{2(a+b+c)} \pm \sqrt{\left[\frac{ab+ac+bc}{2(a+b+c)}\right]^2 + \frac{abc}{a+b+c}}.$$

Ist $a = b = c$, so ergiebt sich $x = (-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}}) \cdot a$.

Der negative Werth von x zeigt an, daß die Seiten in entgegengesetzter Richtung verlängert werden müssen, und zwar resp. um $x' - a$, $x' - b$, $x' - c$, wenn x' den absoluten Werth des negativen x bedeutet. In diesem Falle sind also nicht die absoluten Verlängerungen der Seiten einander gleich, sondern die Abstände der Endpunkte dieser Verlängerungen von den entfernteren Endpunkten der verlängerten Seiten. Nimmt man daher die Aufgabe genau nach ihrem Wortlaute, so paßt diese Auflösung nicht. Nur bei dem gleichseitigen Dreieck sind in diesem Falle auch die absoluten Verlängerungen einander gleich, und beide Dreiecke (NMP) sind congruent, haben aber verschiedene Lage.

43) Dieselbe Aufgabe für ein Quadrat zur Seite a.

Aufl. Die Verlängerung jeder Seite $= (-1 \pm \sqrt{3}) \cdot \frac{a}{2}$.

44) Dieselbe Aufgabe für das reguläre Sechseck mit der Seite a.

Aufl. Die Verlängerung jeder Seite $= (-1 \pm \sqrt{5}) \cdot \frac{a}{2}$.

45) Dieselbe Aufgabe für das reguläre Fünfeck mit der Seite a.

Aufl. Der Raum zwischen beiden Fünfecken besteht aus fünf congruenten Dreiecken; der Inhalt jedes derselben sei F. Man findet F durch Vergleichung mit einem der Dreiecke im gegebenen Fünfeck, welches von einer Diagonale und zwei Seiten desselben eingeschlossenen ist. Der Inhalt dieses Dreiecks ist $\frac{a^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ (vergl. Nr. 25.); man hat daher:

$$F : \frac{a^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = (a + x)x : a^2.$$

Hieraus ergiebt sich nun der Ansatz mit Hülfe von Nr. 26:

$$5 \cdot \frac{(a+x)x}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$

$$(a+x)x = \frac{2}{5}a^2\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}};$$

$$x^2+ax = \frac{a^2}{10}\sqrt{30+10\sqrt{5}}$$

$$x^2+ax-\frac{a^2}{10}(5+\sqrt{5}) = 0.$$

$$x = \frac{a}{10}\left(-5\pm\sqrt{75+10\sqrt{5}}\right).$$

46) Drei Städte A, B, C sind mit einander durch gerade Wege verbunden, und der Weg AB schneidet den Weg BC senkrecht. Der gerade Weg von A nach B ist um a Meilen kürzer, als der Umweg über C, und der gerade Weg von A nach C ist um b Meilen kürzer, als der Umweg über B; wie weit sind die Städte von einander entfernt?

Antw. $AB = \frac{ab}{a-b}$ Meilen, $BC = \frac{a+b}{2}$ Meilen und

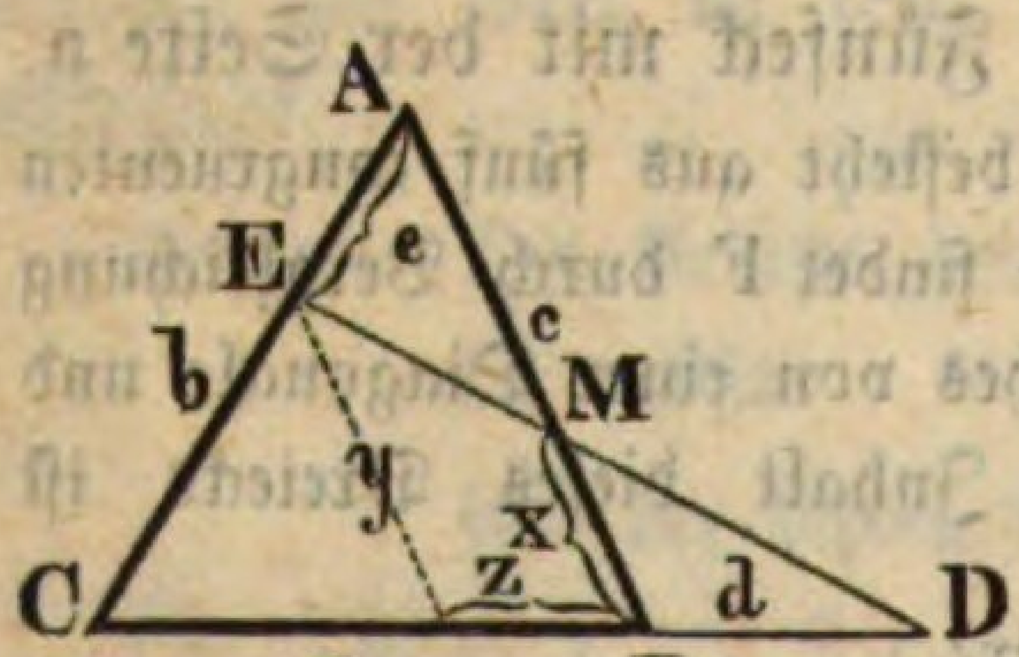
$AC = \frac{a^2+b^2}{2(a-b)}$ Meilen.

47) Im rechtwinkligen ΔABC sind die Katheten $AB = a$ und $BC = b$ gegeben, und in AB der Punkt N durch $AN = c$. Fällt man $NM \perp AC$ und $MP \perp BC$, verbindet dann P mit N: wie groß ist der Inhalt des ΔNMP?

Antw. $\frac{a^2bc}{2(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2-ac)$. Für $c = a$ entsteht: $\frac{(ab)^3}{2(a^2+b^2)^2}$.

48) In einem Halbkreise kennt man zwei dem begrenzenden Durchmesser parallele Sehnen a und b und ihren Abstand c von einander; wie groß ist der Durchmesser?

Antw. $\sqrt{a^2+\left(\frac{a^2-b^2-4c^2}{4c}\right)^2}$, wenn $a > b$.



49) ΔABC ist durch seine Seiten a, b, c gegeben. Die Verlängerung BD der Seite a sei $= d$, und der Theil AE der Seite b sei $= e$; ED schneide AB in M; wie lang ist BM?

Aufl. Man ziehe durch E eine Linie y parallel AB, so folgt:

1) $e:b = z:a$

2) $c:y = b:b-e$

3) $y:x = z+d:d$; hieraus

$$x = \frac{(b-e)cd}{ae+bd}.$$

50) Die Differenz der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= a$, die Differenz ihrer Projectionen auf die Hypotenuse $= b$; man soll die Seiten und den Inhalt finden.

Aufl. Die Hypotenuse $= \frac{a^2}{\sqrt{2a^2 - b^2}}$, die beiden Katheten $= \pm \frac{a}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{2a^2 - b^2}}$, der Inh. $= \frac{b^2 - a^2}{2a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2}{4}$.

Determination. Aus der Kathete $-\frac{a}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{2a^2 - b^2}}$ folgt zunächst $2a^2 - b^2 > 0$; dann muß aber auch die Kathete selbst größer als Null sein. Hieraus, oder aus dem Inhalt, folgt die Determination: $b < a\sqrt{2}$ und $b > a$.

51) Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch die auf die Hypotenuse gefällte Höhe in zwei Theile zerlegt, welche die Inhalte 54 □′ und 96 □′ haben; wie groß sind die drei Seiten?

Antw. 25′; 15′ und 20′.

52) Im Rechteck ABCD bezeichne a die Seite AD, und b die Seite AB; ein Punkt F in der Seite BC sei mit A und D verbunden; welche Gleichung muß zwischen a und b Statt finden, wenn das Rechteck eine der folgenden Eigenschaften haben soll?

1) AF soll den ∡ A und zugleich DF den ∡ AFC halbiren,
2) AF soll die Seite BC und zugleich DF den ∡ AFC halbiren.
3) AF soll die Diagonale BD senkrecht schneiden, und zugleich FD den ∡ AFC halbiren.

Aufl. 1) $a^2 = 2b^2$; 2) $3a^2 = 4b^2$; 3) $2a^2 = (1 + \sqrt{5})b^2$.

53) ΔABC ist durch seine Seiten a, b, c gegeben; wie lang ist in dem Kreise um dieses Dreieck die von A aus gezogene Sehne, welche die Seite a halbirt?

Antw. $\frac{b^2 + c^2}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$. Sind x und y die Theile der Sehne, so ist $xy = \frac{a^2}{4}$ und $b^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}a^2$. — Für $a = 14'$; $b = 10'$ und $c = 6'$ ist die Sehne $= \frac{68}{\sqrt{19}} = 15{,}60027'$.

54) Dieselbe Aufgabe, nur soll die Sehne nicht die Seite a, sondern den gegenüberliegenden ∡ A halbiren.

Aufl. Die Sehne ist $= (b + c)\sqrt{\frac{bc}{(a + b + c)(b + c - a)}}$. Man berechnet zuerst die beiden Theile, in welche a durch die Sehne zerlegt wird; sie mögen p und q sein. Sind dann x und y die Theile der Sehne (x im ΔABC),

so ist $xy = pq$ und $x^2 + pq = bc$. — Für $a = 9'$, $b = 8'$ und $c = 10'$ ist die Sehne $= \frac{40}{\sqrt{15}} = 10,328'$.

55) ΔABC ist durch seine Seiten gegeben: $AB = 8'$, $BC = 14'$ und $AC = 12'$. Verbindet man nun A mit dem Punkte D der Seite BC, in welchem diese Seite den in das ΔABC eingeschriebenen Kreis berührt: wie groß ist dann der Theil von AD, welcher Sehne dieses Kreises ist?

Antw. $\frac{90}{\sqrt{259}} = 5,5923'$. — Man findet zuerst die Berührungspunkte, dann AD nach dem vorigen §. Nr. II., hierauf den äußern Theil dieser Secante, endlich die Sehne.

56) Der Inhalt eines durch zwei concentrische Kreise gebildeten Ringes sei 22,62 □' ddc.-M., die Summe der Radien $= 5'$ dc.-M.; wie groß sind die Radien?

Antw. 3' und 2' dc.-M. (Genauer: 3,000012' und 1,999988'.)

57) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei durch den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises in die beiden Theile a und b zerlegt; wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

Antw. ab. — Bezeichnet man den Radius des eingeschriebenen Kreises mit x, so findet man zur Berechnung von x eine Gleichung mittelst des Pythagoreischen Lehrsatzes. Die Gleichung wird quadratisch; aber ohne sie aufzulösen, erkennt man aus ihr, daß der Inhalt des Dreiecks gleich ab ist.

§. 191.

Aufgaben.

I. Man kennt den Inhalt F einer Figur (z. B. einer Karte), und die Figur selbst ist gegeben; man soll den Maßstab finden, welcher dem Inhalte F zum Grunde liegt.

Aufl. Nehmen wir an, F sei in Quadratfuß gegeben, so bezeichne x die Länge eines Fußes des gesuchten Maßstabes. Man messe nun die Figur mit einem willkürlichen Maßstabe, in welchem die Länge e ein Fuß ist. Ergiebt sich als Inhalt $W . e^2$, so ist $W . e^2 = F . x^2$, folglich

$$x = e\sqrt{\frac{W}{F}}.$$

Unmittelbar ist x zu bestimmen, wenn statt des Inhalts eine Linie in der Figur gegeben ist. Hat man z. B. die Zeichnung eines Geschützrohres, und

kennt man auch seine Länge, etwa gleich a Fuß, so ist der a^{te} Theil der Länge, welche das Rohr in der Zeichnung hat, gleich x.

II. Eine Figur soll im verkleinerten oder vergrößerten Maßstabe so abgezeichnet werden, daß der Inhalt der Copie $\frac{n}{m}$ vom Inhalte der gegebenen Figur wird; man soll aus dem Maßstabe der gegebenen Figur den der Copie finden.

Aufl. Es sei e die Längeneinheit des Maßstabes der gegebenen, x die der neuen Figur, so müssen beide Figuren ähnlich sein, folglich sich zu einander verhalten, wie die Quadrate homologer Linien. Solche Linien verhalten sich aber zu einander wie die Einheiten der Maßstäbe, woraus folgt:

$$F : \frac{n}{m} F = e^2 : x^2, \quad \text{daher} \quad x = e\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Die algebraische Analysis.

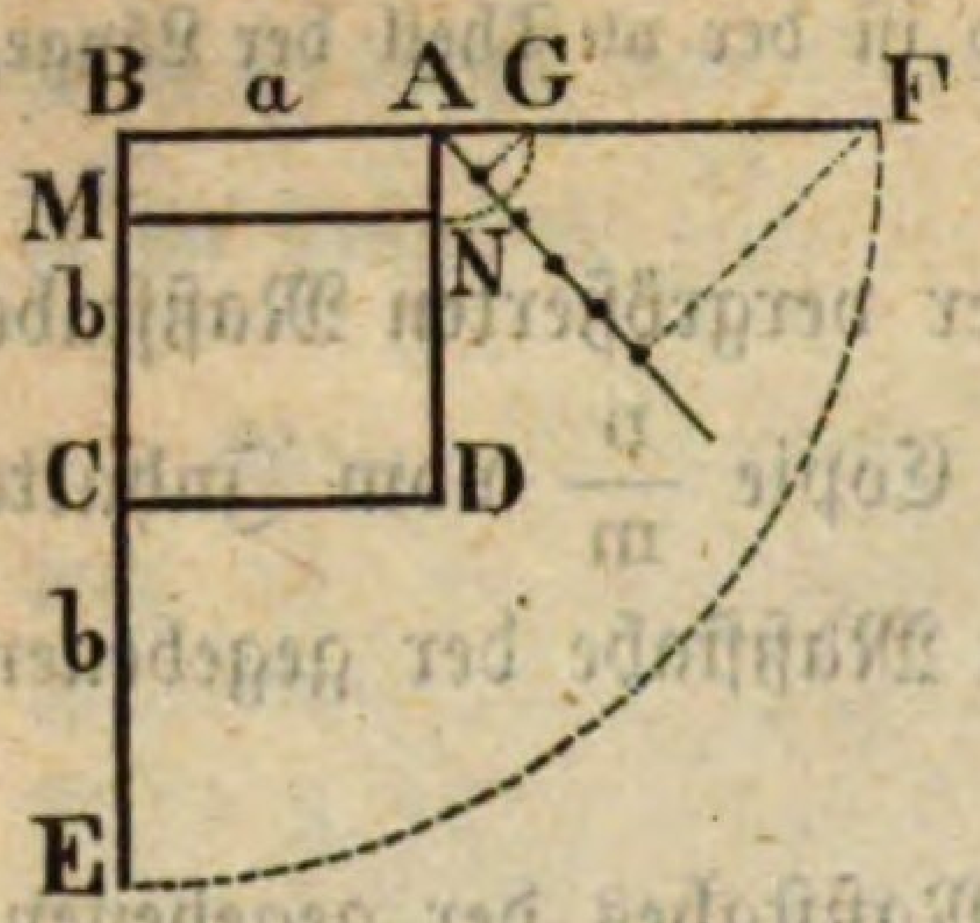
§. 192.

Die algebraische Analysis einer Constructions-Aufgabe besteht darin, daß man unbekannte Linien einer Figur mittelst der Algebra aus den gegebenen Stücken berechnet, sie dann nach den gefundenen arithmetischen Ausdrücken construirt und zur Construction der ganzen Figur benutzt. Es wird hierbei immer die genaue Construction mit Zirkel und Lineal vorausgesetzt. Ist z. B. eine Linie $= a\sqrt{2}$ gefunden, so gehört die annähernde Construction, bei welcher man etwa $a\sqrt{2} = 1{,}414 \,.\, a$ setzt, nicht hierher. Ferner wird immer vorausgesetzt, daß die gegebenen Linien durch Buchstaben ausgedrückt sind, so daß die zu construirende Linie ein Buchstabenausdruck von der ersten Dimension sein muß. Man kann allerdings auch eine Linie, welche durch eine bestimmte Zahl ausgedrückt ist, construiren, wenn man die Längeneinheit kennt, auf welche sich diese Zahl bezieht; aber dann kann man auch immer diese Längeneinheit durch einen Buchstaben bezeichnen und der Zahl als Factor hinzufügen.

Beispiel. Ein Rechteck durch eine Linie, welche einer Seite parallel ist, so zu theilen, daß sich die Umfänge der Theile wie 2 : 3 verhalten.

Aufl. Sind a und b die Seiten, ist die Theilungslinie mit a parallel und hat sie von a den Abstand x, so folgt:

$$2a + 2x : 2a + 2(b - x) = 2 : 3; \quad \text{hieraus: } x = \frac{2b - a}{5}.$$



Construction. ABCD sei das gegebene Rechteck; man verlängere BC über C um sich selbst, mache BF = BE = 2b, so ist AF = 2b — a. Schneidet man nun AG = $\frac{1}{5}$AF von AF ab, macht AN = AG und zieht NM ∦ AB: so ist ABCD durch NM, wie verlangt wurde, getheilt.

Determination. $2b > a$ (vergl. §. 183. I. Nr. 2. Beisp. 2.)

§. 193.

Die Grundconstructionen der algebraischen Analysis.

Alle Constructionen der algebraischen Analysis lassen sich (wenn man $a \pm b$ als an sich verständlich übergeht) auf folgende Grundconstructionen zurückführen:

$$\text{I.} \quad x = \frac{a \, . \, b}{c}.$$

$$\text{II.} \quad x = \frac{a^2}{b}.$$

$$\text{III.} \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

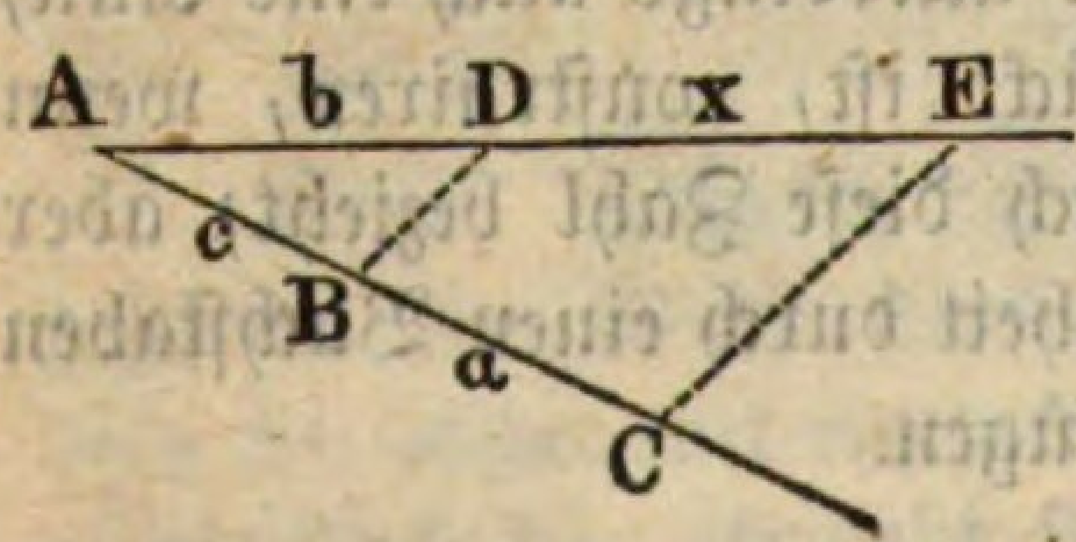
$$\text{IV.} \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$\text{V.} \quad x = \sqrt{ab}.$$

Zu diesen treten noch zwei Constructionen für den besonderen Fall hinzu, wenn $c < b$ ist:

$$\text{VI.} \quad y = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ac}. \qquad \text{VII.} \quad z = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ac}.$$

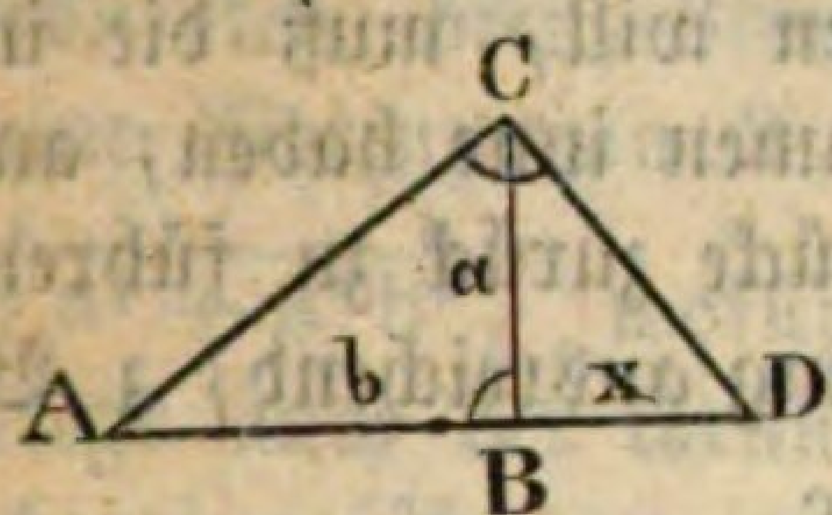
Zu I. Aus $x = \frac{a \, . \, b}{c}$ folgt $c : a = b : x$, d. h. x ist die vierte Proportionale zu c, a und b. Die Construction kann nach dem Satze geschehen: »Parallele Linien schneiden von den Schenkeln eines Winkels proportionale Stücke ab.«



Construction. Man zeichne einen beliebigen ∡A, mache AB = c, BC = a, AD = b, ziehe BD, und CE ∦ BD: so ist DE = x. — Man kann auch AC = a machen; dann wird AE = x. Man kann ferner a mit b vertauschen, auch BD und CE benutzen. Macht man z. B. AB = c, BD = a, AC = b: so wird CE = x.

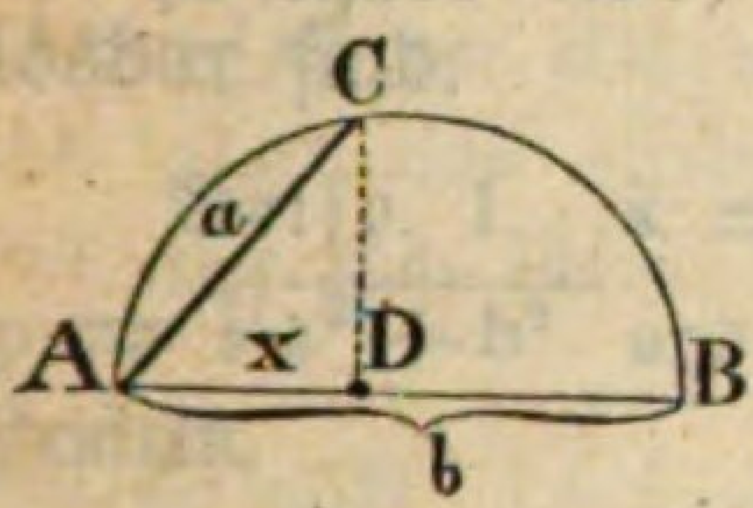
Zu II. $x = \frac{a^2}{b}$ kann zunächst nach I. construirt werden; häufig ist aber die Construction bequemer, welche aus den Sätzen vom recht-

winkligen Dreieck oder vom Halbkreise entspringt. Aus $bx = a^2$ erkennt man, daß a mittlere geometrische Proportionale zwischen b und x ist.



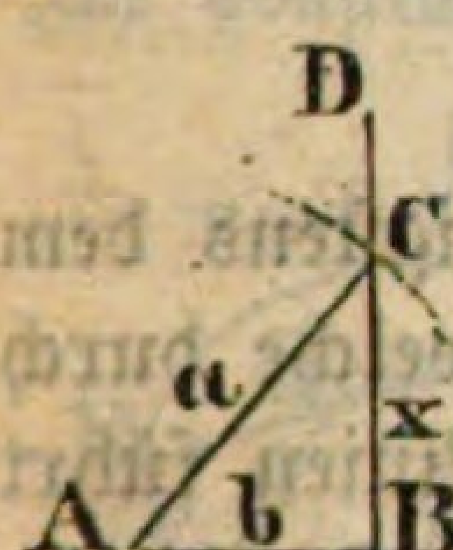
Construction. 1) Man mache $AB = b$, errichte $BC \perp AB$, mache $BC = a$, ziehe AC, errichte $CD \perp AC$: so ist $BD = x$.

2) Wenn $a > b$ ist, kann man auch $AC = a$ machen; es wird dann $AD = x$.



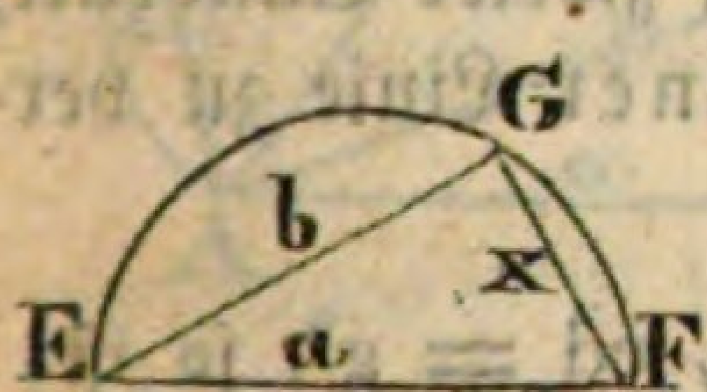
3) Ist $a < b$, so ist folgende Construction bequem: Man mache $AB = b$, schlage über AB einen Halbkreis, trage von A aus a als Sehne ein, $AC = a$, fälle $CD \perp AB$: so ist $AD = x$.

Zu III. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind.



Zu IV. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete b, und dessen Hypotenuse a ist.

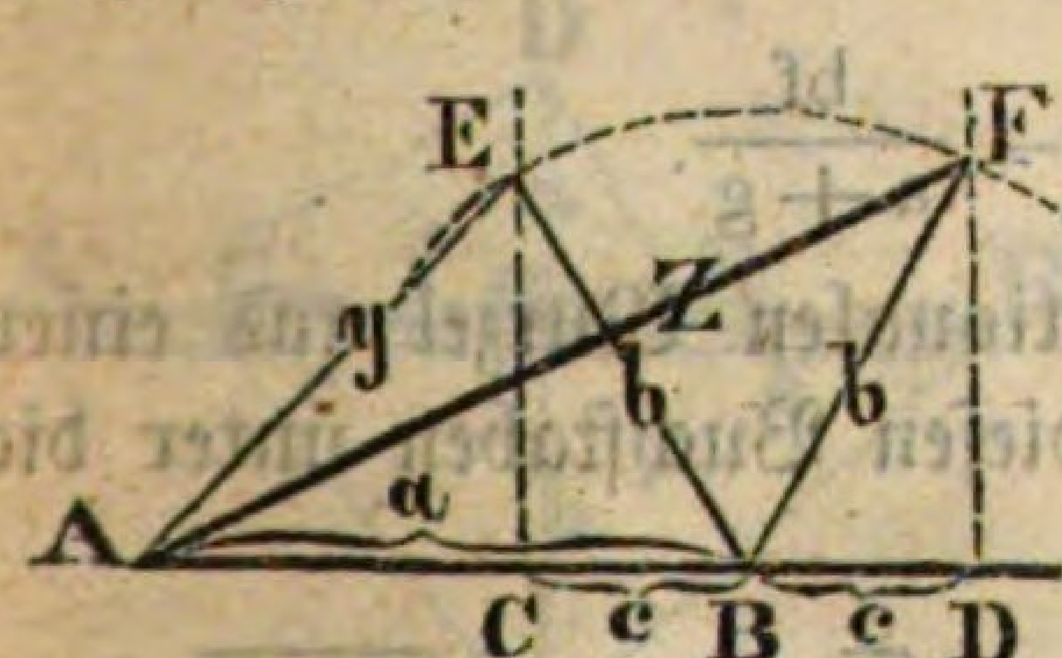
Construction. 1) Man mache $AB = b$, errichte $BD \perp AB$, schlage mit a als Radius um A einen Kreis, welcher BD in C schneidet: so ist $BC = x$.



2) Man mache $EF = a$, schlage über EF einen Halbkreis, trage von E aus b als Sehne ein, $EG = b$, ziehe FG: so ist $FG = x$.

Zu V. Aus $x = \sqrt{ab}$ folgt, daß x mittlere geometrische Proportionale zwischen a und b ist. Die Construction von x ist ausführlich im Beispiel 4. zur Analysis durch Gesetze (§. 174. I.) enthalten. Der Leser möge die beiden dort angegebenen Constructionen sich einprägen, denn beide werden gebraucht.

Zu VI. und VII. Die Ausdrücke $y = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ac}$ und $z = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ac}$ lassen sich nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatze construiren; es muß dann c als Projection von b auf a betrachtet werden. Hieraus folgt die schon oben angegebene Bedingung $c < b$.



Construction. Man mache $AB = a$, verlängere AB über B, mache $BC = BD = c$, errichte CE und $DF \perp AD$, schlage um B mit b als Radius einen Kreis, welcher CE und DF in E und F schneidet, und ziehe AE und AF: so ist $AE = y$, $AF = z$.

§. 194.
Construction zusammengesetzter Ausdrücke.

Wer zusammengesetzte Ausdrücke construiren will, muß die im vorigen §. enthaltene Grundconstruction vollkommen inne haben; auf sie ist die Construction zusammengesetzter Ausdrücke zurück zu führen. Hierzu ist oft eine einfache arithmetische Umformung ausreichend; z. B.

$$\frac{ab+bc}{d}=\frac{b(a+c)}{d} \text{ oder } =\frac{ab}{d}+\frac{bc}{d} \text{ (Grd.-Constr. I.)}$$

$$\sqrt{a^2-ab}=\sqrt{a(a-b)} \text{ (V.)}$$

$$\sqrt{\frac{5}{6}ab}=\sqrt{\frac{5}{6}a.b} \text{ (V.)}.$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ (IV.)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}a^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ (III.) u. s. w.}$$

Ist aber eine größere Umformung nöthig, so ist, wenigstens dem Ungeübteren, die Einführung neuer Linien (Buchstaben), welche durch die gegebenen zu construiren sind, zu empfehlen. Solche Linien führt man namentlich ein, um die Summe oder Differenz zweier Quadrate, oder das Product zweier Linien in das Quadrat einer Linie zu verwandeln, die dann immer construirbar ist. z. B.

1) $x=\sqrt{a^2+b^2-cd}$. Setzt man $a^2+b^2=f^2$, $cd=g^2$, so ist:
$f=\sqrt{a^2+b^2}$, $g=\sqrt{cd}$, $x=\sqrt{f^2-g^2}$.

2) $y=\sqrt{2a^2+3b^2}$. Setzt man $2a^2=f^2$, $3b^2=g^2$, so ist:
$f=\sqrt{2a.a}$, $g=\sqrt{3b.b}$, $y=\sqrt{f^2+g^2}$.

3) $z=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$. Zunächst kann man umformen:

$$z=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+b^2}=a+b-\frac{(a+b)ab}{a^2+b^2}$$

$$=a+b-\frac{(a+b)b}{a+\frac{b^2}{a}}. \text{ Setzt man}$$

$$a+b=f,\ \frac{b^2}{a}=g, \text{ so ist } z=f-\frac{bf}{a+g}.$$

Erscheint ein Buchstabe mit einer irrationalen Wurzel aus einer abstracten Zahl als Factor, so muß man diesen Buchstaben unter die Wurzel bringen.

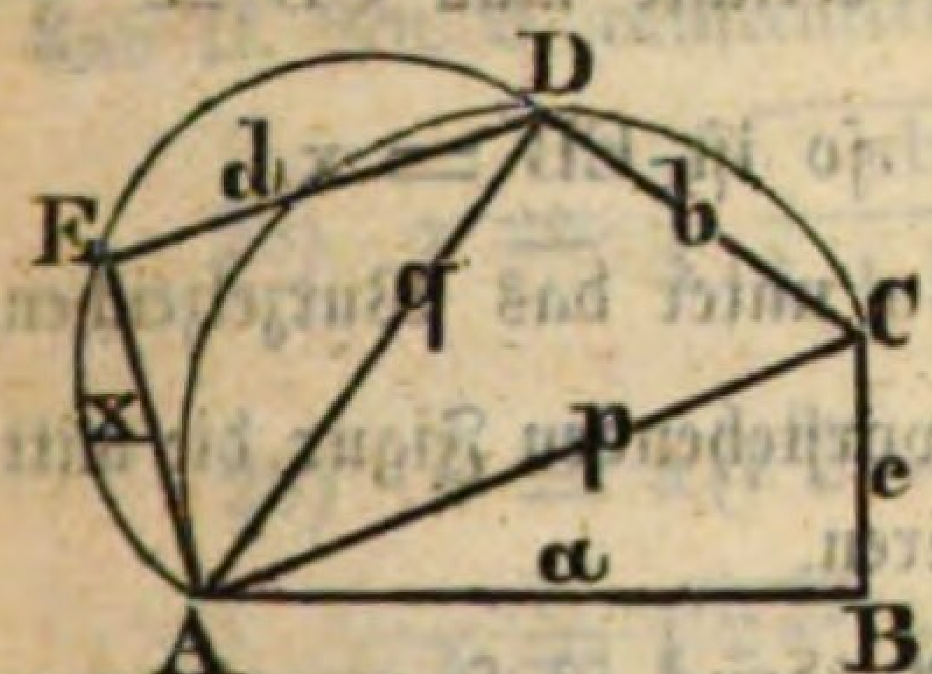
z. B. $a\sqrt{5}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}$; $a-b\sqrt{\frac{1}{3}}=a-\sqrt{\frac{1}{3}b.b}$.

Ausdrücke, welche sich auf die Grundconstructionen nicht zurückführen lassen, sind elementar nicht construirbar. Dies gilt namentlich von 3ten, 5ten, 6ten u. s. w. Wurzeln; nur wenn der Wurzelexponent eine Potenz von 2 ist, kann die Wurzel construirt werden; z. B. $\sqrt[4]{a^4+a^2b^2}$, wofür $\sqrt{a.\sqrt{a^2+b^2}}$ geschrieben werden kann. Hierin liegt auch der Grund, warum Aufgaben, welche auf kubische Gleichungen führen, im Allgemeinen durch elementare Construction nicht lösbar sind.

Beisp. 1. $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Setzt man $a^2+b^2=p^2$, so ist $p=\sqrt{a^2+b^2}$ und $x=\sqrt{p^2+c^2}$. Jetzt sind p und x nach III. zu construiren.

Beisp. 2. $x=\sqrt{a^2-b^2+c^2-d^2}$. Setzt man $a^2+c^2=p^2$, so ist $x=\sqrt{p^2-b^2-d^2}$; setzt man $p^2-b^2=q^2$, so ist $x=\sqrt{q^2-d^2}$. Zur Construction (nach III. und IV.) hat man also:

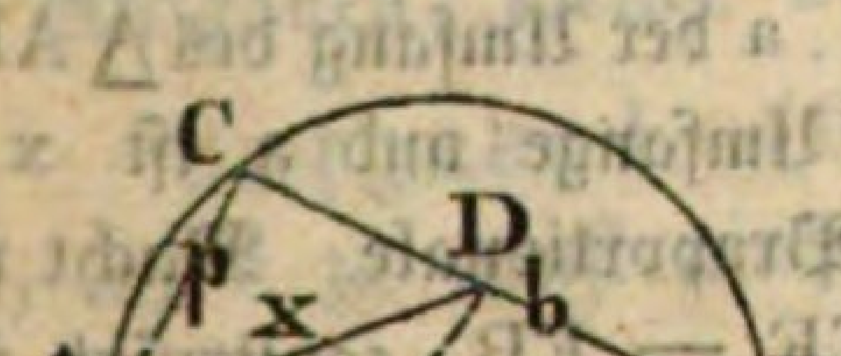
$$p=\sqrt{a^2+c^2},\quad q=\sqrt{p^2-b^2},\quad x=\sqrt{q^2-d^2}.$$



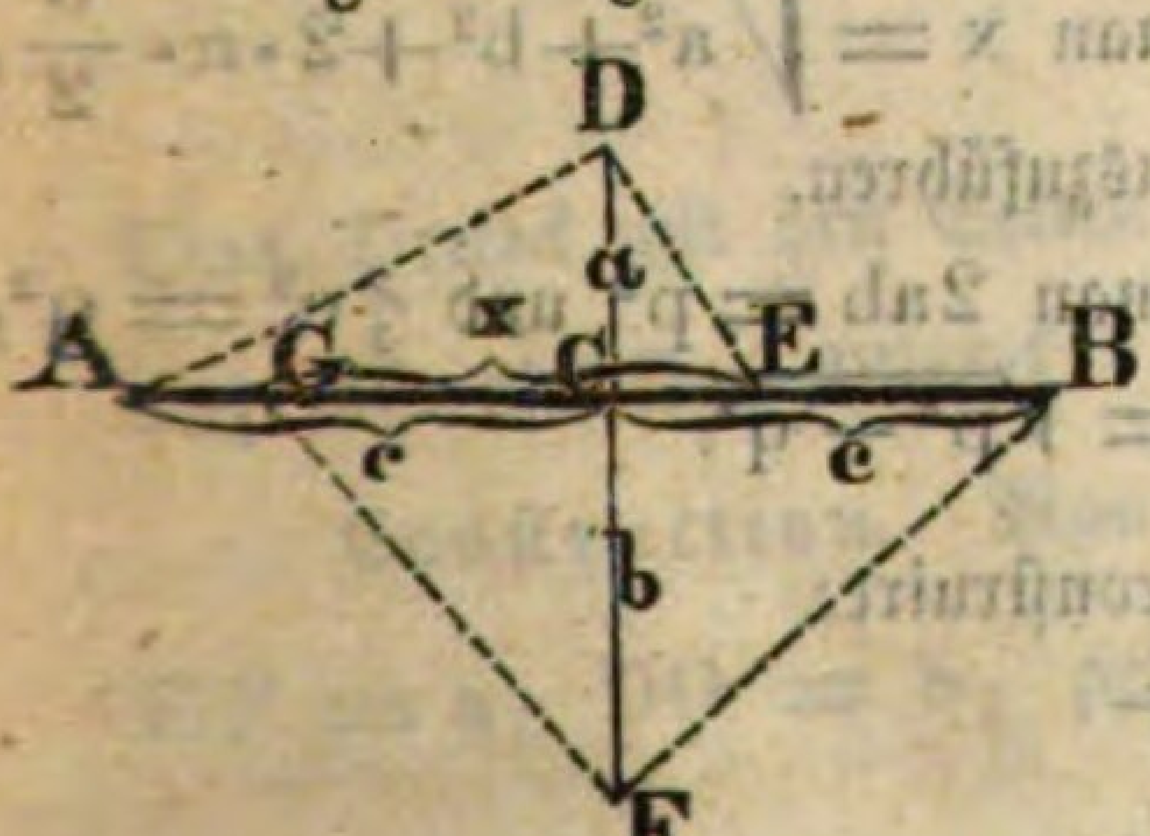
Construction. Man mache AB = a, BC ⊥ AB und BC = c: so ist AC = p; man schlage über AC einen Halbkreis, trage CD = b als Sehne ein: so ist AD = q; man schlage über AD einen Halbkreis und trage DE = d als Sehne ein, so ist AE = x.

Beisp. 3. $x=\sqrt{a^2+\frac{2}{3}b^2}$. Setzt man $\frac{2}{3}b^2=p^2$, so ist $p=\sqrt{\frac{2}{3}b.b}$ und $x=\sqrt{a^2+p^2}$; p ist nach V., x nach III. zu construiren.

Beisp. 4. $x=\sqrt{2a^2-2b^2}$. Setzt man $a^2-b^2=p^2$, so ist $p=\sqrt{a^2-b^2}$ und $x=\sqrt{p^2+p^2}$. Construction. Man schlage über AB = a einen Halbkreis und trage BC = b als Sehne ein, so ist AC = p; macht man nun CD = CA, so ist AD = x.



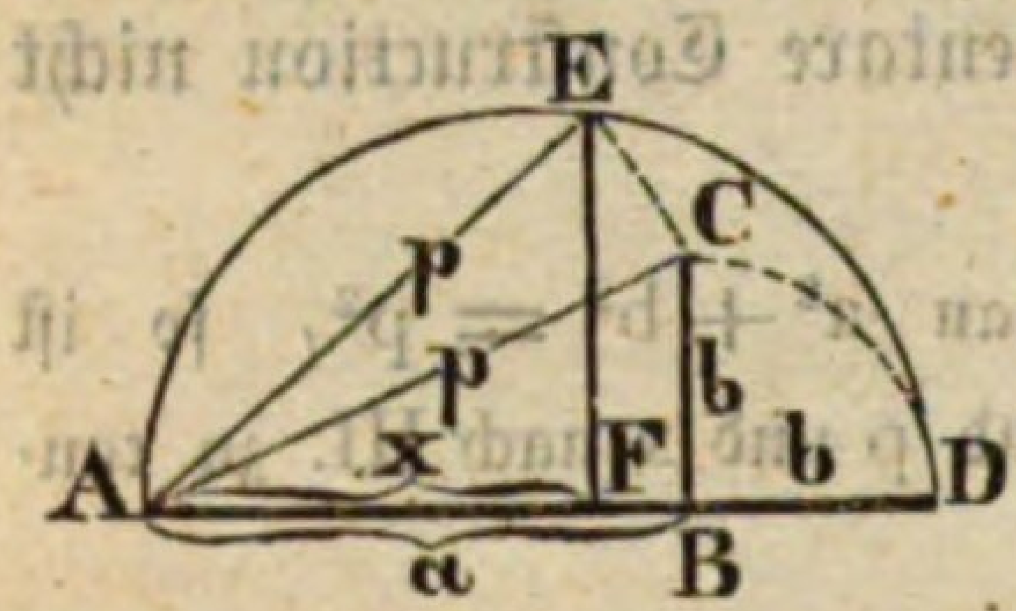
Beisp. 5. $x=\frac{a^2+b^2}{c}$. Man kann $x=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}$ setzen, woraus sich nach II. folgende Construction ergiebt:



Man mache AC = CB = c, lege durch C die Linien DF ⊥ AB, mache CD = a und CF = b, ziehe AD und BF, errichte DE ⊥ AD und FG ⊥ BF: so ist $CE=\frac{a^2}{c}$ und $CG=\frac{b^2}{c}$, folglich GE = x. — Man kann auch $a^2+b^2=p^2$ setzen, woraus $p=\sqrt{a^2+b^2}$

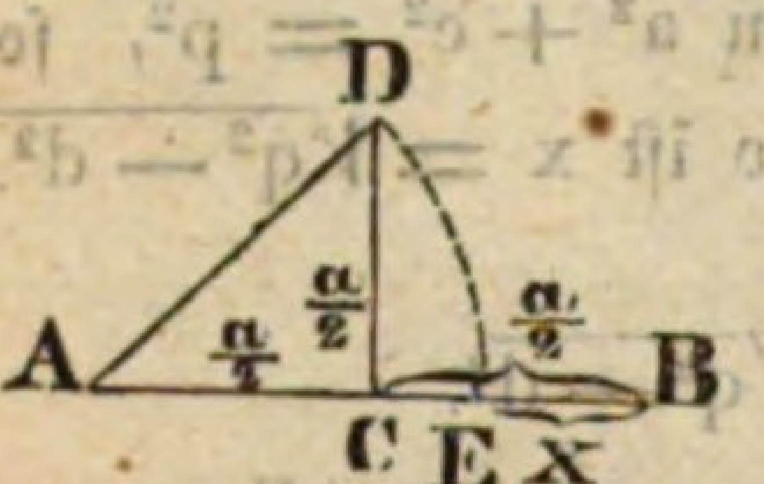
und $x = \frac{p^2}{c}$ folgt. Der Leser versuche überhaupt vorgelegte Ausdrücke auf verschiedene Weise zu construiren; dadurch lernt er gewandt und kurz construiren.

Beisp. 6. $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$. Setzt man $a^2 + b^2 = p^2$, so ist $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $x = \frac{p^2}{a + b}$. Da $a + b > p$ ist, kann so construirt werden: Man mache



$AB = a$, $BC \perp AB$ und $BC = b$, so ist $AC = p$; ferner mache man $BD = BC = b$, schlage über AD einen Halbkreis und trage $AE = AC = p$ als Sehne ein. Fällt man nun EF $\perp$ AD, so ist $AF = x$.

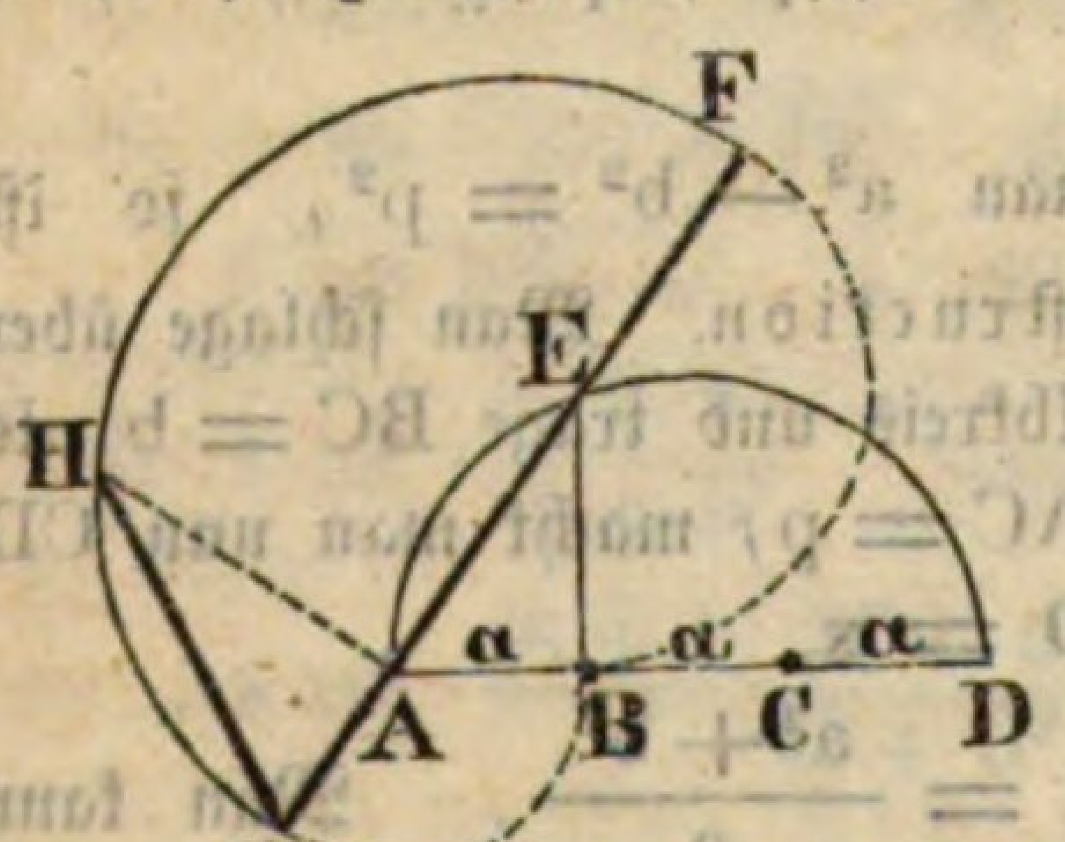
Beisp. 7. $x = a(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$. Man schreibt



$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Hieraus folgt die Construction: Man mache $AB = a$, halbire AB in C, senkrecht auf AC errichte man $CD = \frac{a}{2}$: so ist $AD = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; macht man also $AE = AD$, so ist $EB = x$.

Beisp. 8. $x = a\sqrt{1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}}$. Bringt man a unter das Wurzelzeichen, so ist $x = \sqrt{a\,[a - a\sqrt{\tfrac{1}{2}}]}$. Es ist sonach in der vorstehenden Figur die mittlere Proportionale zwischen AB und EB zu construiren.

Beisp. 9. $x = a\sqrt{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$. Dieser Ausdruck ist so umzuformen: $x = \sqrt{a[a + \sqrt{2a\,.\,a} + \sqrt{3a\,.\,a}]}$.



Construct. Man mache $AB = BC = CD = a$ und schlage über AD einen Halbkreis. Errichtet man BE $\perp$ AD und zieht AE, so ist $a + \sqrt{2a\,.\,a} + \sqrt{3a\,.\,a}$ der Umfang des Δ ABE, und zwischen diesem Umfange und a ist x die mittlere geometrische Proportionale. Macht man also $AG = AB$, $EF = EB$, construirt über GF einen Halbkreis, errichtet AH $\perp$ GF und zieht GH: so ist $GH = x$.

Beisp. 10. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$. Setzt man $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{b}{2}}$, so ist die Construction unmittelbar nach VII. auszuführen.

Beisp. 11. $x = \sqrt{2ab - \tfrac{2}{3}c^2}$. Setzt man $2ab = p^2$ und $\tfrac{2}{3}c^2 = q^2$, so ist $p = \sqrt{2a\,.\,b}$, $q = \sqrt{\tfrac{2}{3}c\,.\,c}$ und $x = \sqrt{p^2 - q^2}$.

Beisp. 12. $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3})$. Man construire:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Die Construction der folgenden Ausdrücke sei dem Leser überlassen.

13) $x = \sqrt{a^2 + ab}$. 14) $x = \sqrt{a^2 - cd}$.

15) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - ac}$. 16) $x = \sqrt{4a^2 - ab}$.

17) $x = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$. 18) $x = a\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

19) $x = a(2 - \sqrt{2})$. 20) $x = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

21) $x = a\sqrt[4]{5}$. 22) $x = \frac{ab}{a-b}$.

23) $x = a\sqrt{\frac{a}{b}}$. 24) $x = a\sqrt{\frac{b}{a+b}}$.

25) $x = \frac{abc}{de}$. 26) $x = \frac{a^2}{b} \cdot \sqrt{3}$.

27) $x = \frac{abc}{a^2 + bc}$; man kann durch Division den Ausdruck umformen in $x = a - \cfrac{a^2}{a + \cfrac{bc}{a}}$ und den Subtrahend nach den Grundconstructionen I. und II. Nr. 3. construiren.

28) $x = \sqrt{\frac{ab}{1+\sqrt{2}}}$; man mache den Nenner rational.

29) $x = a(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2})$; zur Construction forme man um:

$x = \sqrt{2a^2} - \sqrt{a \cdot \sqrt{2a^2}}$.

30) $x = \sqrt[4]{abcd}$; man setze $x = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$.

§. 195.

Aufgaben, welche unmittelbar auf die Grundconstructionen führen.

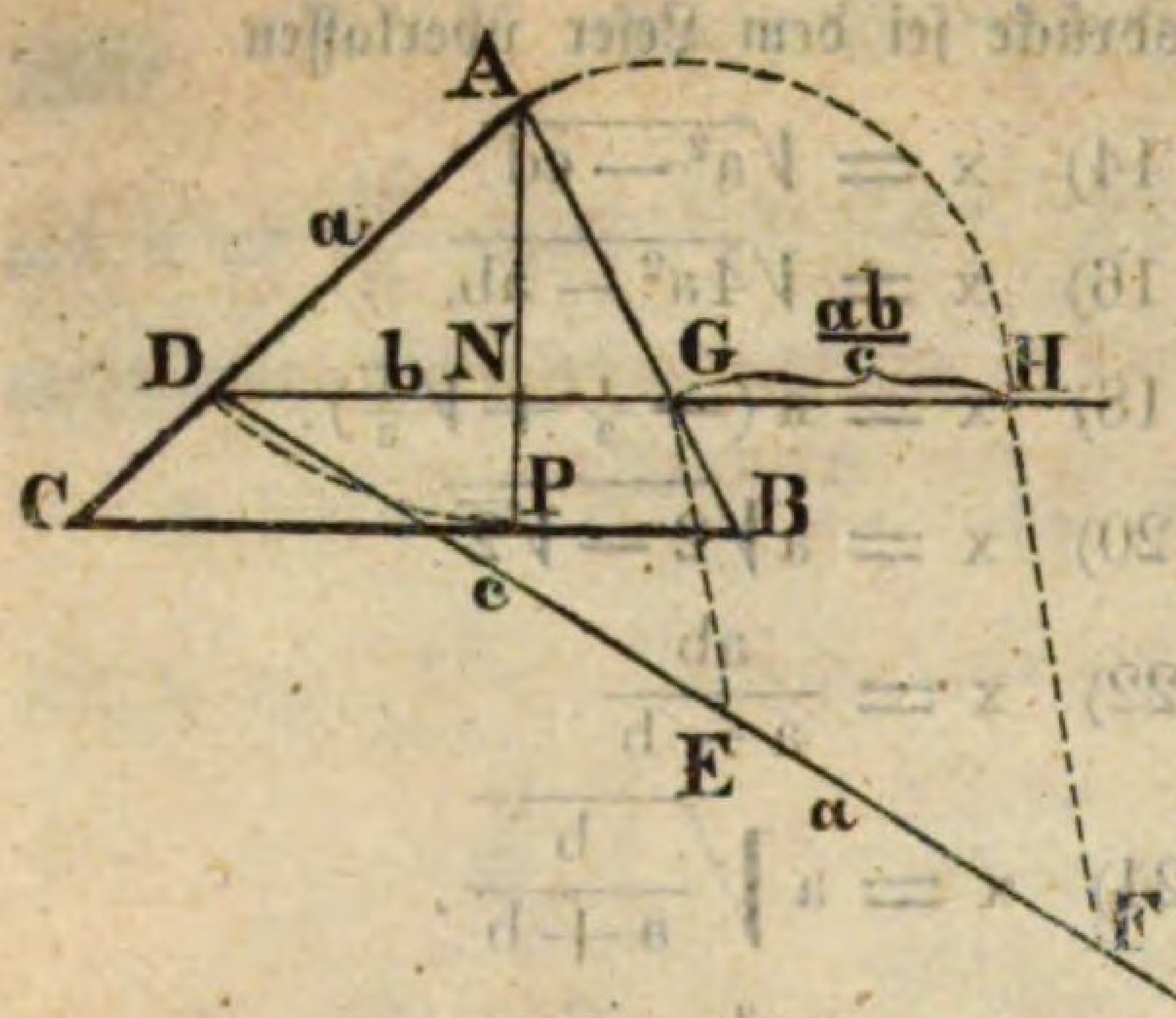
Aufgabe 1. (Gr.-Constr. I.) Ein Dreieck aus seinen drei Höhen a, b, c zu construiren.

Analys. Bezeichnen resp. x, y, z die Seiten, so ist $ax = by = cz$, folglich (wenn man durch abc dividirt) $x : y : z = bc : ac : ab$, oder

$$x : y : z = b : a : \frac{ab}{c}.$$

Das Dreieck mit den Seiten b, a, $\frac{ab}{c}$ ist daher dem gesuchten Dreieck ähnlich, hat also dieselben Winkel.

Construction. Man construirt den beliebigen $\measuredangle$HDF, macht $DE = c$, $EF = a$, $DG = b$, zieht FH $\#$ EG: so ist $GH = \frac{ab}{c}$. Schlägt man



nun um G mit GH und um D mit a einen Kreis, so erhält man Δ ADG, welches dem zu construirenden ähnlich ist. Fällt man in diesem Dreieck die Höhe AN, so ist sie der Höhe a in dem gesuchten Dreieck homolog; verlängert man also AN, so daß AP = AD = a ist, zieht durch P eine Parallele mit DG, welche die Verlängerungen von AD und AG in C und B schneidet: so ist ΔABC das verlangte.

Bew. ΔABC enthält nach der Construction die Höhe AP = a. Bezeichnet man die von C auf AB gefällte Höhe durch ν, so hat man $\nu : AP = BC : AB = GD : AG = b : \frac{ab}{c} = c : a$. Hieraus folgt $\nu = c$, weil AP = a ist. Eben so beweist man, daß die dritte Höhe = b ist.

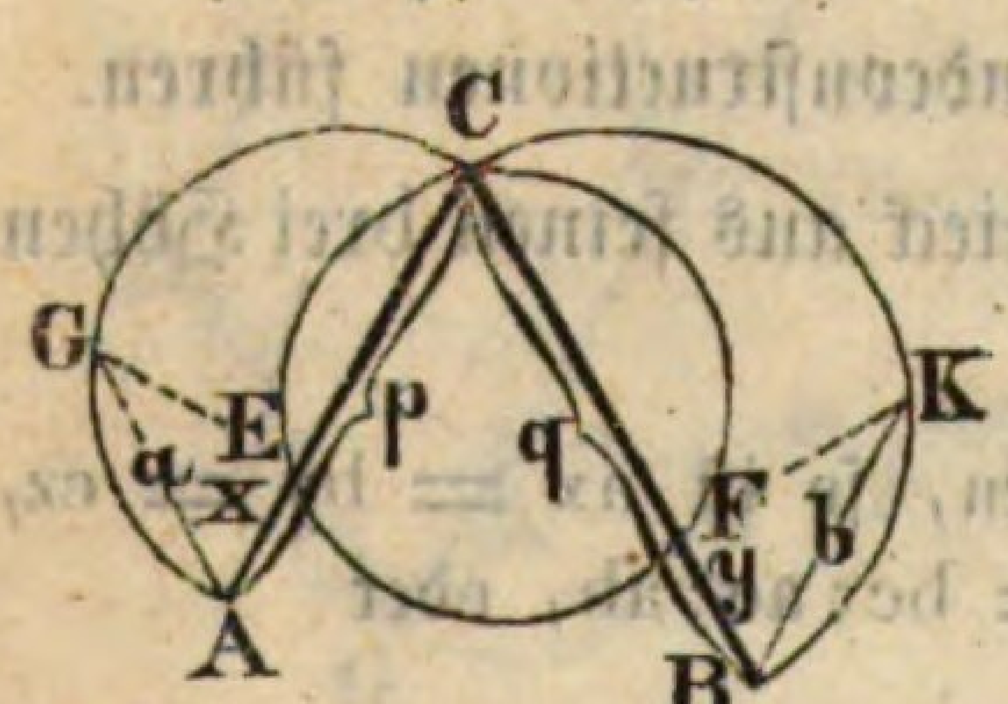
Aufgabe 2. (Gr.-Constr. I.) In der Seite AD des Rechtecks ABCD den Punkt Q so zu bestimmen, daß das Paralleltrapez ABCQ um einen Kreis liegt.

Aufl. Es sei BC = a, AB = b, AQ = x, so erhält man

$$x = \frac{ab}{2a - b}.$$

Aufgabe 3. (Gr.-Constr. II.) Es sind drei Punkte A, B, C gegeben; man soll durch C einen Kreis legen, so daß die von A und B an diesen Kreis gelegten Tangenten resp. die gegebenen Längen a und b erhalten.

Analys. Schneidet der gesuchte Kreis AC in E und BC in F, und ist



AE = x, AC = p, BF = y, BC = q, so hat man:

$$px = a^2 \text{ und } qy = b^2, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{a^2}{p} \text{ und } y = \frac{b^2}{q}.$$

Constr. Man schlage über AC und BC Halbkreise und trage, von A und B aus, a und b als Sehnen ein; es sei AG = a, BK = b. Fällt man nun GE $\perp$ AC und KF $\perp$ BC und legt durch C, E, F einen Kreis: so ist dieser der verlangte.

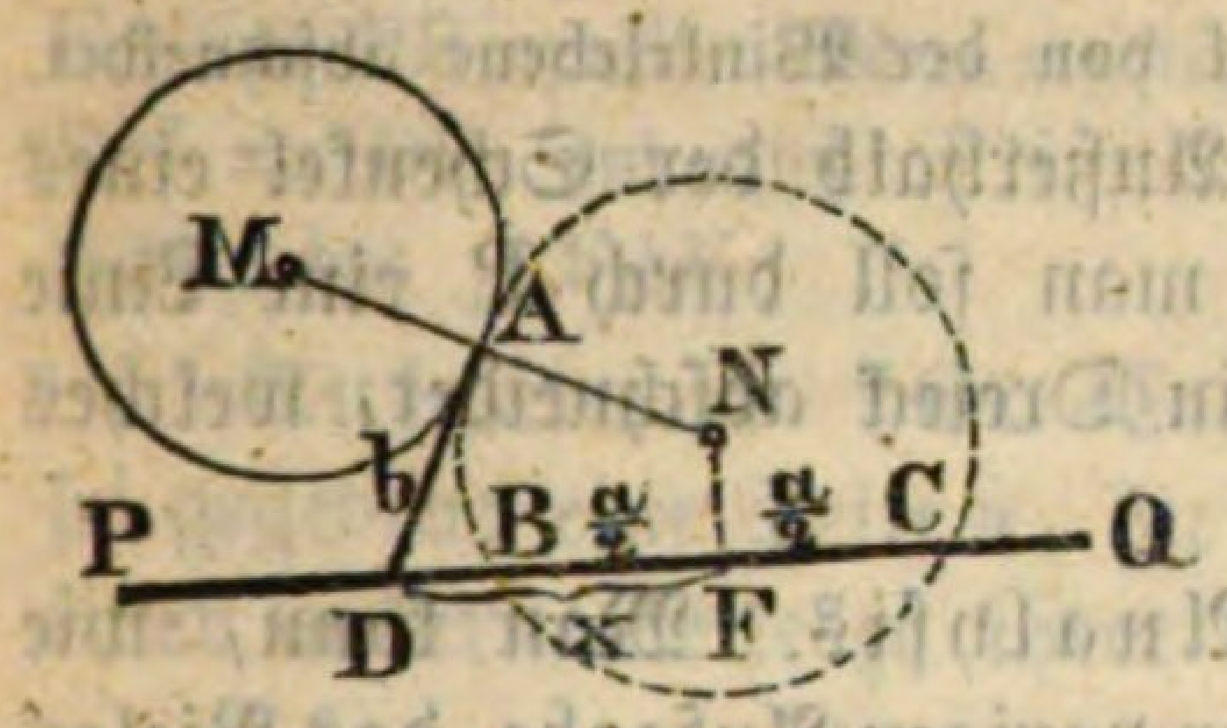
Anm. 1 Den Mittelpunkt M des Kreises findet man am bequemsten, wenn man GE und KF bis zu ihrem Durchschnittspunkte N verlängert. M ist der Mittelpunkt von CN.

Anm. 2. Wie construirt man, wenn $a > p$ oder $b > q$ ist?

Aufgabe 4. (Gr.-Constr. III.) Einen Kreis zu construiren,

welcher den gegebenen Kreis um M in A berührt und von der Linie PQ die Sehne a abschneidet.

Analys. Der Kreis um N sei der gesuchte, die Sehne BC = a. Man fälle NF ⊥ PQ und errichte AD ⊥ MN; D ist dann ein Datum, wie auch AD. Es sei AD = b, DF = x, so hat man:

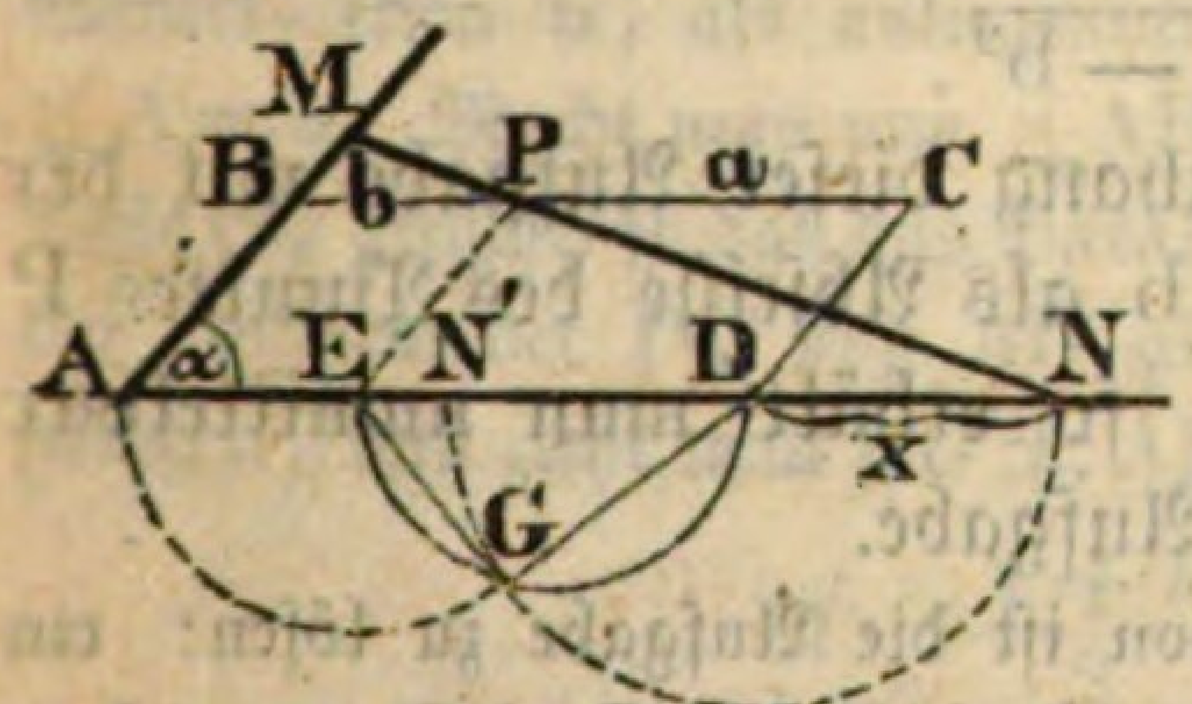


$$x - \frac{a}{2} : b = b : x + \frac{a}{2},$$

folglich $x = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$. — Die Construction von x ist sehr einfach: man verlängert MA über A um $\frac{a}{2}$ und verbindet den Endpunkt mit D. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen (±).

Aufgabe 5. (Gr.-Constr. IV.) Zwischen den Schenkeln eines Winkels α ist ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine die Schenkel schneidende Linie ziehen, welche von der Winkelebene ein Dreieck abschneidet, welches einem gegebenen Vieleck gleich ist.

Analys. Man kann das Vieleck in ein Parallelogramm verwandeln, welches den $\measuredangle\alpha$ und die von P auf den einen Schenkel AN des $\measuredangle\alpha$ gefällte Senkrechte h zur Höhe hat; dieses Parallelogramm läßt sich dann in die Ebene des Winkels α so eintragen, daß der gegebene $\measuredangle\alpha$ einer seiner Winkel wird, eine Seite aber durch P geht. Es sei ABCD dieses Parallelogramm, und NM sei die durch P gehende Linie, welche ein △NAM abschneidet, welches dem ▱ABCD gleich ist. Es sei DN = x; ferner PC = a und PB = b. Nun ist △MAN = ▱ABCD = (a + b)h, und zieht man PE ∦ MA, so folgt aus der Aehnlichkeit der △△MAN und PEN:



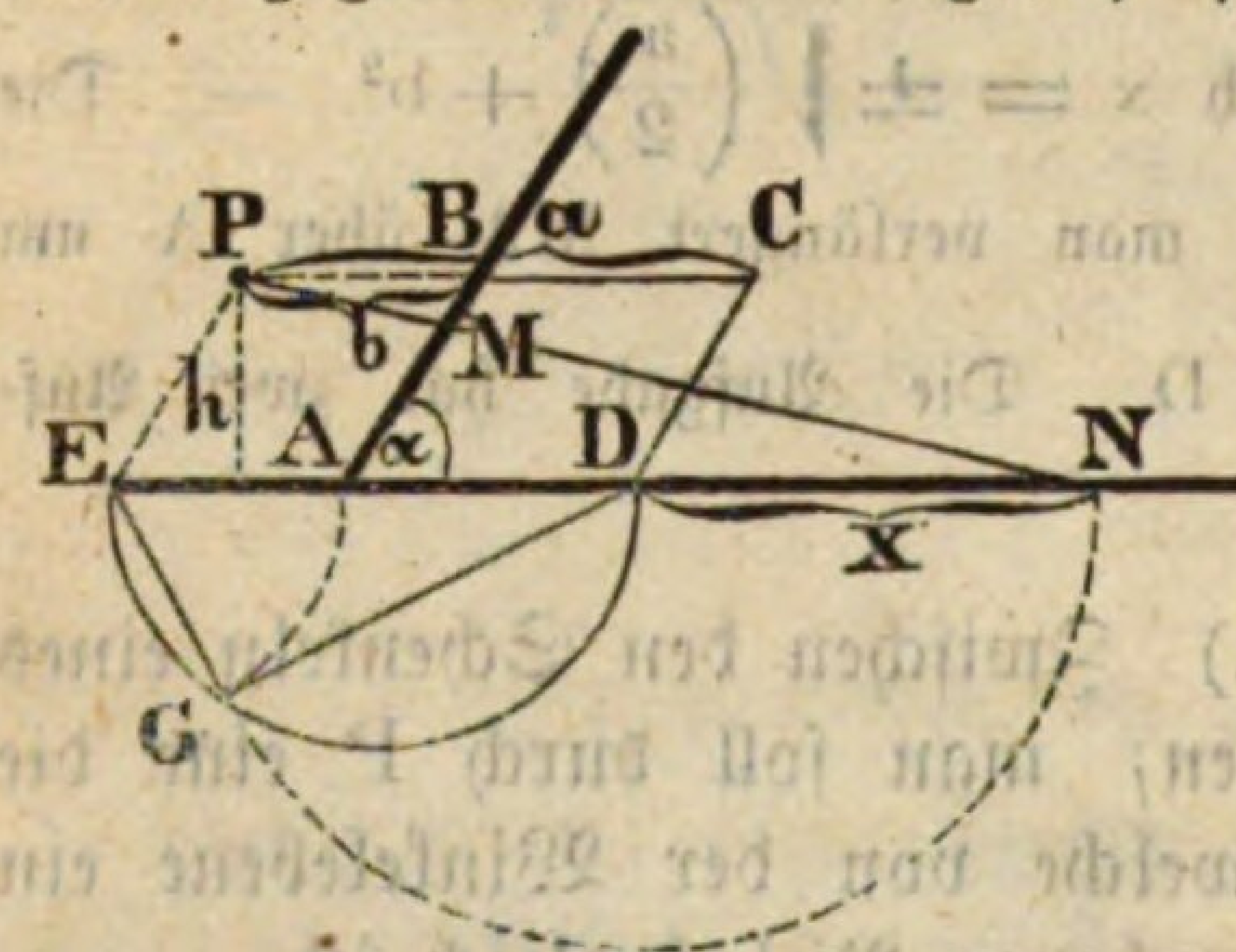
$$(a+b)\,h : \frac{a+x}{2}\,h = (a+b+x)^2 : (a+x)^2.$$

Hieraus folgt: $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$.

Constr. Man schlage über ED einen Halbkreis, trage EG = EA = b als Sehne ein, so ist DG = x. Schlägt man also um D mit DG einen Kreis, welcher AN in N schneidet, und zieht von N aus durch P die NM, so ist diese Linie die verlangte. — Es giebt zwei Constructionen (±), und der zweite Durchschnittspunkt N' des Kreises um D mit AN giebt, mit P verbunden, die andere der Aufgabe entsprechende Linie.

Determination. Es muß $a \geqq b$ sein. Für $a = b$ fällt N in D, und weil in diesem Falle $\#$ ABCD das kleinste von den Parallelogrammen ist, welche die Construction zulassen, so ist hierdurch die Aufgabe gelöst: durch P eine Linie zu legen, welche das kleinste Dreieck von der Winkelebene abschneidet.

Aufgabe 6. (Gr.-Constr. IV.) Außerhalb der Schenkel eines Winkels α ist ein Punkt P gegeben; man soll durch P eine Linie legen, welche von der Ebene des $\measuredangle\,\alpha$ ein Dreieck abschneidet, welches einem gegebenen Vieleck gleich ist.



Analysis. Man kann, wie bei der vorigen Aufgabe, das Vieleck in das $\#$ ABCD verwandeln, welches den Winkel α hat, und die Entfernung h des Punktes P von dem Schenkel AN des $\measuredangle\alpha$ zur Höhe; BC muß dann verlängert durch P gehen. Zieht man PE $\mathbin{\#}$ BA, bezeichnet PC durch a und PB durch b, nimmt an, PMN wäre die gesuchte Linie, also ΔAMN $= \#$ ABCD, und bezeichnet DN durch x: so folgt aus

$$(a-b)h : \frac{a+x}{2}h = (a-b+x)^2 : (a+x)^2$$

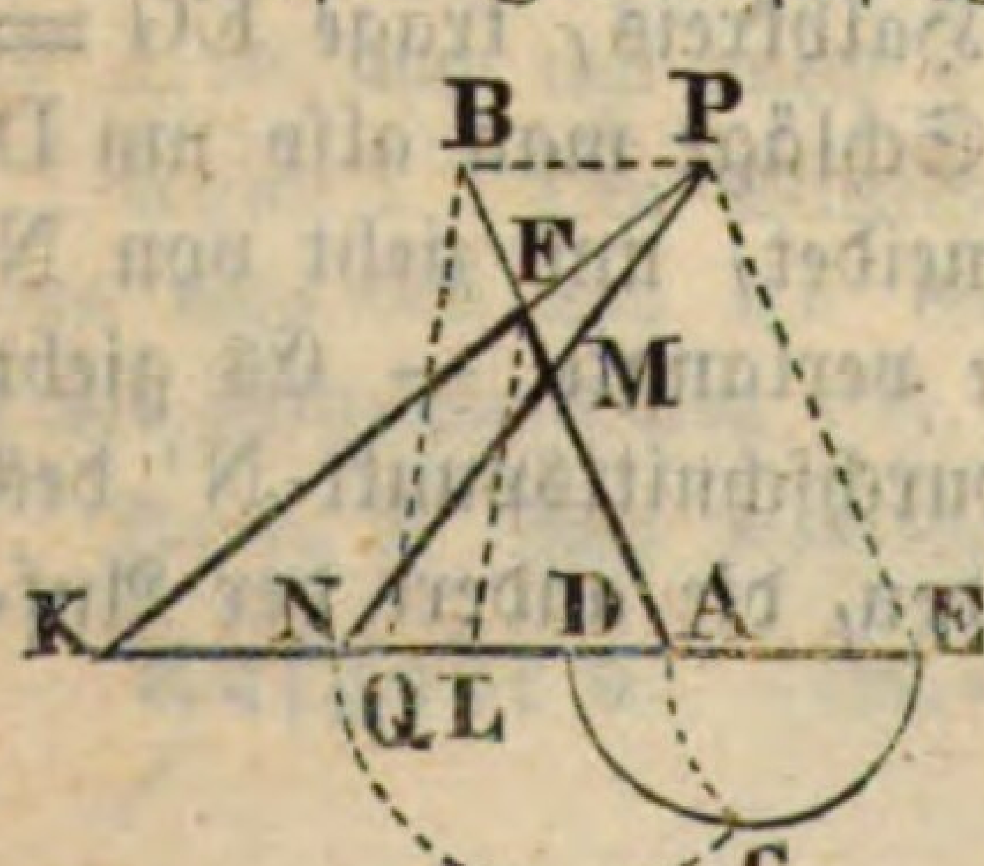
$$x = +\sqrt{a^2-b^2}.$$

Man erkennt leicht den Zusammenhang dieser Aufgabe mit der vorhergehenden. In letzterer kann man b als Abscisse des Punktes P betrachten, und nimmt man b negativ, so erhält man unmittelbar Ansatz und Auflösung der vorliegenden Aufgabe.

Anm. Durch die vorstehende Construction ist die Aufgabe zu lösen: ein Dreieck durch Linien, welche von einem Punkte außerhalb des Dreiecks ausgehen, in Theile nach gegebenem Verhältniß zu zerlegen. Für diese Aufgabe ist es bequem, statt des $\#$ ABCD ein Dreieck zu erzeugen, welches A und B zu Ecken hat, während die dritte Ecke in AN fällt; AD ist dann die Hälfte der in AN liegenden Seite. — Welche Bedeutung hat die Auflösung $x = -\sqrt{a^2-b^2}$?

Beisp. ΔFAK von einem Punkte P aus, der in der Verlängerung von KF liegt, zu halbiren.

Aufl. Zur Auflösung beantworte man zuerst die Fragen: von welchem Winkel soll ein Dreieck abgeschnitten werden? wie groß soll das Dreieck sein? Der Winkel ist hier $\measuredangle$ FAK; das Dreieck soll, wenn Q der Mittelpunkt von AK ist, dem ΔFAQ gleich sein. Jetzt hat man ΔFAQ so zu verwandeln, daß die zur Construction nöthige Linie a erzeugt wird. Man zieht PB $\mathbin{\#}$ AK, und giebt dem ΔFAQ zunächst die Seite AB. So entsteht (durch Parallelen) das



$\triangle$BAL, und halbirt man AL in D, so würde AD eine Seite, AB die andere des Parallelogramms sein, welches der Hälfte des $\triangle$FAK gleich ist und in der vorigen Figur ABCD heißt. Zieht man also noch PE $\nparallel$ BA, so ist ED = a und EA = PB = b. Man construirt nun $\sqrt{a^2 - b^2}$ (die Sehne DG), macht DN = DG und zieht PN. Diese Linie ist die verlangte, also $\triangle$ MAN die Hälfte des $\triangle$ FAK.

Aufgabe 7. (Gr.-Constr. V.) **Zur Construction eines Dreiecks sei gegeben: eine Seite a, die zugehörige Höhe h und das Verhältniß einer andern Seite zu ihrer Höhe, etwa wie 4 : 5.**

Analyſ. Bezeichnet man die Seite, deren Verhältniß zu ihrer Höhe gegeben ist, durch 4x, so ist die Höhe 5x; folglich $4x \cdot 5x = ah$, also $x = \sqrt{\frac{ah}{20}}$; daher ist die Seite $4x = \sqrt{a \cdot \frac{4}{5} h}$.

Die Construction sei dem Leser überlassen; sie führt zu zwei Dreiecken, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Determination. Aus $\sqrt{\frac{4}{5} ah} \geqq h$ folgt: $4a \geqq 5h$.

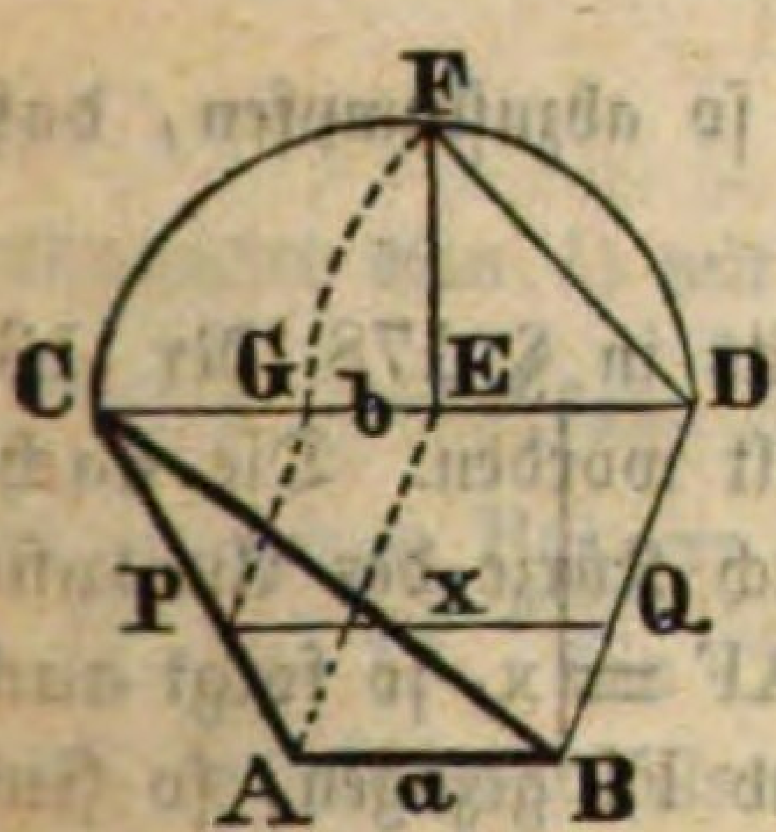
Aufgabe 8. (Gr.-Constr. V.) **Ein Dreieck in ein Paralleltrapez zu verwandeln, in welchem eine der parallelen Seiten a und die beiden anliegenden Winkel α und β gegeben sind.**

Analyſ. Man kann zunächst dem Dreieck die Seite a und einen der beiden Winkel, etwa α, als anliegenden Winkel geben. Dieses Dreieck sei ABC, und $\angle A = \alpha$. Macht man nun $\angle ABD = \beta$, so wird die Lage der mit AB parallelen Linie PQ gesucht, so daß das Paralleltrapez ABQP = $\triangle$ ABC wird. Es sei PQ = x, der Abstand der PQ von AB gleich y, die zu a gehörige Höhe des $\triangle$ ABC gleich h, und zieht man CD $\nparallel$ AB, so sei das Datum CD = b. Man hat jetzt:

$$1)\quad \frac{x + a}{2} \cdot y = \frac{ah}{2}.$$

$$2)\quad b - a : x - a = h : y.$$

Setzt man den Werth von y aus 2) in 1) ein, so entsteht: $x = \sqrt{ab}$.



Constr. Man mache DE = BA, schlage über CD einen Halbkreis und errichte EF $\perp$ CD: so ist DF = x. Macht man also DG = DF und zieht GP $\nparallel$ DB und PQ $\nparallel$ AB, so ist ABQP das verlangte Paralleltrapez.

Anm. Mittelst der vorstehenden Construction kann ein Viereck durch Linien, welche einer Seite parallel sind, in Theile nach gegebenem Verhältniß zerlegt werden.

§. 196.
Uebungsaufgaben.

Unter den nachfolgenden Aufgaben, deren Auflösungen im Allgemeinen nur angedeutet sind, kommen Theilungs- und Verwandlungs-

Aufgaben vor, deren Lösung auch auf dem in der geometrischen Analysis angegebenen Wege erfolgen kann. Die algebraische Analysis giebt aber die Auflösung dieser Aufgaben in der Regel bequemer und kürzer, namentlich wenn die Analysis auf ähnliche Figuren führt und die Construction durch den Halbkreis geschieht (vergl. §. 179.).

Aufg. 1. Ein Quadrat (zur Seite a) in ein gleichschenkliges Dreieck zu verwandeln, dessen Höhe der Grundlinie gleich ist.

Aufl. Ist x die Grundlinie, so folgt $x = a\sqrt{2}$. Es ist aber $a\sqrt{2}$ die Diagonale des Quadrats zur Seite a.

Aufg. 2. Einen Kreis (zum Radius r) durch einen concentrischen in zwei Theile nach gegebenem Verhältniß, etwa $4:5$, zu zerlegen.

Aufl. Soll der Ring der Verhältnißzahl 5 entsprechen, so ist der Radius des theilenden Kreises $= \frac{2}{3} r$.

Aufg. 3. Dieselbe Aufgabe für das Verhältniß $3:4$.

Aufl. $x^2\pi : r^2\pi = 3:7$; $x = r\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Aufg. 4. Ein Quadrat zu zeichnen, welches 3mal so groß ist, als ein gegebenes Quadrat.

Aufg. 5. Einen Kreis zu zeichnen, der so groß ist, als 3 gegebene Kreise zusammen.

Aufg. 6. Eine durch zwei concentrische Kreise gebildete Ringfläche in einen Kreis zu verwandeln.

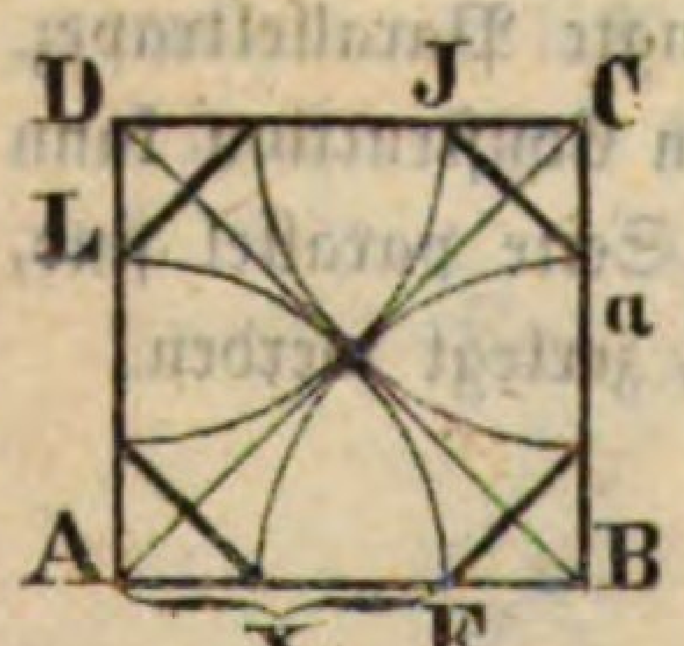
Aufl. Der Durchmesser des gesuchten Kreises ist die Sehne in dem größeren gegebenen Kreise, welche den kleineren Kreis berührt.

Aufg. 7. Eine durch zwei concentrische Kreise (mit den Radien r und ρ) gebildete Ringfläche durch einen concentrischen Kreis zu halbiren.

Aufl. Bezeichnet x den Radius des gesuchten Kreises, so ist

$$x = \sqrt{\frac{r^2 + \rho^2}{2}}.$$

Aufg. 8. Ein Quadrat ABCD in seinen vier Ecken so abzustumpfen, daß ein reguläres Achteck entsteht.



Aufl. Diese Aufgabe ist bereits in §. 178. Nr. 13. und in §. 183. (Seite 229) behandelt worden. Die nachfolgende Auflösung zeichnet sich durch Kürze der Analysis und der Construction aus. Es sei $AF = x$, so folgt auch $AL = x$. Denkt man sich FL und FI gezogen, so sind beide Linien als Sehnen gleicher Bogen einander gleich, woraus folgt: $2x^2 = a^2$; daher

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2}.$$

Es ist also x die halbe Diagonale des Quadrats. Ueber die Bedeutung des Werthes $x = -\sqrt{\frac{a^2}{2}}$ ist in §. 183. (Seite 229) das Nöthige angegeben.

Aufg. 9. Ein Vieleck durch ein ihm ähnliches nach gegebenem Verhältniß zu theilen, so daß beide Vielecke einen Winkel gemeinschaftlich haben.

Aufl. Es soll (erste Figur Seite 95) das Fünfeck ABCDE durch das ähnliche Abcde so getheilt werden, daß letzteres $\frac{3}{5}$ des ersteren wird. Bezeichnet man AB durch a und Ab durch x, so folgt aus der Aehnlichkeit der Figuren und aus der Bedingung der Aufgabe:

$$x^2 : a^2 = \tfrac{3}{5} : 1; \text{ folglich } x = \sqrt{\tfrac{3}{5}a \cdot a}.$$

Aufg. 10. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, in welchem die eine Kathete = a und die Hypotenuse um die Länge b kleiner ist, als die Summe der Katheten.

Aufl. Bezeichnet x die unbekannte Kathete, so findet man

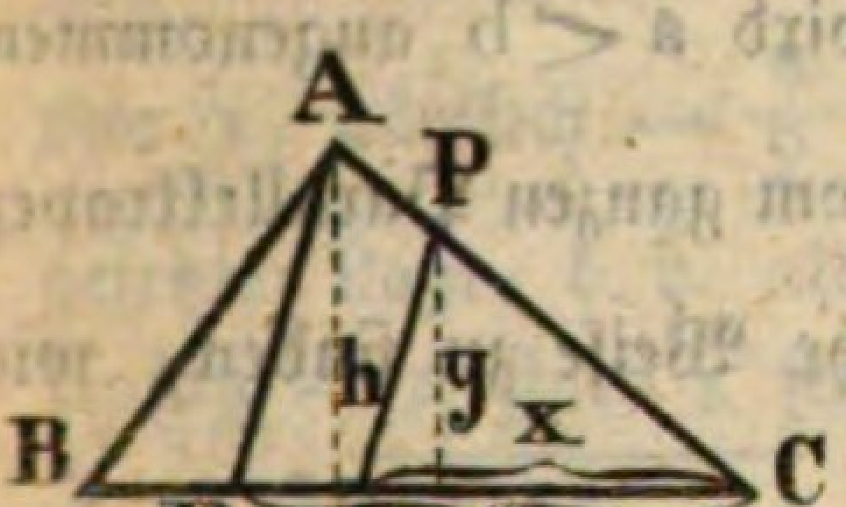
$$x = b + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a - b}.$$

Determ. $a > b$.

Aufg. 11. Ein Dreieck in ein gleichseitiges, oder in ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Man gebe dem Dreieck im ersten Falle einen Winkel von 60°, im zweiten von 45°, und bezeichne die Seiten, welche Schenkel dieser Winkel sind, durch a und b. Bezeichnet x im ersten Falle jede Seite des Dreiecks, im zweiten jede Kathete, so ist $x^2 = ab$, folglich $x = \sqrt{ab}$.

Aufg. 12. Von dem ΔABC soll durch eine mit AD parallele Linie ein bestimmter Theil, etwa $\frac{1}{3}$, abgeschnitten werden.



Analys. PQ sei die Theilungslinie, CQ = x, BC = a, DC = d; die von A und P auf BC gefällten Perpendikel mögen h und y heißen, so hat man: 1) $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ah$.

$$2)\ \frac{x}{y} = \frac{d}{h}.$$

Multiplicirt man 1) mit 2), so folgt $x = \sqrt{\frac{1}{3}a \cdot d}$.

Anm. PQ kann auch links von AD liegen, wenn nämlich $BD > \frac{a}{3}$ ist; dann setze man BQ = x und BD = d.

Aufg. 13. Ein Quadrat zur Seite a in einen Rhombus zu verwandeln, so daß die Summe seiner Diagonalen dem Umfange des Quadrats gleich wird.

Aufl. Die halben Diagonalen des Rhombus $= a \pm \sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

Aufg. 14. Ein Quadrat zu construiren, dessen Diagonale um die Länge a größer als jede Seite ist.

Aufg. 15. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, dessen Höhe um die Länge a kleiner als jede Seite ist.

Aufg. 16. Es ist ein Rechteck gegeben; man soll innerhalb desselben zwei mit den Seiten parallele Linien so ziehen, daß ihr Durchschnittspunkt in der einen Diagonale liegt und daß von den durch sie erzeugten beiden Rechtecken, durch welche diese Diagonale geht, das eine $\frac{1}{3}$ des andern wird.

Aufg. 17. Es ist eine Linie NM gegeben und auf verschiedenen Seiten derselben zwei Punkte A und B; man soll durch A und B den Kreis legen, welcher von NM die kleinste Sehne abschneidet.

Aufl. Bezeichnet 2y die Sehne, welche der verlangte Kreis von NM abschneidet, ist x der Abstand des Mittelpunkts dieser Sehne von ihrem Durchschnittspunkte mit AB, und zerlegt derselbe Punkt AB in die Abschnitte a und b: so ist $(y+x)(y-x) = ab$, folglich $y = \sqrt{ab + x^2}$.

Hieraus folgt, daß y am kleinsten für $x = 0$ ist; d. h. der Mittelpunkt der kleinsten Sehne liegt in AB, woraus sich die Construction des Kreises ergiebt.

Aufg. 18. Ein Quadrat zur Seite a soll in ein Paralleltrapez verwandelt werden, in welchem die eine der nicht parallelen Seiten die Länge b hat, auf den parallelen Seiten senkrecht steht und die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihnen ist.

Aufl. Man erhält die parallelen Seiten $= \frac{a^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 - b^2}$.

Aufg. 19. Ein Paralleltrapez soll durch eine mit den parallelen Seiten parallele Linie nach gegebenem Verhältniß getheilt werden.

Aufl. Sind a und b die parallelen Seiten, wird $a < b$ angenommen und soll der der Seite a anliegende Theil gleich $\frac{n}{m}$ vom ganzen Paralleltrapez sein: so ist die Länge x der Theilungslinie auf ähnliche Weise zu finden, wie in der Aufg. 8. des vorigen §. Man erhält:

$$x = \sqrt{b \cdot \left[\frac{a^2}{b} + \frac{n}{m}\left(b - \frac{a^2}{b}\right)\right]},$$

woraus sich eine recht bequeme Construction ergiebt, wenn man $\frac{a^2}{b}$ nach §. 193. II. Nr. 3. construirt. Ist in der Fig. zur Aufg. 8. im vorigen §. ABDC das Paralleltrapez, und trägt man $DE = a$ von D aus als Sehne in den Halbkreis über CD ein: so ist $\frac{a^2}{b}$ die Projection dieser Sehne auf DC, u. s. w.

§. 197.

Stetige Theilung.

Eine Größe stetig theilen heißt: sie so in zwei Theile zerlegen, daß der größere Theil mittlere geometrische Proportionale zwischen dem kleineren Theil und der ganzen Größe wird.

Aufgabe 1. (Der goldene Schnitt.) **Eine Linie AB stetig zu theilen.**

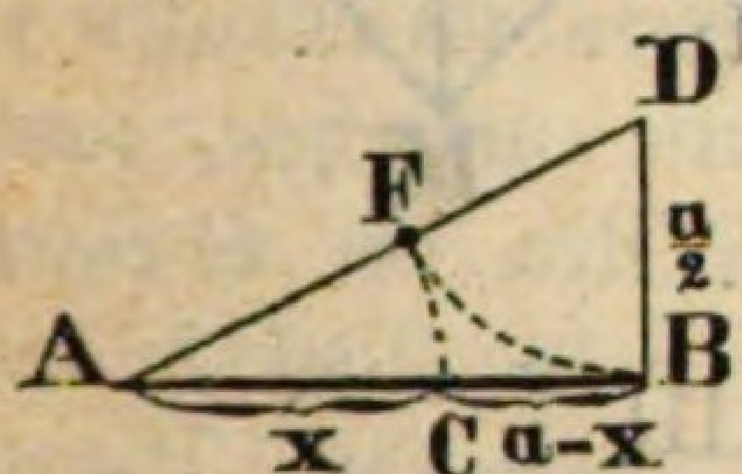
Aufl. Wird AB durch a, und der größere (stetige) Theil der stetig getheilten Linie a durch x bezeichnet, so ist der kleinere $a-x$, und es verhält sich:

$$a-x:x=x:a.$$

Hieraus folgt $x^2+ax-a^2=0$, folglich

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}.$$

Constr. Man construire das rechtwinklige Dreieck ABD aus



den Katheten AB = a, BD = $\frac{a}{2}$, mache DF = DB und AC = AF: so ist AB in C stetig getheilt.

Synthet. Bew. Man denke sich den vollen Kreis um D und verlängere AD über D bis zur Peripherie; so ist die ganze von A durch den Kreis gehende Secante = AF + a, weil a der Durchmesser des Kreises ist. AB ist Tangente dieses Kreises; folglich verhält sich:

$$AF:AB=AB:AF+a,\ \text{also auch}$$
$$AB-AF:AF=AF+a-AB:AB,\ \text{oder}$$
$$BC:AC=AC:AB.$$

Anm. 1. Zur Beurtheilung der Bedeutung des zweiten, negativen Werthes von x, nämlich $-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$, muß man in die Figur x in entgegengesetzter Lage, d. h. als Verlängerung von BA, einzeichnen, zugleich aber in den Ansatz $-x$ statt x setzen. Für diese Lage entspricht also der absolute Werth $\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$ dem Ansatze $a+x:x=x:a$; d. h. verlängert man a über A um $\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$, etwa bis N, so ist die ganze entstandene Linie BN in A stetig getheilt.

Anm. 2. Theilt man eine Seite eines Dreiecks stetig und legt durch den Theilpunkt eine Parallele zu einer zweiten Seite, so wird durch sie die dritte Seite stetig getheilt.

Aufgabe 2. In der Seite BC des Quadrats ABCD den Punkt P so zu bestimmen, daß AP das Quadrat stetig theilt.

Aufl. Ist AB = a, BP = x, so folgt $x=3a-\sqrt{(2a)^2+a^2}$.

Aufgabe 3. ΔABC durch eine mit BC parallele Linie stetig zu theilen, so daß das Paralleltrapez der kleinere Theil wird.

Aufl. Es sei AB = a, und die mit AB homologe Seite im kleinen, durch die Theilung entstandenen Dreieck = x, so ist

$$x = \sqrt{a\left[-\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]}.$$

Aufgabe 4. Einen Kreis (zum Radius r) durch einen concentrischen stetig zu theilen.

Aufl. x sei der Radius des theilenden Kreises, so ist:

1) wenn der Ring der stetige Theil sein soll:

$$x = -\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+r^2};$$

2) wenn der kleinere Kreis der stetige Theil sein soll:

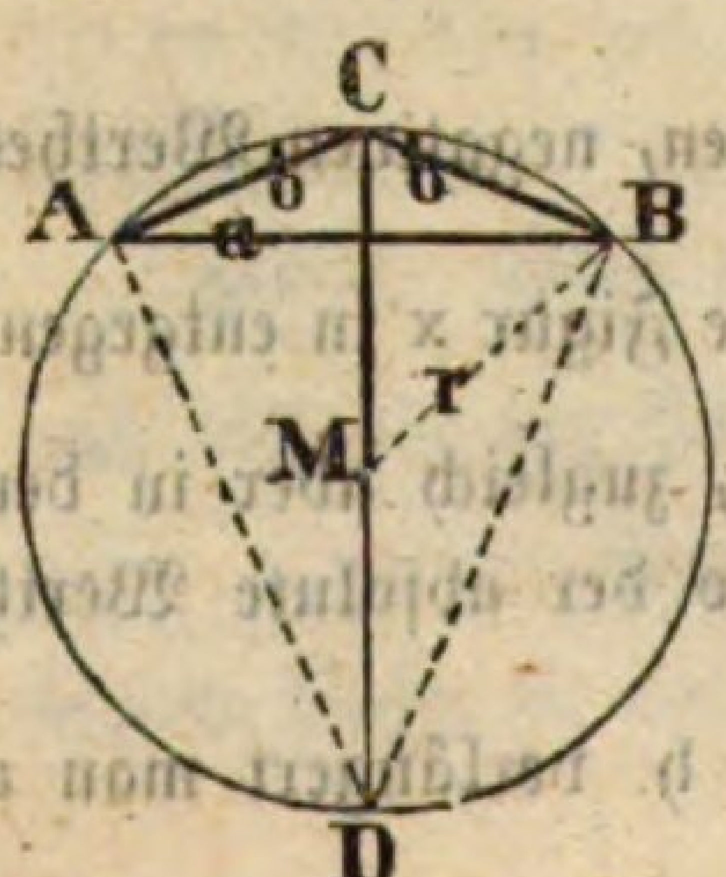
$$x = \sqrt{r\left[-\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+r^2}\right]}.$$

Berechnungen und Constructionen am Kreise.

§. 198.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Im Kreise zum Radius r kennt man eine Sehne a; man soll die Sehne b berechnen, deren Bogen die Hälfte des zu a gehörigen Bogens ist. — Die Auflösung giebt den Werth der Seite (b) des regulären 2n-Ecks aus der Seite (a) des regulären n-Ecks im Kreise. —



Aufl. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ist

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2.$$

Hieraus folgt:

$$\text{I.} \qquad b = \sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

Anm. Auch AD ist Sehne des halben zu a gehörigen Bogens (ADB); man findet $AD = \sqrt{2r^2+r\sqrt{4r^2-a^2}}$.

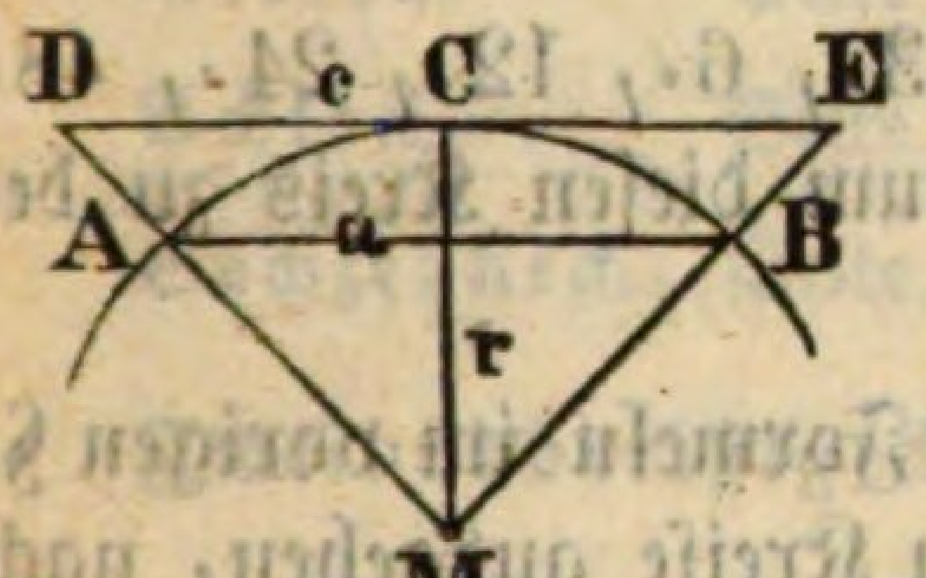
Aufgabe 2. In der Figur zur Aufgabe 1. ist b gegeben, man soll a finden. — Aus der Seite (b) des regulären 2n-Ecks im Kreise die Seite (a) des regulären n-Ecks zu finden.

Aufl. Man kann a aus Formel I. entwickeln; bequemer aber ist es, auf das Viereck ACBD den Ptolemäischen Lehrsatz anzuwenden:

$$2r \cdot a = 2 \cdot b \cdot \sqrt{4r^2 - b^2}; \text{ hieraus}$$

$$\text{II.} \quad a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}.$$

Aufgabe 3. Im Kreise zum Radius r ist eine Sehne a gegeben; man soll das Stück c der mit a parallelen Tangente finden, welches zwischen den verlängerten, zu den Endpunkten von a gehörigen Radien liegt. — Aus der Seite (a) des regulären n-Ecks im Kreise die Seite (c) des regulären n-Ecks um diesen Kreis zu finden. —

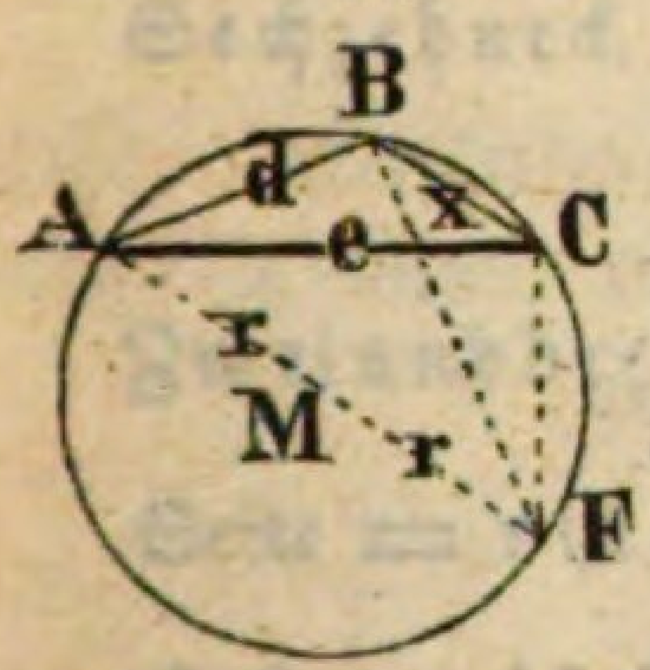


Aufl. Aus der Aehnlichkeit der $\Delta\Delta$ MAB und MDE folgt:

$$a : c = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} : r; \text{ hieraus ist}$$

$$\text{III.} \quad c = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Aufgabe 4. Im Kreise zum Radius r kennt man zwei von einem Punkt A, auf derselben Seite des Durchmessers AF gezogenen Sehnen $AB = d$, $AC = e$; man soll die Sehne x berechnen, welche ihre Endpunkte B und C verbindet. ($e > d$).



Aufl. Wendet man den Ptolemäischen Lehrsatz auf das Viereck ABCF an, so ist

$$2r \cdot x + d \cdot \sqrt{4r^2 - e^2} = e \cdot \sqrt{4r^2 - d^2}, \text{ folglich}$$

$$\text{IV.} \quad x = \frac{e \cdot \sqrt{4r^2 - d^2} - d \cdot \sqrt{4r^2 - e^2}}{2r}.$$

Aufgabe 5. Im Kreise zum Radius r kennt man die Seite a des eingeschriebenen regulären n-Ecks; man soll den Inhalt F desselben berechnen. (Vergl. die Bemerkung in §. 152. Nr. 7.)

Aufl. Verbindet man alle Ecken mit dem Mittelpunkt des Kreises, so entstehen n congruente Dreieck. In jedem ist die zu a gehörige Höhe $= \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; hieraus folgt:

$$\text{V.} \quad F = n \cdot \frac{a}{4}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Aufgabe 6. Bei einem Kreise zum Radius r kennt man die Seite c des umschriebenen regulären n-Ecks; man soll den Inhalt W desselben berechnen.

Aufl. Die Verbindungslinien des Mittelpunktes mit allen Ecken erzeugen n congruente Dreiecke. In jedem gehört zur Seite c die Höhe r; folglich ist

$$\text{IV.} \quad W = n \cdot \frac{cr}{2}.$$

§. 199.

Aufgabe.

Die Seite und den Inhalt des regulären 3-, 6-, 12-, 24-, 48-Ecks u. s. w. im Kreise zum Radius r und um diesen Kreis zu berechnen.

Aufl. Zur Berechnung wendet man die Formeln im vorigen §. an. Man kann von der Sechsecks-Seite r im Kreise ausgehen, nach II. die Dreiecks-Seite finden, dann nach I. die Seiten der übrigen Vielecke im Kreise; nach III. findet man die Seiten der Vielecke um den Kreis. Die Inhalte werden nach V. und VI. berechnet. Uebrigens ist die Dreiecks-Seite im Kreise ($r\sqrt{3}$) schon früher gefunden worden.

Reguläre Vielecke im Kreise.

Dreieck. Seite $= r\sqrt{3}$; Inhalt $= \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.

Sechseck. Seite $= r$; Inhalt $= \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$.

Zwölfeck. Seite $= r.\sqrt{2-\sqrt{3}}$; Inhalt $= 3r^2$.

Vierundzwanzigeck. Seite $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

Inhalt $= 6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Achtundvierzigeck. Seite $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;

Inhalt $= 12r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

u. s. w.

Reguläre Vielecke um den Kreis.

Dreieck. Seite $= 2r\sqrt{3}$; Inh. $= 3r^2\sqrt{3}$.

Sechseck. Seite $= \frac{2}{3}r\sqrt{3}$; Inh. $= 2r^2\sqrt{3}$.

Zwölfeck. Seite $= 2r(2-\sqrt{3})$; Inh. $= 12r^2(2-\sqrt{3})$.

Vierundzwanzigeck. Seite $= 2r(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

Inh. $= 24r^2(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Achtundvierzigeck.

Seite $= 2r(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}).\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

Inh. $= 48r^2(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}).\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{3}}$

u. s. w.

§. 200.

Aufgabe.

Die Seite und den Inhalt des regulären 4-, 8-, 16-, 32-Ecks u. s. w. im Kreise zum Radius r und um diesen Kreis zu berechnen.

Aufl. Man geht von der Seite des Quadrats im Kreise aus.

Reguläre Vielecke im Kreise.

Viereck. Seite $= r\sqrt{2}$; Inh. $= 2r^2$.

Achteck. Seite $= r\sqrt{2-\sqrt{2}}$; Inh. $= 2r^2\sqrt{2}$.

Sechzehneck. Seite $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; Inh. $= 4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Zweiunddreißigeck. Seite $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$;

Inh. $= 8r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Reguläre Vielecke um den Kreis.

Viereck. Seite $= 2r$; Inh. $= 4r^2$.

Achteck. Seite $= 2r(-1+\sqrt{2})$; Inh. $= 8r^2(-1+\sqrt{2})$.

Sechzehneck. Seite $= r\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2}$;

Inh. $= 8r^2\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2}$.

Zweiunddreißigeck.

Seite $= r\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right).\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2}$;

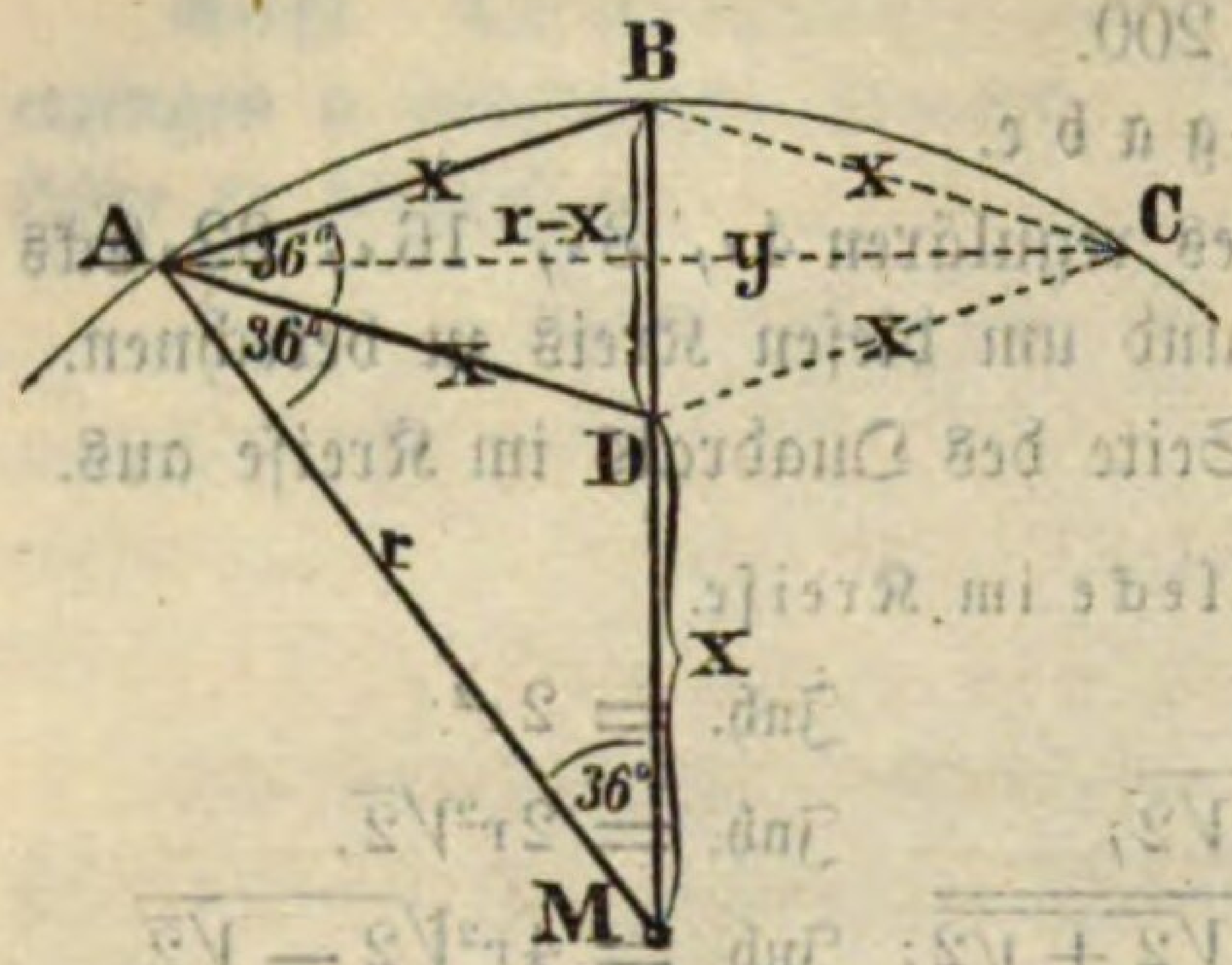
Inh. $= 16r^2\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right).\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2}$.

Anmerkung. Ist n eine gerade Zahl, so berechnet man den Inhalt F eines regulären n-Ecks im Kreise am bequemsten aus der Seite a des regulären Vielecks, welches halb so viel Seiten hat; es ist $F = \frac{1}{4}nar$. — Es ist schon früher angegeben worden, daß man von den Umfängen der eingeschriebenen und umschriebenen regulären Vielecke (indem man ihre Seitenzahl immer verdoppelt) zur Kreisperipherie, von ihren Inhalten zum Kreise, in beiden Fällen aber zur Zahl π gelangen kann.

§. 201.

Das reguläre Zehneck und Fünfeck.

1) Berechnung der Seite des regulären Zehnecks im Kreise zum Radius r. Ist AB diese Seite, und man zieht die Radien MA und MB: so ist im $\triangle$MAB der $\angle$M $= 36°$, folglich jeder der beiden andern Winkel $= 72°$. Halbirt man nun $\angle$MAB durch AD, so zerlegt AD das Dreieck MAB in zwei gleichschenklige Dreiecke ABD und DAM, von denen das erste dem $\triangle$MAB ähnlich ist aus Gleichheit der Winkel. Bezeichnet man also AB durch x, so



ist auch $AD = x$ und $DM = x$; folglich $BD = r - x$.

Aus $\Delta\, ABD \sim \Delta\, MAB$ folgt aber:

$r - x : x = x : r$ oder

$x^2 + rx - r^2 = 0$, also

$$x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2};$$

hieraus:

I. Seite des regulären Zehnecks im Kreise

$$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot r.$$

2) Berechnung der Seite des regulären Fünfecks im Kreise zum Radius r. Wir können diese Seite nach Formel II. in §. 198. berechnen; es ergiebt sich aber, wenn y diese Seite bezeichnet, zwischen y, x und r eine einfachere Gleichung auf folgende Weise:

Ist $BC = BA = x$, so ist $AC = y$ die Fünfeckseite. Verbindet man C mit D, so ist ABCD ein Rhombus zur Seite x; seine Diagonalen sind y und $r - x$; folglich ist bekanntlich:

$$(1.)\quad 4x^2 = y^2 + (r - x)^2.$$

Ferner ist $\frac{r-x}{2}$ die Projection von AB auf den durch B gehenden Durchmesser $2r$; daher $2r \cdot \frac{r-x}{2} = x^2$, oder:

$$(2.)\quad 2r(r - x) = 2x^2.$$

Addirt man die Gleichungen (1.) und (2.), so folgt:

$$(3.)\quad x^2 + r^2 = y^2,$$

d. h. es ist das Quadrat der Fünfecks-Seite gleich der Summe der Quadrate der Zehnecks- und Sechsecks-Seite. Construirt man also mit diesen drei Seiten ein Dreieck (so daß sie dessen Seiten werden), so ist dieses Dreieck rechtwinklig, und die Fünfecks-Seite ist die Hypotenuse. Aus 3) folgt nun unmittelbar

$$y^2 = r^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot r\right)^2; \text{ daher:}$$

II. Seite des regulären Fünfecks im Kreise

$$= r \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

3) Die Seite des regulären Zehnecks und Fünfecks um den Kreis findet man nach Formel III. in §. 198.

III. Seite des regulären Zehnecks um den Kreis

$$= 2r \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}.$$

IV. Seite des regulären Fünfecks um den Kreis

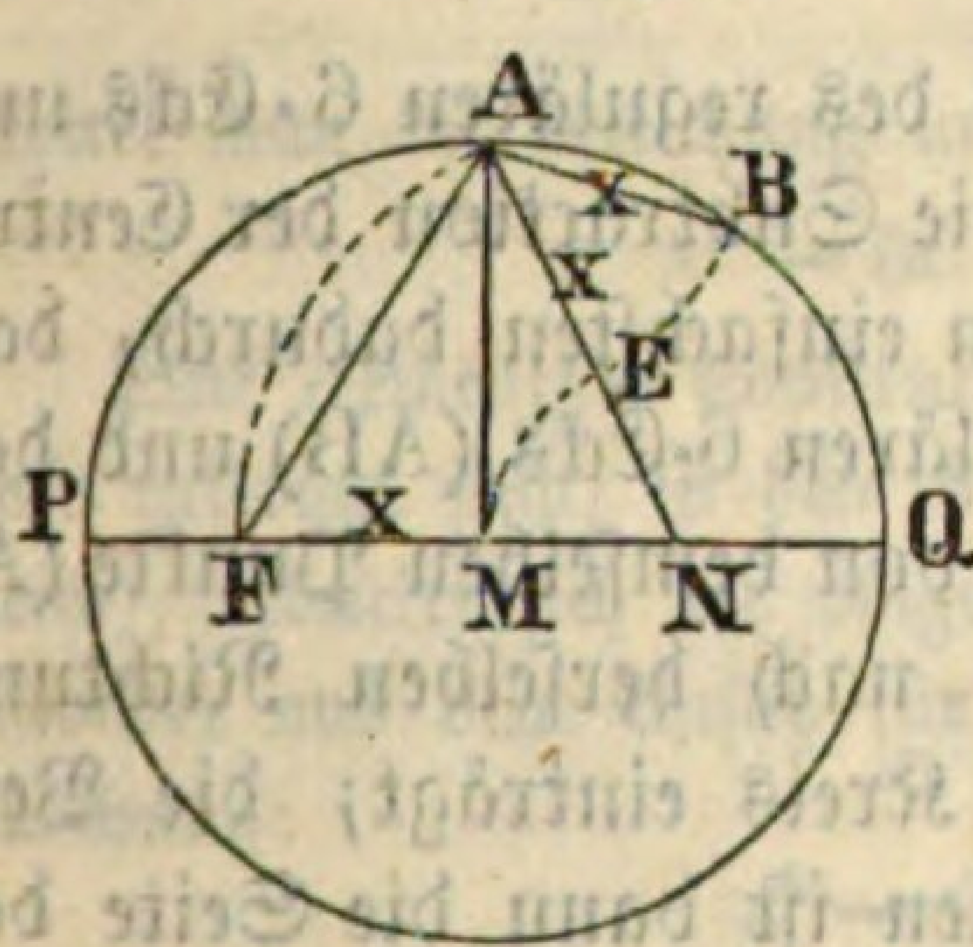
$$= 2r \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

4) Construction der Zehnecks- und Fünfecks-Seite.

Aus dem Ansatze in Nr. 1. ergiebt sich, daß D den Radius MB stetig theilt, d. h. die Seite des Zehnecks ist der größere Theil des stetig getheilten Radius. Hieraus, oder unmittelbar aus dem gefundenen Werthe:

$$x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}$$

ergiebt sich die Construction. Man errichte den Radius MA senkrecht auf den Durchmesser PQ, halbire MQ in N, ziehe NA, mache NE $= NM = \frac{r}{2}$; so ist AE = x. Durch den Bogen EB trägt man x als Sehne (AB) in den Kreis ein.



Schlägt man um N mit NA einen Kreis, welcher MP in F schneidet, so ist MF auch gleich x, und das rechtwinklige Δ AMF enthält die Zehnecks-Seite MF und die Sechsecks-Seite MA; folglich ist nach Nr. 2. AF die Fünfecks-Seite.

5) Aus der Construction des regulären Fünfecks und Zehnecks im Kreise ergeben sich unmittelbar diese Polygone um den Kreis; dann aber auch durch fortgesetztes Halbiren der Bogen das reguläre 20-Eck, 40-Eck, u. s. w.

§. 202.

Lehrsatz.

Kann man (in einen Kreis) das reguläre n-Eck und auch das reguläre m-Eck construiren, und ist nm durch m — n theilbar (m>n vorausgesetzt): so kann man auch immer das reguläre $\frac{nm}{m-n}$-Eck construiren.

Bew. Es sei $\frac{360^\circ}{n} = \alpha$ und $\frac{360^\circ}{m} = \beta$, so folgt

$$\alpha - \beta = \frac{360^\circ}{n} - \frac{360^\circ}{m} = \frac{360^\circ.(m-n)}{nm} = 360^\circ : \frac{nm}{m-n}.$$

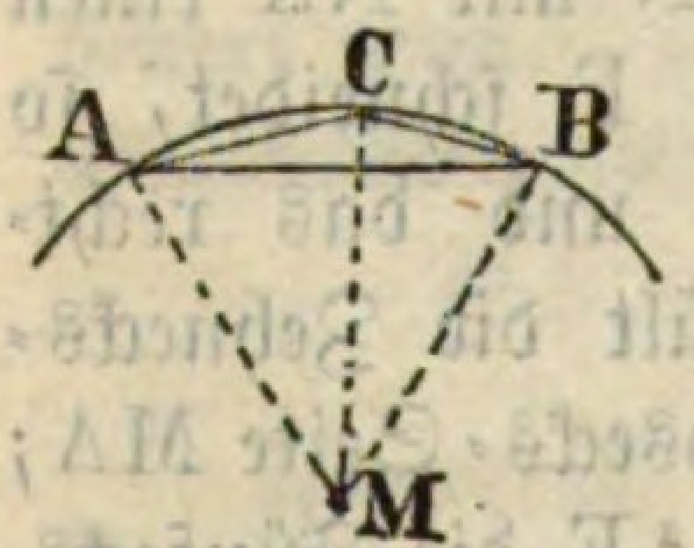
Ist nun $\frac{nm}{m-n}$ eine ganze Zahl, so ist $360^\circ : \frac{nm}{m-n}$ ein aliquoter Theil von 360°, folglich der Centriwinkel des regulären $\frac{nm}{m-n}$-Ecks. Dieser Centriwinkel ist aber gleich $\alpha - \beta$, also construirbar, weil nach der Voraussetzung α und β bekannt sind.

Ist z. B. $n = 30$, $m = 34$, so ist $\frac{nm}{m-n} = 255$; kann man also das reguläre 30-Eck und das reguläre 34-Eck construiren, so erhält man durch Subtraction der zugehörigen Centriwinkel den Centriwinkel des regulären 255-Ecks, also auch dieses Polygon selbst. — Aus ihm würde sich dann noch das reguläre 51-Eck, 85-Eck, 510-Eck, u. s. w. ergeben. (Vergl. §. 154.)

§. 203.

Das reguläre 15-Eck, 30-Eck, 60-Eck u. s. w.

Der vorstehende Lehrsatz zeigt den Weg, auf welchem man zu neuen regulären Polygonen aus bekannten gelangen kann. Ist $n = 6$ und $m = 10$, so ist $\frac{nm}{m-n} = \frac{60}{4} = 15$; folglich läßt sich die Seite des regulären 15-Ecks aus den Seiten des regulären 6-Ecks und 10-Ecks construiren. Die Subtraction der Centriwinkel vollzieht man am einfachsten dadurch, daß man die Seiten des regulären 6-Ecks (AB) und des regulären 10-Ecks (AC) von demselben Punkte (A) der Peripherie aus und nach derselben Richtung hin als Sehnen in den Kreis einträgt; die Verbindungslinie (CB) der Endpunkte der Sehnen ist dann die Seite des regulären 15-Ecks; denn ihr Centriwinkel ist unmittelbar die Differenz der Centriwinkel jener Sehnen: $\sphericalangle CMB = \sphericalangle AMB - \sphericalangle AMC = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ = \frac{360^\circ}{15}$. — Durch Halbiren der Bogen kann man nun zum 30-Eck, 60-Eck u. s. w. übergehen.



Die Berechnung der Seite x des regulären 15-Ecks geschieht nach der Formel IV. in §. 198.; man erhält

$$x = \frac{r}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

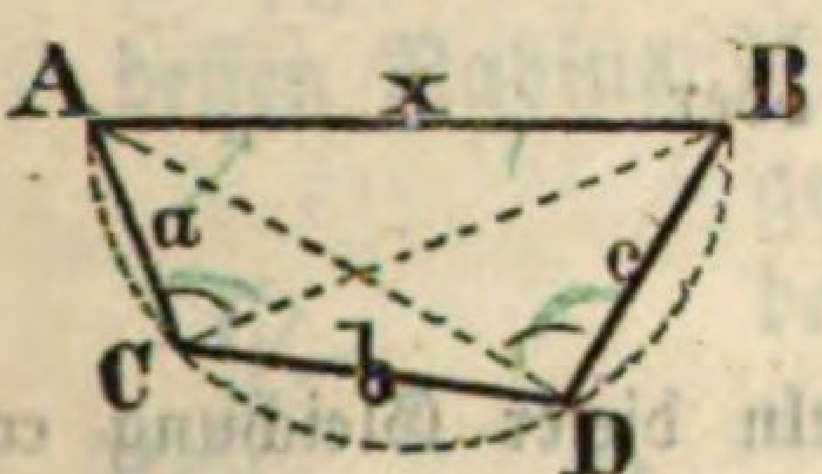
Die Seite des regulären 30-Ecks kann man entweder hieraus, oder aus dem regulären Fünfeck und Sechseck berechnen; weil $\frac{5.6}{6-5} = 30$, also CB die 30-Ecks-Seite ist, wenn AB und AC resp. die Seiten des Fünfecks und Sechsecks sind.

§. 204.
Vermischte Aufgaben.

Unter den folgenden Aufgaben befinden sich diophantische und auch solche, welche auf höhere Gleichungen führen.

Aufgabe 1. Ein Viereck ist durch drei Seiten a, b, c und die Bedingung gegeben, daß die Diagonalen an den Endpunkten der mittleren Seite b resp. mit a und c rechte Winkel bilden sollen; man soll die vierte Seite bestimmen. — Diese Aufgabe findet in der Befestigungskunst Anwendung, wenn b die Courtine und a und c die Flanken einer bastionirten Front sind, und die Entfernung AB der Schulterpunkte von einander gefunden werden soll.

Aufl. ACDB sei das Viereck, und die unbekannte Seite AB $= x$. Nach



den gegebenen Bedingungen muß das Viereck in einem Kreise liegen, dessen Durchmesser x ist. Nach dem Ptolemäischen und dem Pythagoreischen Lehrsatz erhält man:

$$bx + ac = \sqrt{x^2 - a^2} . \sqrt{x^2 - c^2}.$$

Ordnet man die Gleichung und hebt durch x, so folgt:

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\,x - 2abc = 0.$$

Eine elementare Construction existirt nicht, da die Wurzeln dieser Gleichung nicht rational sind; in dem besondern Falle aber, wenn $a = c$ ist (die Flanken gleich), reducirt sich die obige Gleichung auf eine quadratische. Man erhält sie entweder aus dem Ansatz für diesen besondern Fall, oder aus der vorstehenden Gleichung:

$$x^3 - (2a^2 + b^2)\,x - 2a^2b = 0$$
$$x\,(x^2 - b^2) - 2a^2\,(x + b) = 0$$
$$(x + b)\,(x^2 - bx - 2a^2) = 0.$$

Da $x = -b$ für die Aufgabe keinen Sinn hat, so muß $x^2 - bx - 2a^2 = 0$ sein, oder

$$x\,(x - b) = 2a\,.\,a.$$

Ohne zu entwickeln, kann man hieraus eine recht bequeme Construction herleiten, die aber voraussetzt, daß $b > a$ ist (die Courtine größer als die Flanke); in dem angegebenen practischen Falle findet dies immer Statt.

Man zeichne einen Kreis, der b zum Durchmesser hat, trage in denselben



an beliebiger Stelle EF $= a$ als Sehne ein, verlängere EF über F um sich selbst bis B, ziehe von B durch den Mittelpunkt des Kreises eine Secante BA, so ist BA $= x$ [denn es ist $BA.(BA - b) = 2a.a$]. Schlägt man nun über BA einen Halbkreis und trägt von B und A aus a als Sehne in denselben ein ($BD = AC = a$), so ist ABDC das verlangte Viereck.

Für den allgemeineren Fall folgendes Beispiel: Es sind die Flanken gegeben: $a = 10°$ und $b = 8°$, und die Courtine $b = 20°$; wie groß ist die Entfernung x der Schulterpunkte von einander?

Aufl. Man erhält $x^3 - 564x - 3200 = 0$.

Hieraus ergiebt sich nach der Cardanischen und der Moivre'schen Formel

$$x = 2\sqrt{188} . \cos 17° \ 12' \ 39'' = 26{,}1947 \text{ Ruthen.}$$

Aufgabe 2. Im Kreise zum Radius r ist eine Sehne a gegeben; man soll die Sehne x finden, deren Bogen der dritte Theil des zu a gehörigen Bogens ist.

Aufl. Die Diagonalen des Vierecks im Kreise, welches a und die drei gleichen Sehnen (x) zu Seiten hat, sind nach §. 198. II. zu finden; jede ist $= \frac{x}{r}\sqrt{4r^2 - x^2}$. Nach dem Ptolemäischen Lehrsatz ist daher

$$ax + x^2 = \left(\frac{x}{r}\sqrt{4r^2 - x^2}\right)^2, \text{ oder}$$

$$x^3 - 3r^2x + ar^2 = 0.$$

Nur für einzelne Werthe von a sind die Wurzeln dieser Gleichung construirbar, z. B. wenn $a = 2r$ ist; dann sind die Wurzeln gleich $-2r$, r und r, von denen hier nur r (die Sechsecks-Seite) paßt. Alle anderen Werthe von a führen (weil $a < 2r$) zum irreductiblen Fall der Cardanischen Formel. Hiermit im engen Zusammenhange steht der Mangel einer allgemeinen elementaren Construction zur Theilung eines Winkels in drei gleiche Theile.

Aufgabe 3. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist 15 □' und die Hypotenuse ist um 1 Fuß größer als die eine Kathete; wie groß sind die Seiten?

Antw. 4'; 7,5' und 8,5'.

Aufgabe 4. Der Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks sei 240 □', der Umfang 72'; wie groß sind die Seiten?

Antw. Entweder ist die Grundlinie = 20' und jeder Schenkel = 26', oder die Grundlinie = 27,5959' und jeder Schenkel = 22,2020'.

Aufgabe 5. Ein Dreieck ABC durch eine die Seiten BC und AC schneidende Linie in zwei Theile von gleichem Inhalt und Umfang zu zerlegen.

Aufl. Bezeichnet man die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c und die Theile der Seiten a und b vom Durchschnittspunkt mit der gesuchten Linie bis zur Ecke C durch x und y, so ist, wenn noch $\frac{a+b+c}{2}$ durch s bezeichnet wird,

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}ab}.$$

Es ist hierbei gleichviel, ob x in a und y in b liegt, oder umgekehrt. — (Determination?)

Beisp. 1. Die Seiten sind 32'; 25' und 23', und die ersten beiden Seiten sollen geschnitten werden. — Man erhält $x = y = 20'$.

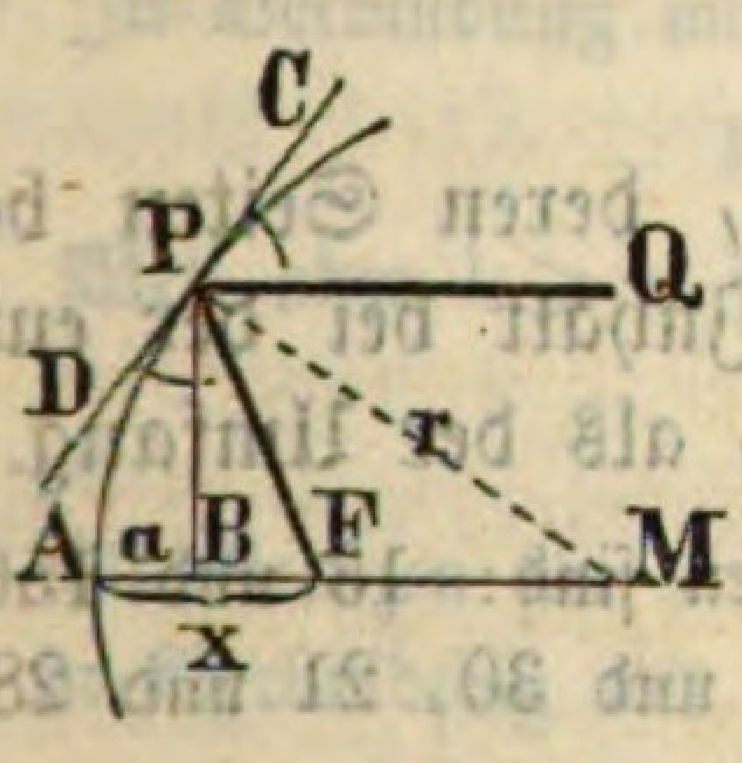
Beisp. 2. Die Seiten sind 10'; 10' und 8', und die beiden ersten Seiten sollen geschnitten werden. — Die Aufgabe gestattet keine Auflösung.

Beisp. 3. Die Seiten sind 10'; 10' und 9', und die beiden ersten Seiten sollen geschnitten werden. — Man erhält für x und y die Werthe 8,85078' und 5,64922'.

Aufgabe 6. In einem Viereck von 12 □' Inhalt sind zwei an einander stoßende Seiten 2' und 5' lang, die der Seite 5' nicht anliegenden Winkel sind rechte; wie groß sind die andern Seiten?

Antw. Entweder 3' und 6', oder 4,92279' und 2,87528'.

Aufgabe 7. Ein Punkt P in der Peripherie des Kreises um M, dessen Radius $MA = r$ ist, ist durch seine Abscisse $AB = a$ gegeben. Durch P ist $PQ \# AM$ gezogen, und dann ist die Linie PF durch P so gelegt, daß PF und PQ mit der Tangente durch P gleiche Winkel bilden: $\measuredangle FPD = \measuredangle QPC$; man soll den Punkt F in AM durch Rechnung finden.



Aufl. Es sei $AF = x$. Da MP mit PF und PQ auch gleiche Winkel bildet, so ist ΔFPM gleichschenklig, $FP = FM = r - x$; folglich nach dem Pythagoras:

$$(r - x)^2 = (x - a)^2 + a(2r - a)$$
$$r^2 - 2rx = -2ax + 2ar; \text{ folglich}$$
$$x = \frac{r - 2a}{r - a} \cdot \frac{r}{2}.$$

Ist a der nte Theil von r, also $a = \frac{r}{n}$, so geht obiger Ausdruck über in:

$$x = \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \cdot \frac{r}{2}.$$

Denkt man sich a im Verhältniß zu r nach und nach immer kleiner werdend, so wird n immer größer und x nähert sich immer mehr einer bestimmten Grenze $\left(\frac{r}{2}\right)$, welche x für $n = \infty$ erreicht. Je kleiner also a im Verhältniß zu r ist, desto näher liegt F dem Mittelpunkt des Radius AM. — Hieraus erklärt es sich, daß von einem Brennpunkte (F) bei einem sphärischen concaven Spiegel nur die Rede sein kann, wenn der Bogen AP, durch dessen Umdrehung um die Axe AM die Spiegelfläche erzeugt wird, recht flach und im Verhältniß

zu r recht klein ist. Der Brennpunkt liegt dann in der Axe und in der Entfernung $\frac{r}{2}$ vom optischen Mittelpunkt (A) des Spiegels.

Aufgabe 8. In welchen Rechtecken übertrifft der Umfang die Summe der Diagonalen um eine Seite des Rechtecks?

Antw. In jedem Rechteck, dessen Seiten sich zu einander wie 3 : 4 verhalten; der Unterschied ist die größere Seite.

Aufgabe 9. Alle Dreiecke vom Umfang 11′ zu bestimmen, deren Seiten bei derselben Einheit »Fuß« ganze Zahlen sind.

Aufl. Sind x und y zwei Seiten, so findet man die Grenzen: $x + y > 5\frac{1}{2}$; $x < 5\frac{1}{2}$; $y < 5\frac{1}{2}$. Es giebt 4 Dreiecke; ihre Seiten sind: 1′ 5′ 5′; 2′ 4′ 5′; 3′ 3′ 5′ und 3′ 4′ 4′.

Aufgabe 10. Alle Paralleltrapeze von 16′ Höhe zu finden, deren parallele Seiten bei derselben Einheit »Fuß« ganze Zahlen sind, und deren Inhalt dem Rechteck aus den parallelen Seiten gleich ist.

Aufl. Die parallelen Seiten sind 9′ und 72′, oder 10′ und 40′, oder 12′ und 24′.

Aufgabe 11. Alle Rechtecke zu bestimmen, deren Seiten bei derselben Einheit ganze Zahlen sind, und deren Inhalt bei der entsprechenden Quadrat-Einheit sechsmal so groß ist, als der Umfang.

Aufl. Es giebt 7 Rechtecke dieser Art; ihre Seiten sind: 13 und 156, 14 und 84, 15 und 60, 16 und 48, 18 und 36, 20 und 30, 21 und 28; dann noch das Quadrat zur Seite 24.

Aufgabe 12. Alle rechtwinkligen Dreiecke zu finden, deren Seiten bei derselben Einheit ganze Zahlen sind und deren Hypotenuse um 8 Einheiten kleiner als die Summe der Katheten ist.

Aufl. Es giebt 3 Dreiecke dieser Art; ihre Seiten sind: 9, 40, 41; 10, 24, 26 und 12, 16, 20.

Aufgabe 13. Dieselbe Aufgabe, wenn die Hypotenuse um 12 Einheiten größer als die Differenz der Katheten sein soll.

Aufl. Man findet 4 Dreiecke; ihre Seiten sind: 6, 8, 10; 12, 9, 15; 24, 10, 26 und 60, 11, 61. Von diesen gilt das erste nur in dem Sinne, daß man die Differenz der Katheten durch Subtraction der größeren von der kleineren bildet.

Anmerk. Die rechtwinkligen Dreiecke, deren Seiten ganze Zahlen bei derselben Einheit sind, findet man Arithm. §. 167. I.

Aufgabe 14. Alle spitzwinkligen Dreiecke zu finden, deren Winkel in Graden ganze Zahlen und resp. durch 11, 14, 15 theilbar sind.

Aufl. Bezeichnet man die Winkel durch 11x, 14y und 15z, so ist

$$11x + 14y + 15z = 180.$$

Hieraus $x = 16 - y - z - \frac{3y + 4z - 4}{11}$.

Es sei $\frac{3y + 4z - 4}{11} = a$, so ist $y = 4a - z + 1 - \frac{z + a - 1}{3}$.

Es sei endlich $\frac{z + a - 1}{3} = b$, so folgt:

(1.) $z = 3b - a + 1$.
(2.) $y = 5a - 4b$.
(3.) $x = 15 - 5a + b$.

Grenzen-Bestimmung. Aus der in der vorstehenden Rechnung liegenden Bedeutung von a und b erkennt man, daß diese Zahlen weder Null noch negativ sein können. — Da ferner die gesuchten Winkel spitz sein sollen, so muß

(4.) $x < 8\frac{2}{11}$; $y < 6\frac{3}{7}$ und $z < 6$ sein.

Eliminirt man a aus (1.) und (2.), so folgt:

(5.) $5z + y = 11b + 5$.

In Verbindung mit (4.) folgt hieraus

$$11b + 5 < 36\tfrac{3}{7} \text{ oder } b < 2\tfrac{6}{7}.$$

Weil aber $b > 0$ sein muß, so hat

b nur die Werthe 1 und 2.

Die Grenzen für a ergeben sich aus (3.) in Verbindung mit (4.), und aus (2.) in Verbindung mit (4.); man findet:

$$a > 1\tfrac{4}{11} + \frac{b}{5} \text{ und } a < 1\tfrac{2}{7} + \frac{4b}{5}.$$

Es liegt sonach:

wenn $b = 1$ ist, a zwischen den Grenzen $1\frac{32}{55}$ und $2\frac{3}{35}$.
» $b = 2$ » a » » » $1\frac{42}{55}$ und $2\frac{31}{35}$.

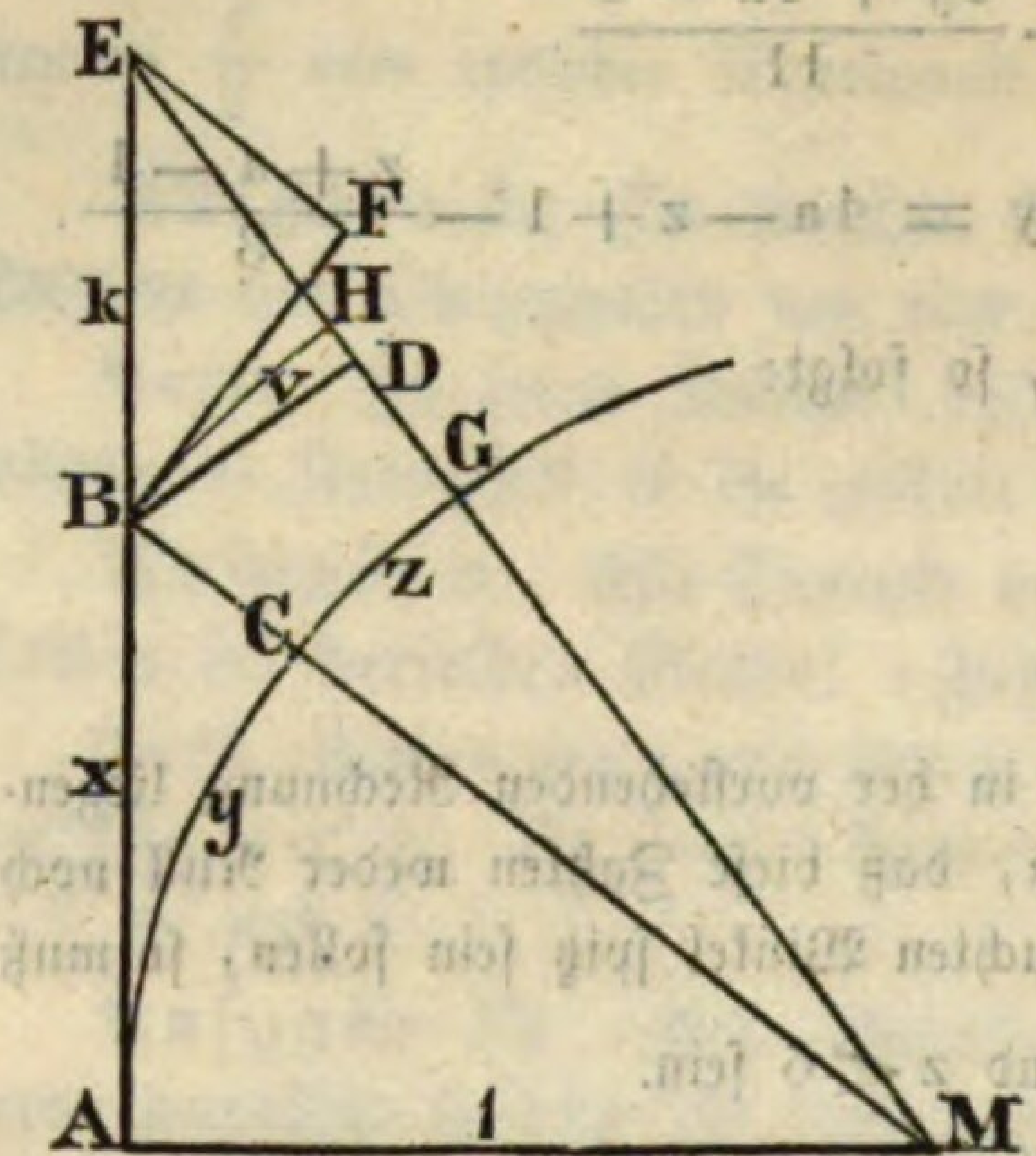
Es giebt sonach nur zwei Dreiecke, welche der Aufgabe entsprechen; das eine hat die Winkel: 66°, 84° und 30°, das andere 77°, 28° und 75°.

Anmerk. Läßt man die Beschränkung fort, daß das Dreieck spitzwinklig sein soll, so treten zu den gefundenen Dreiecken noch vier stumpfwinklige mit folgenden Winkeln hinzu: 121°, 14° und 45°; 11°, 154° und 15°; 22°, 98° und 60°; endlich 33°, 42° und 105°.

§. 205.

Berechnung der Zahl π mit Hülfe der niederen Analysis.

Unter π verstanden wir die Zahl, welche, mit dem Durchmesser eines Kreises multiplicirt, die Peripherie giebt. Kann man also bei dem Kreise zum Radius 1 einen aliquoten Theil der Peripherie berechnen, so hat man auch π.



Es sei M der Mittelpunkt des Kreises, der Radius $MA = 1$ und der Bogen $AC = y$. Um y zu berechnen, vergleichen wir diesen Bogen mit einer geraden Linie. Errichtet man $AB \perp AM$, verlängert MC bis B, und bezeichnet AB durch x: so sind y und x von einander abhängig; man kann daher y als Function von x suchen, etwa in Form einer nach den Potenzen von x fortlaufenden Reihe. Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so setzen wir

$$(1.)\quad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Denkt man sich nun x um das Stück $k = BE$ vergrößert und zieht EM, so gehört zu $x + k$ der Bogen $y + z$ oder AG. Bezeichnet man $x + k$ mit x_1 und $y + z$ mit y_1, so folgt:

$$(2.)\quad y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

Zieht man (1.) von (2.) ab und dividirt noch durch $x_1 - x$, so ist

$$(3.)\quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a_1 + a_2 \cdot \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} + a_3 \cdot \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cdot \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} + \ldots$$

Schlägt man jetzt um M mit MB einen Kreisbogen $BH = \nu$, so verhält sich $z : \nu = 1 : \sqrt{1 + x^2}$; daher ist $z = \frac{\nu}{\sqrt{1 + x^2}}$, und weil $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{z}{k}$ ist, so folgt:

$$(4.)\quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\nu}{k}.$$

Nun liegt $\frac{\nu}{k}$ zwischen zwei leicht zu findenden Grenzen. Fällt man nämlich $BD \perp ME$, errichtet $BF \perp BM$ und fällt $EF \perp BF$ (so daß $EF \parallel BM$ wird): so ist $\frac{\nu}{k} > \frac{BD}{k}$ und $\frac{\nu}{k} < \frac{BF}{k}$. Weil nun $\Delta EBD \sim \Delta EMA$ und $\Delta EBF \sim \Delta BMA$ ist, so folgt:

$$\frac{BD}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + (x + k)^2}} \text{ und } \frac{BF}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

folglich ist aus (4.):

$$(5.)\quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+(x+k)^2}} \text{ und } \frac{y_1 - y}{x_1 - x} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Aus (5.) und (3.) folgt nun:

$$(6.)\quad a_1 + a_2\frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} + a_3\frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} + a_4\frac{x_1^4 - x^4}{x_1 - x} + \ldots + a_n\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} + \ldots \begin{cases} > \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+k)^2}} \\ < \dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Die beiden Grenzwerthe, zwischen denen die vorstehende Reihe liegt, haben aber die Eigenschaft, daß sie für ein immer kleiner und kleiner werdendes k immer näher an einander rücken und für $k = 0$ in den einen Werth $\frac{1}{1+x^2}$ zusammen fallen. Setzt man also $k = 0$, so entsteht, weil $\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right)_{x_1 = x} = nx^{n-1}$ ist (Arithm. §. 92.) aus (6.):

$$(7.)\quad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nun ist aber für $x < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \ldots\ldots,$$

und weil diese Reihe Glieder mit ungeraden Potenzen von x nicht enthält, so müssen auch in der linken Seite von (7.) alle solche Glieder fortfallen, d. h. es ist $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = $ u. s. w. $= 0$.

Es bleibt sonach

$$a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + 7a_7x^6 + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - + \ldots$$

Hieraus folgt nach der Methode der unbestimmten Coefficienten:

$a_1 = 1,\quad a_3 = -\frac{1}{3},\quad a_5 = +\frac{1}{5},\quad a_7 = -\frac{1}{7}$ u. s. w.

Setzt man diese Werthe in (1.) ein, so erhält man:

$$(8.)\quad y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + - + \ldots\ldots$$

Bei der Entwicklung wurde die Reihe für $\frac{1}{1+x^2}$ benutzt, welche nur für $x < 1$ gilt; daher gilt auch die Reihe (8.) nur mit dieser Einschränkung. Man kann aber diese Reihe (8.) aus (7.) ohne diese Einschränkung entwickeln, wenn man letztere Gleichung mit $1 + x^2$ multiplicirt und dann nach der Methode der unbestimmten Coefficienten a_1, a_2, a_3 u. s. w. berechnet. Man erreicht hierdurch aber nur die Ueberzeugung, daß die Reihe (8.) auch für $x = 1$ gilt; denn für $x > 1$ ist sie divergent.

Es kommt nun darauf an, nach (8.) einen Bogen zu berechnen, der ein aliquoter Theil der Peripherie ist, und für welchen x bekannt ist oder bestimmt werden kann. Setzt man aber $\measuredangle AMC = 30°$, so

ist y der 12te Theil der Peripherie, also $y = \frac{\pi}{6}$. Ferner ist dann $\measuredangle MBA = 60°$, und ΔMBA kann als die Hälfte eines (durch die Höhe getheilten) gleichseitigen Dreiecks betrachtet werden, dessen Höhe $MA = 1$ ist. Hieraus folgt $MB = 2x$, daher nach dem Pythagoreischen Lehrsatz: $(2x)^2 = x^2 + 1$, folglich $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Man erhält nun aus (8.):

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^7 + - + \ldots$$

Multiplicirt man mit 6 und sondert rechts $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ab, so folgt:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[1 - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{3})^4 - + \ldots\right].$$

Diese Reihe ist die Lagny'sche Reihe, welche in der Analysis (Arithm. §. 216. II.) auf anderem Wege und aus anderen Bedingungen gefunden wurde. Aus ihr erhält man den bekannten Zahlenwerth $\pi = 3{,}14159265\ldots.$

Achtes Kapitel.

Die ebene Trigonometrie.

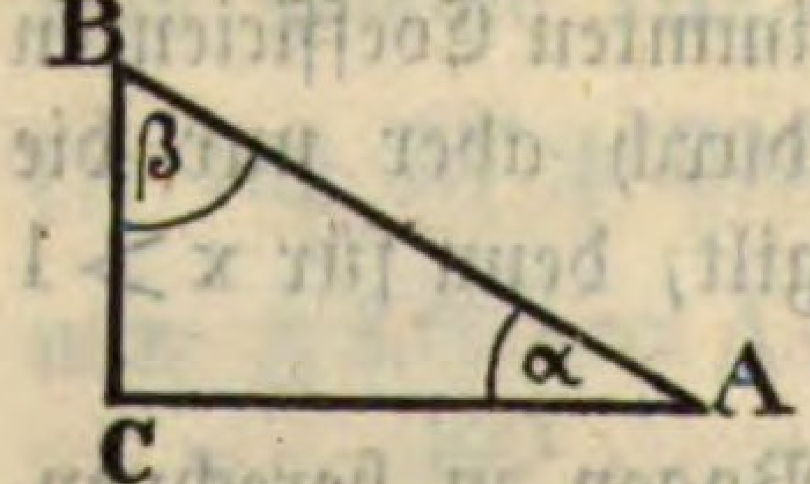
§. 206.

Einleitung.

Die ebene Trigonometrie lehrt aus gegebenen Stücken einer ebenen Figur unbekannte durch Rechnung finden, wenn unter diesen Stücken auch beliebige Winkel sind; sie bildet sonach eine nothwendige Ergänzung der algebraischen Geometrie.

Bisher wurden Winkel auf zwei Arten bestimmt: entweder durch eine benannte Zahl, welche sich auf eine Winkel-Einheit (Grad, Minute, Secunde) bezog, oder durch den Arcus, d. h. durch das Verhältniß des Bogens zum Radius. Die Trigonometrie wendet eine dritte Art der Winkelbestimmung an: sie bestimmt die Winkel durch das Verhältniß gerader Linien zu einander.

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ABC der Quotient (das Verhältniß) zweier Seiten gegeben, z. B. das Verhältniß einer Kathete BC zur Hypotenuse AB, d. h. der Quotient $\frac{BC}{AB}$, so ist das Dreieck selbst zwar nicht bestimmt, wohl aber sind es die spitzen Winkel desselben; denn alle rechtwinkligen Dreiecke, in welchen dieser Quotient derselbe ist, sind einander ähnlich; in allen liegt daher



der Kathete derselbe Winkel α gegenüber, in allen liegt derselbe Winkel β der Kathete an. Sind aber in zwei rechtwinkligen Dreiecken diese Quotienten ungleich, so sind die den Katheten gegenüberliegenden Winkel und auch die ihnen anliegenden ungleich; denn wären sie gleich, so müßten die Dreiecke ähnlich, also jene Quotienten gleich sein. Umgekehrt: haben zwei rechtwinklige Dreiecke denselben spitzen Winkel α, so ist in beiden der Quotient der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete durch die Hypotenuse derselbe, weil die Dreiecke ähnlich sind; ändert man aber in dem einen dieser Dreiecke den Winkel α, so können diese Quotienten nicht mehr gleich sein; denn wären sie gleich, so müßten die Dreiecke ähnlich, also jene Winkel gleich sein. Bleiben wir zunächst bei dem Quotienten stehen, der durch Division der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete durch die Hypotenuse entsteht, so folgt aus dem Vorhergehenden: zu jedem spitzen Winkel α gehört nur ein solcher Quotient, und zu jedem Quotienten gehört nur ein Winkel α; folglich ist durch α der Quotient, und durch den Quotienten ist α vollkommen bestimmt.

Denkt man sich nun zu jedem Winkel zwischen 0° und 90° den zugehörigen Quotienten berechnet (wie dies geschehen kann, muß erst gelehrt werden) und alle diese Quotienten in eine Tabelle zusammengetragen, aus der man also zu jedem Winkel den Quotienten und zu jedem Quotienten den Winkel entnehmen kann, so läßt sich wenigstens im Allgemeinen erkennen, daß durch solche Tabelle der oben angegebene Zweck der Trigonometrie zu erreichen ist. Zunächst würde man alle unbekannten Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks aus zwei bestimmenden Stücken berechnen können. Ist z. B. der Inhalt F und ein spitzer Winkel α gegeben, so ist auch der andere spitze Winkel β bekannt, und aus jener Tabelle ist das Verhältniß jeder Kathete zur Hypotenuse (mittelst α und β) zu entnehmen. Nennt man also die Hypotenuse x, so ist jede Kathete durch x auszudrücken; ihr Product ist aber $= 2F$. Aus dieser Gleichung findet man x und aus x die Katheten. — Der Uebergang zum schiefwinkligen Dreieck kann durch Zerlegen desselben in zwei rechtwinklige (mittelst der Höhe) geschehen; Polygone aber lassen sich durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen.

Was aber hier von dem Quotienten der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete durch die Hypotenuse gesagt ist, gilt von dem Quotienten jeder beliebigen zwei Seiten in derselben Ausdehnung.

Das vorliegende Kapitel enthält zuerst die Lehre von diesen von α abhängigen Quotienten, ihre Abhängigkeit von einander und die Art ihrer Berechnung; dann ihre Anwendung auf rechtwinklige und schiefwinklige Dreiecke und auf Polygone.

Von den trigonometrischen Functionen.

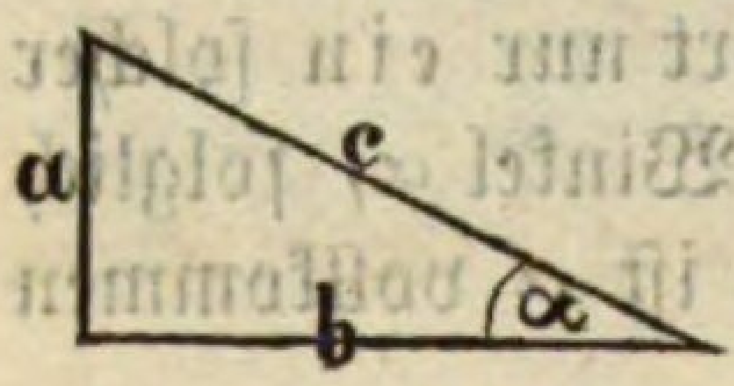
§. 207.
Erklärung.

Denkt man sich den spitzen Winkel α als Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, so nennt man:

1) den Quotienten der α gegenüberliegenden Kathete durch die Hypotenuse den **Sinus** des Winkels α und schreibt ihn $\sin\alpha$; es ist also

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

2) Der Quotient der α anliegenden Kathete durch die Hypotenuse heißt der **Cosinus** des Winkels α und wird $\cos\alpha$ geschrieben; also ist



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

3) Die Quotienten $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\frac{1}{\cos\alpha}$ und $\frac{1}{\sin\alpha}$ heißen resp. die **Tangente**, **Cotangente**, **Secante** und **Cosecante** des Winkels α; ihre Schreibart zeigen die nachstehenden Gleichungen, welche also als Erklärungen gelten:

$$\text{I.}\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\text{II.}\quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\text{III.}\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

$$\text{IV.}\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Man nennt diese sechs Quotienten $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{cotg}\,\alpha$, $\sec\alpha$ und $\mathrm{cosec}\,\alpha$ **trigonometrische Functionen**.

Anmerk. Außer dieser hat man noch zwei, jetzt selten vorkommende Functionen: den **Sinus versus** und den **Cosinus versus** des Winkels α. Es ist

$$\mathrm{sinv}\,\alpha = 1 - \cos\alpha;\quad \mathrm{cosinv}\,\alpha = 1 - \sin\alpha.$$

§. 208.
Folgerungen.

1) Aus den Gleichungen IV., III., und dann aus I. und II., wenn man beide multiplicirt, folgt:

$$(1.)\quad \sin\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = 1.$$
$$(2.)\quad \cos\alpha \,.\, \sec\alpha = 1.$$
$$(3.)\quad \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = 1.$$

Sonach lassen sich die sechs trigonometrischen Functionen paarweise so zusammenstellen, daß das Product jedes Paares $= 1$ ist; jede Function ist die Reciproke einer der anderen. — Aus (3.) folgt noch:

$$\text{V.}\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} \text{ und } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

2) Die Functionen $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ lassen sich auch durch die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks mit dem $\measuredangle\,\alpha$ ausdrücken, wenn man statt $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die entsprechenden Quotienten setzt.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b},$$

d. h. $\operatorname{tg}\alpha$ ist der Quotient der α gegenüberliegenden Kathete durch die anliegende.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a},$$

d. h. $\operatorname{cotg}\alpha$ ist der Quotient der α anliegenden Kathete durch die gegenüberliegende.

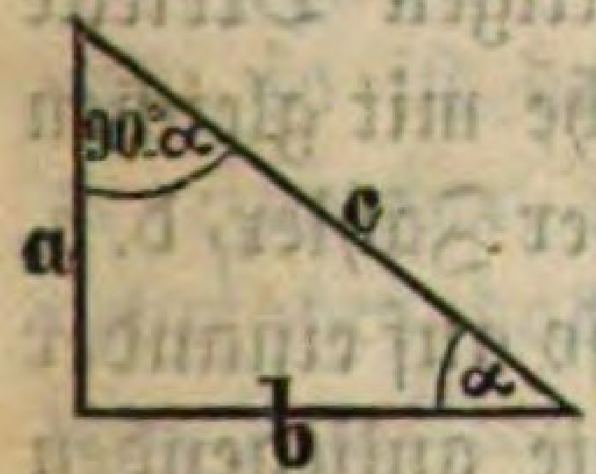
$$\sec\alpha = 1 : \frac{b}{c} = \frac{c}{b},$$

d. h. $\sec\alpha$ ist der Quotient der Hypotenuse durch die α anliegende Kathete.

$$\operatorname{cosec}\alpha = 1 : \frac{a}{c} = \frac{c}{a},$$

d. h. $\operatorname{cosec}\alpha$ ist der Quotient der Hypotenuse durch die α gegenüberliegende Kathete.

3) Bezeichnet α einen spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, so ist der andere spitze Winkel sein Complement, also $90^\circ - \alpha$. Vergleicht man nun die Functionen beider Winkel mit einander, so findet man:



$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha \left(= \frac{b}{a}\right).$$

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \left(= \frac{a}{b}\right).$$

$$\sec(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha \left(= \frac{c}{a}\right).$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha \left(= \frac{c}{b}\right).$$

Hieraus folgt das Gesetz: **die Functionen Cosinus, Cotangente und Cosecante eines Winkels sind resp. den Functionen Sinus, Tangente und Secante des Complements gleich, und umgekehrt.** z. B.

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$; $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$;
$\operatorname{tg} 12^\circ\ 30' = \operatorname{cotg} 77^\circ\ 30'$; $\operatorname{cotg} 26^\circ = \operatorname{tg} 64^\circ$;
$\sec 72^\circ = \operatorname{cosec} 18^\circ$; $\operatorname{cosec} 50^\circ\ 20'\ 16'' = \sec 39^\circ\ 39'\ 44''$.

§. 209.

Die Aenderung der trigonometrischen Functionen von α, wenn α sich ändert. Die Grenzen ihrer Werthe.

Da jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks kleiner als die Hypotenuse ist, die Katheten aber zu einander jedes beliebige Verhältniß haben können, so folgt:

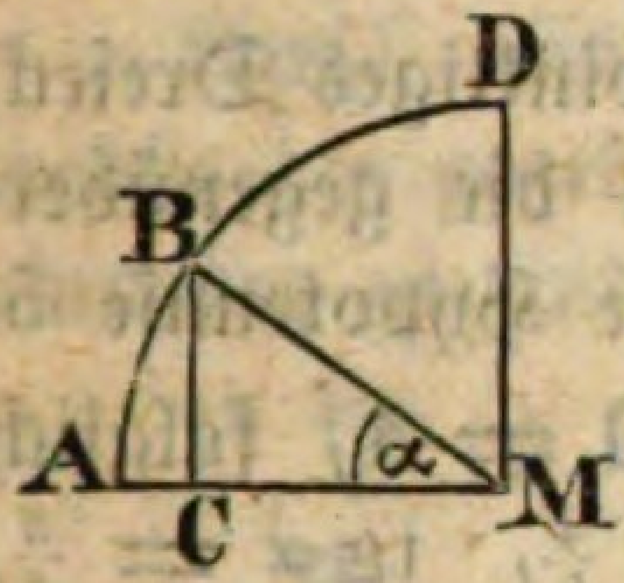
1) $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sind ächte Brüche zwischen den Grenzen 0 und 1.

2) $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ können jeden beliebigen Werth haben; ihre Grenzen sind 0 und ∞.

3) $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ sind unächte Brüche oder ganze Zahlen; ihre Grenzen sind 1 und ∞.

Die Frage, ob mit dem Wachsen von α ein Wachsen, oder Fallen der Functionen verbunden ist, hat man für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus geometrischen Betrachtungen zu beantworten; für die übrigen Functionen folgt die Beantwortung durch ihre Erklärung (Formeln I. bis IV.). Um aber die sin. und cos. verschiedener Winkel mit einander zu vergleichen, ist es zweckmäßig, die entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke mit gleichen Hypotenusen zu construiren, weil dann Brüche mit gleichen Nennern entstehen, deren Vergleichung durch Vergleichen der Zähler, d. h. der Katheten geschieht. Denkt man sich dann die Dreiecke so auf einander gelegt, daß die Scheitelpunkte der Winkel in einander, die anliegenden Katheten aber in eine Richtung fallen, so liegen die Endpunkte der Hypotenusen in der Peripherie eines Kreises. Durch diese Betrachtung wird man darauf geführt, die Winkel als Centriwinkel in einen Kreis einzutragen und dessen Radius zur Hypotenuse der rechtwinkligen Dreiecke zu nehmen.

Es sei AMD ein Quadrant; man denke sich den $\measuredangle \alpha$ als Centriwinkel so eingetragen, daß MA der eine Schenkel ist; der andere fällt dann zwischen MA und MD. Es sei $\measuredangle AMB = \alpha$. Man denke sich ferner MA fest, aber den Schenkel MB beweglich. Fällt man $BC \perp MA$, so ist



$$\sin\alpha = \frac{BC}{MB},\ \cos\alpha = \frac{MC}{MB}.$$

Macht man nun α nach und nach immer kleiner, so nähert sich α dem Werthe 0, B rückt immer näher an A, BC nähert sich der Null, MC dem Radius MA; folglich $\sin\alpha$ der Null, $\cos\alpha$ dem Werthe 1. Macht man aber α immer größer, so nähert sich α dem $\measuredangle 90°$, B rückt immer näher an D, BC nähert sich dem Radius MD, MC der Null; folglich $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ resp. den Werthen 1 und 0. Die Winkel 0° und 90° sind hier nur als Grenzwerthe aufzufassen, denen α immer näher kommen kann, und 1 und 0 sind ebenfalls Grenzwerthe, denen dann $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ immer näher kommen müssen.

α	0°	wächst	90°
$\sin\alpha$	0	wächst	1
$\cos\alpha$	1	fällt	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	wächst	∞
$\operatorname{cotg}\alpha$	∞	fällt	0
$\sec\alpha$	1	wächst	∞
$\operatorname{cosec}\alpha$	∞	fällt	1

In diesem Sinne hat man also die nebenstehende Uebersicht aufzufassen. Was in derselben von den Functionen $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ gelehrt wird, ergiebt sich aus dem arithmetischen Satze, daß ein Bruch wächst oder fällt, je nachdem sein Zähler wächst oder fällt, oder auch sein Nenner fällt oder wächst.

§. 210.

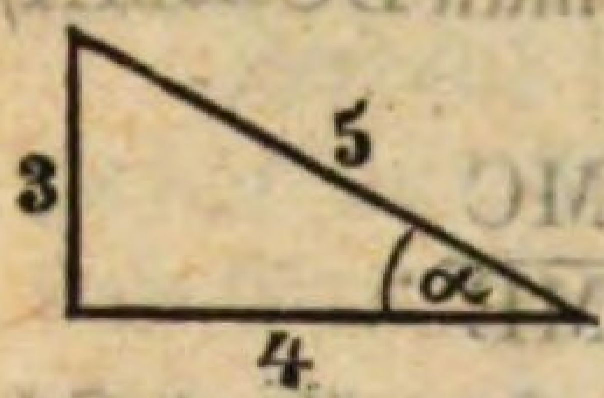
Aufgabe.

Es ist eine trigonometrische Function eines Winkels α gegeben; man soll die übrigen Functionen finden.

Aufl. Denkt man sich α als Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist durch die gegebene Function das Verhältniß zweier Seiten zu einander bekannt; man kann daher mittelst des Pythagoreischen Lehrsatzes das Verhältniß der drei Seiten zu einander finden und so jede Function aus der Figur ablesen. — Da es hier nur auf das Verhältniß der Seiten ankommt, nicht auf ihre wirkliche Länge, so kann man die Seiten, deren Verhältniß durch die Function gegeben ist, durch sehr verschiedene Zahlen ausdrücken, wird aber natürlich die einfachsten Zahlen wählen. Ist also die Function ein Bruch, so hebt man ihn erst, und drückt dann die beiden, der Function entsprechenden

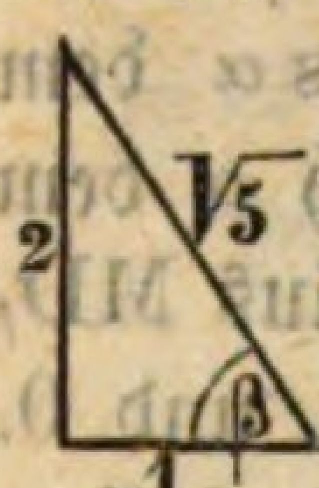
Seiten resp. durch den Zähler und Nenner aus. Ist die Function eine ganze Zahl (oder ein Buchstabe), so giebt man ihr den Nenner 1. — z. B.

1) Gegeben $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck, nennt einen seiner spitzen Winkel α und schreibt in die gegenüberliegende Kathete 3 (Einheiten), in die Hypotenuse 5.



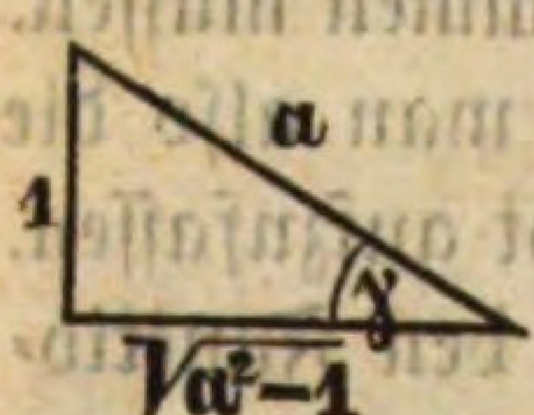
Die andere Kathete ist dann $\sqrt{25-9} = 4$; folglich hat man aus der Figur: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\sec\alpha = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$.

2) Gegeben $\operatorname{tg}\beta = 2$. Man setze $\frac{2}{1}$ statt 2; dann ist die dem Winkel gegenüberliegende Kathete $= 2$, die anliegende $= 1$,



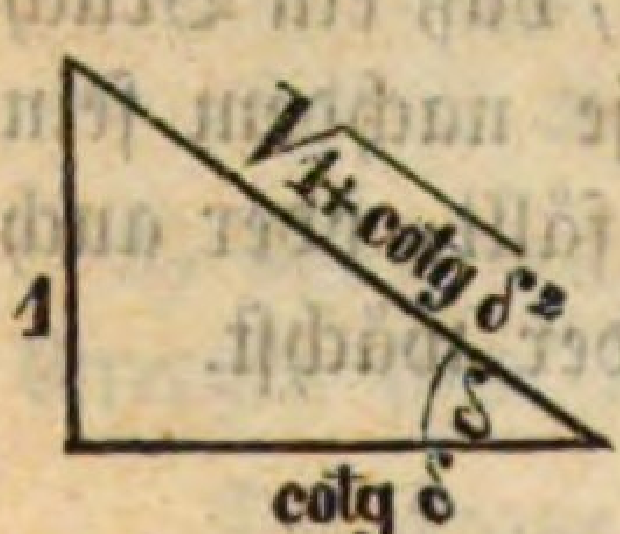
folglich die Hypotenuse $= \sqrt{5}$; daher $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{2}$, $\sec\beta = \sqrt{5}$, $\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

3) Gegeben $\operatorname{cosec}\gamma = a$, so ist die Hypotenuse $= a$, die dem Winkel γ gegenüberliegende Kathete $= 1$, also die andere $= \sqrt{a^2-1}$; daher: $\sin\gamma = \frac{1}{a}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$,



$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$, $\operatorname{cotg}\gamma = \sqrt{a^2-1}$, $\sec\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$.

4) Es sei $\operatorname{cotg}\delta$ gegeben; wie groß sind die andern Functionen? Es ist die dem $\measuredangle\,\delta$ anliegende Kathete $= \operatorname{cotg}\delta$, wenn die gegenüberliegende $= 1$ ist; dann ist aber die Hypotenuse $= \sqrt{1+\operatorname{cotg}\delta^2}$, folglich



$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}\delta^2}},\quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\delta}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}\delta^2}},$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\operatorname{cotg}\delta},\quad \sec\delta = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg}\delta^2}}{\operatorname{cotg}\delta} \text{ und } \operatorname{cosec}\delta = \sqrt{1+\operatorname{cotg}\delta^2}.$$

5) Es sei $\cos\varepsilon = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, so folgt $\sin\varepsilon = \frac{2a}{1+a^2}$,

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2a}{1-a^2},\qquad \operatorname{cotg}\varepsilon = \frac{1-a^2}{2a},$$

$$\sec\varepsilon = \frac{1+a^2}{1-a^2},\qquad \operatorname{cosec}\varepsilon = \frac{1+a^2}{2a}.$$

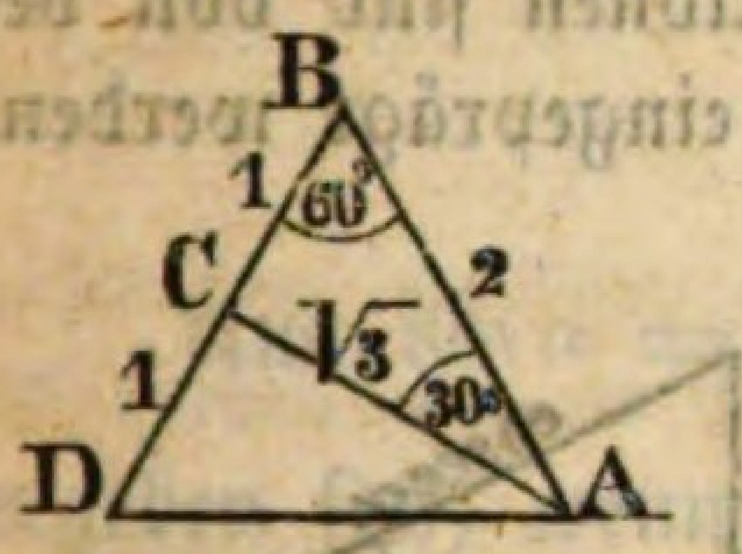
6) Gegeben $\sec\varphi = \frac{61}{60}$, so folgt $\sin\varphi = \frac{11}{61}$, $\cos\varphi = \frac{60}{61}$,

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{11}{60}$, $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{60}{11}$, $\operatorname{cosec}\varphi = \frac{61}{11}$.

7) Alle trigonometrischen Functionen der Winkel 30°, 60° und 45° zu bestimmen.

Aufl. Es kommt darauf an, in den rechtwinkligen Dreiecken, welche die gegebenen Winkel enthalten, die Verhältnisse der Seiten zu einander zu finden.

1) Ist Δ ABD gleichseitig, so ist jeder Winkel 60°; halbirt AC den $\angle$ BAD, so ist Δ ABC rechtwinklig und enthält die Winkel 60° und 30°. Weil aber BC die Hälfte von BD, also auch von AB ist, so muß, wenn BC = 1 ist, AB = 2 und AC = $\sqrt{3}$ sein. Hieraus folgt:



$$\sin 30° = \cos\ 60° = \tfrac{1}{2};\quad \cos\ 30° = \sin 60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$
$$\mathrm{tg}\ 30° = \mathrm{cotg}\ 60° = \sqrt{\tfrac{1}{3}};\ \mathrm{cotg}\ 30° = \mathrm{tg}\ 60° = \sqrt{3};$$
$$\sec 30° = \mathrm{cosec}\, 60° = \frac{2}{\sqrt{3}};\ \mathrm{cosec}\, 30° = \sec 60° = 2.$$

2) Sind in einem rechtwinkligen Dreieck die Katheten einander gleich, und bezeichnet man jede mit 1, so ist die Hypotenuse = $\sqrt{2}$, jeder spitze Winkel aber = 45°; daher

$$\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ \mathrm{tg} 45° = \mathrm{cotg} 45° = 1;$$
$$\sec 45° = \mathrm{cosec} 45° = \sqrt{2}.$$

Anmerk. Die Schreibart $\sin\alpha^2$, $\cos\alpha^2$, $\mathrm{tg}\alpha^2$ u. s. w. gilt immer statt $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$, $(\mathrm{tg}\alpha)^2$ u. s. w. Wo eine Undeutlichkeit entstehen könnte, setze man Klammern, z. B. $(\sin 20°\ 24'\ 16'')^2$. Im Gebrauch ist auch die Schreibart $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\mathrm{tg}^2\alpha$ u. s. w.

§. 211.

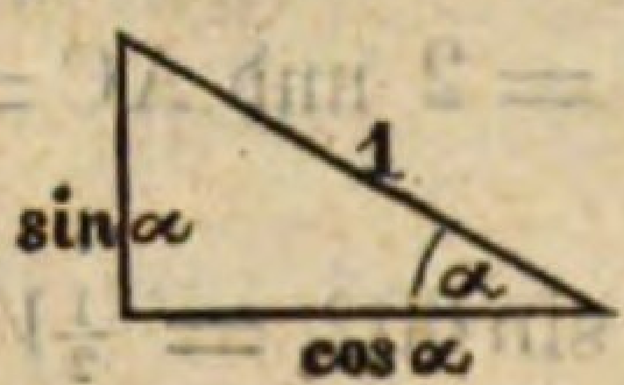
Gleichungen zwischen zwei Functionen desselben Winkels.

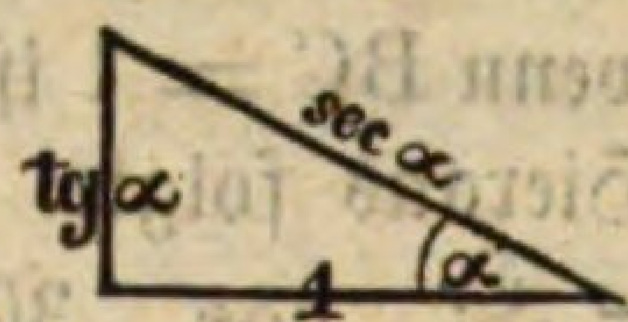
In der Regel kommt es nur darauf an, zwischen zwei Functionen eines Winkels α eine Gleichung zu bilden, welche die Abhängigkeit dieser Functionen von einander ausdrückt. Der vorige §. giebt für jeden Fall hierzu die Anleitung: man sieht eine Function als gegeben an und bestimmt die andere, wie dort gelehrt ist. Soll z. B. eine Gleichung zwischen $\cos\alpha$ und $\mathrm{tg}\,\alpha$ gebildet werden, und sieht man $\mathrm{tg}\alpha$ als gegeben an, bezeichnet also die α gegenüberliegende Kathete durch $\mathrm{tg}\alpha$, die anliegende durch 1: so ist die Hypotenuse

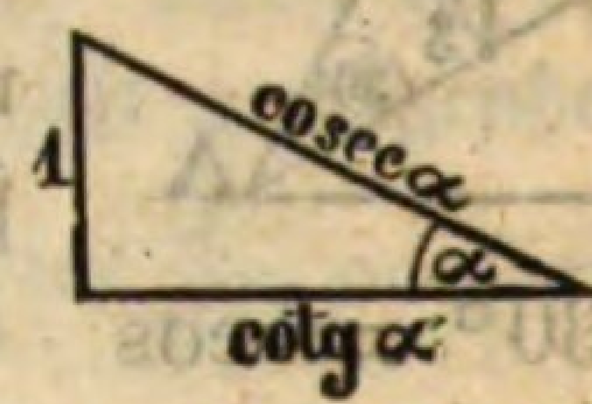
$$= \sqrt{1 + \mathrm{tg}\alpha^2},\ \text{folglich}\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}\alpha^2}},\ \text{oder}$$

$$\cos\alpha^2 = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}\alpha^2}.$$

Für solche zwei Functionen aber, welche, ihrer Bedeutung im rechtwinkligen Dreieck nach, dieselbe Seite zum Nenner haben, kann man noch etwas einfacher verfahren. Bezeichnet man diese Seite durch 1, so sind die beiden andern Seiten die beiden Functionen; folglich giebt der Pythagoreische Lehrsatz die verlangte Gleichung. Solche Functionen sind $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$, und gerade die Gleichungen zwischen diesen Functionen sind von besonderer Wichtigkeit und müssen dem Gedächtniß eingeprägt werden. Man erhält aber:







$$\text{VI.}\quad \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$$
$$\text{VII.}\quad \sec\alpha^2 = 1 + \operatorname{tg}\alpha^2.$$
$$\text{VIII.}\quad \operatorname{cosec}\alpha^2 = 1 + \operatorname{cotg}\alpha^2.$$

Aus VI. folgt noch:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos\alpha^2} \text{ und } \cos\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha^2}.$$

Aehnlich kann man aus VII. und VIII. entwickeln.

Anmerk. Der Leser sei darauf aufmerksam gemacht, daß aus dem Gesetze VI. die Gesetze VII. und VIII. unmittelbar folgen; man braucht nur VI. durch resp. $\cos\alpha^2$ und $\sin\alpha^2$ zu dividiren.

Alle drei Gesetze kann man auch dadurch herleiten, daß man auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks mit dem spitzen Winkel α den Pythagoreischen Lehrsatz unmittelbar anwendet. Sind a, b, c die Seiten, und liegt a dem Winkel α, c aber dem rechten Winkel gegenüber: so ist $a^2 + b^2 = c^2$. Diese Gleichung muß man resp. durch c^2, b^2, a^2 dividiren, wenn man die Formeln VI., VII., VIII. erhalten will. Endlich liegt das Gesetz VIII. schon in VII.; denn es folgt aus VII., wenn man $90° - \alpha$ statt α setzt.

Zur Uebung.

1) $\sin\alpha^2 + (\cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)^2 + (\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta)^2 = 1.$

2) $\sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = \cos\beta^2 - \cos\alpha^2.$

§. 212.

Wenn eine Function eines Winkels α gegeben ist, so kann man die übrigen Functionen auch durch die Formeln I. bis VIII. finden.

Beisp. Es sei $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{6}$, so folgt:

aus V. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{6}{5}$;

aus VII. $\sec\alpha = \sqrt{1+\frac{25}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{61}$;

aus VIII. $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1+\frac{36}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{61}$;

aus III. $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}$;

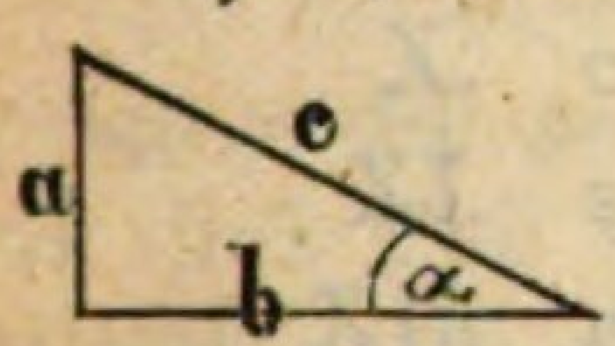
aus IV. $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{61}}$.

Der Leser möge die Beispiele in §. 210. auch auf diese Weise rechnen.

§. 213.
Gesetze.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ und $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ ergeben sich, wenn man die Nenner fortschafft, folgende Gesetze:

1) $c.\sin\alpha = a$, d. h. multiplicirt man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem sin. des einen spitzen Winkels, so erhält man die dem Winkel gegenüberliegende Kathete.



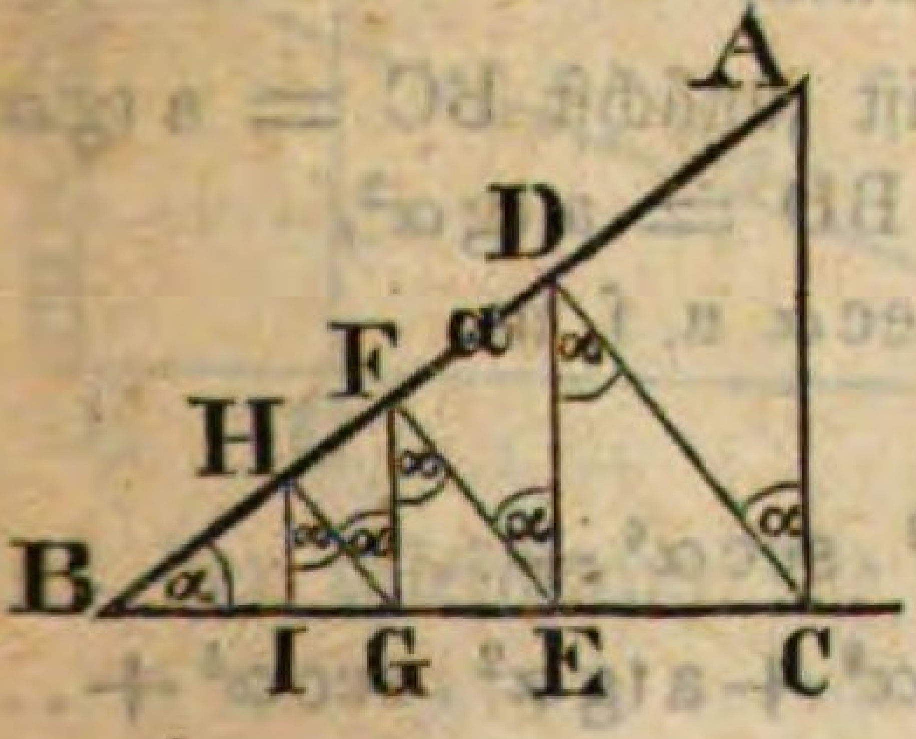
2) $c.\cos\alpha = b$, d. h. multiplicirt man die Hypotenuse mit dem cos. des einen spitzen Winkels, so erhält man die dem Winkel anliegende Kathete.

3) $b.\operatorname{tg}\alpha = a$, d. h. multiplicirt man eine Kathete mit der tg. des anliegenden spitzen Winkels, so erhält man die andere Kathete.

4) $b.\sec\alpha = c$, d. h. multiplicirt man eine Kathete mit der sec. des anliegenden spitzen Winkels, so erhält man die Hypotenuse.

Ist statt α sein Complement gegeben, so kann man auch $\operatorname{cotg}(90°-\alpha)$ statt $\operatorname{tg}\alpha$, und $\operatorname{cosec}(90°-\alpha)$ statt $\sec\alpha$ setzen.

Auf die vorstehenden Gesetze sei der Leser dringend aufmerksam gemacht; er möge sie seinem Gedächtniß fest einprägen. Sie bilden nicht nur die Grundlage aller weiteren Gesetze, sondern sind auch für die Anwendungen der Trigonometrie überaus wichtig. Allerdings kommen sie unmittelbar nur bei dem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreieck und bei regulären Polygonen zur Anwendung; aber gerade auf diese Figuren kommt man bei Anwendungen der Trigonometrie, namentlich in der Mechanik, vorzugsweise zurück. — Zur Einübung dieser Gesetze dienen die nachstehenden zwei Beispiele.



Beisp. Es sei $\measuredangle ABC = \alpha$, und $AB = a$; ferner sei gefällt $AC \perp BC$, $CD \perp AB$, $DE \perp BC$, $EF \perp AB$ u. s. w.; man soll alle einzelnen Linien der Figur durch a und durch die Functionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ausdrücken.

Aufl. Zunächst ist $AC = a \sin\alpha$; folglich $AD = a \sin\alpha^2$, $CD = a \sin\alpha \cos\alpha$; folglich

$CE = a \sin\alpha^2 \cos\alpha$, $DE = a \sin\alpha \cos\alpha^2$, u. s. w. Zur besseren Uebersicht dient:

1) $AB = a \sin\alpha^2 + a \sin\alpha^2 \cos\alpha^2 + a \sin\alpha^2 \cos\alpha^4 + a \sin\alpha^2 \cos\alpha^6 + \ldots$

2) $CB = a \sin\alpha^2 \cos\alpha + a \sin\alpha^2 \cos\alpha^3 + a \sin\alpha^2 \cos\alpha^5 + a \sin\alpha^2 \cos\alpha^7 + \ldots$

3) Summe aller Perpendikel auf BC

$$= a \sin\alpha + a \sin\alpha . \cos\alpha^2 + a \sin\alpha . \cos\alpha^4 + a \sin\alpha \cos\alpha^6 + \ldots$$

4) Summe aller Perpendikel auf AB

$$= a \sin\alpha \cos\alpha + a \sin\alpha \cos\alpha^3 + a \sin\alpha \cos\alpha^5 + \ldots$$

Alle diese Reihen sind abnehmende geometrische Progressionen, und wenn wir unendlich viel Glieder annehmen, so können wir durch die Summation die Probe der Richtigkeit der Rechnung machen. Aus 1) folgt:

$$AB = a \sin\alpha^2 . (1 + \cos\alpha^2 + \cos\alpha^4 + \cos\alpha^6 + \ldots)$$

$$= a \sin\alpha^2 . \frac{1}{1 - \cos\alpha^2} = a \text{ (Formel VI.)}.$$

Aus 2) folgt:

$$CB = a \sin\alpha^2 . (\cos\alpha + \cos\alpha^3 + \cos\alpha^5 + \ldots)$$

$$= a \sin\alpha^2 . \frac{\cos\alpha}{1 - \cos\alpha^2} = a . \cos\alpha.$$

Aus 3) folgt die Summe aller Perpendikel auf BC

$$= a \sin\alpha (1 + \cos\alpha^2 + \cos\alpha^4 + \cos\alpha^6 + \ldots)$$

$$= a \sin\alpha . \frac{1}{1 - \cos\alpha^2} = \frac{a}{\sin\alpha} = a . \operatorname{cosec}\alpha = a \sec(90^\circ - \alpha).$$

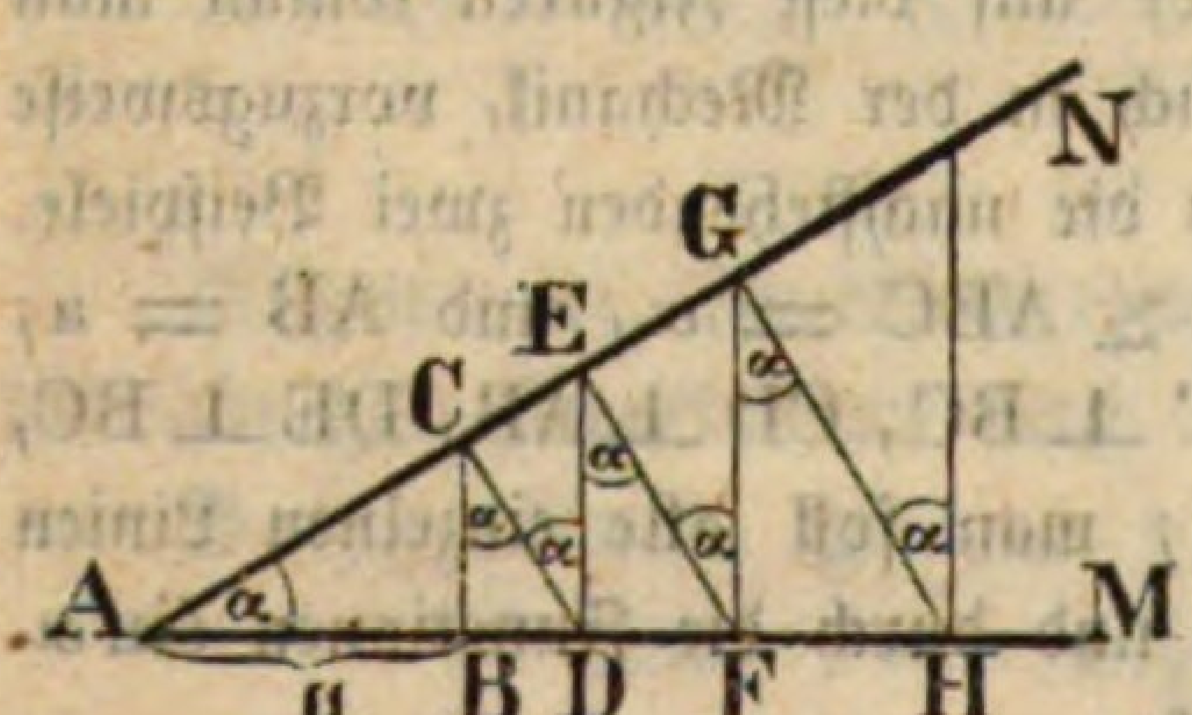
Aus 4) folgt die Summe aller Perpendikel auf AB

$$= a \sin\alpha (\cos\alpha + \cos\alpha^3 + \cos\alpha^5 + \ldots)$$

$$= a \sin\alpha . \frac{\cos\alpha}{1 - \cos\alpha^2} = a . \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = a . \operatorname{cotg}\alpha = a . \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

Von der Richtigkeit der Werthe in 3) und 4) überzeugt man sich geometrisch, wenn man in B auf BA eine Senkrechte errichtet, sie bis zu ihrem Durchschnittspunkt P mit der Richtung AC verlängert und nun auch alle Perpendikel der Figur (CD ausgenommen) über BC resp. bis BP und CP verlängert.

Beisp. 2. Es sei $\measuredangle$ NAM $= \alpha$, AB $=$ a; ferner sei errichtet: BC $\perp$ AM, CD $\perp$ AN, DE $\perp$ AM, EF $\perp$ AN u. s. w.; man soll alle Linien der Figur durch a, tgα und secα ausdrücken.



Aufl. Es ist zunächst $BC = a \operatorname{tg}\alpha$, $AC = a \sec\alpha$, $BD = a \operatorname{tg}\alpha^2$, $CD = a \operatorname{tg}\alpha . \sec\alpha$ u. s. w.

Man findet

1) $AM = a + a \operatorname{tg}\alpha^2 + a \operatorname{tg}\alpha^2 . \sec\alpha^2 + a \operatorname{tg}\alpha^2 . \sec\alpha^4 + \ldots$

2) $AN = a \sec\alpha + a \operatorname{tg}\alpha^2 . \sec\alpha + a \operatorname{tg}\alpha^2 . \sec\alpha^3 + a \operatorname{tg}\alpha^2 . \sec\alpha^5 + \ldots$

3) Summe aller Perpendikel auf AM

$$= a \operatorname{tg}\alpha + a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sec\alpha^2 + a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sec\alpha^4 + a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sec\alpha^6 + \ldots$$

4) Summe aller Perpendikel auf AN

$$= a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sec\alpha + a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sec\alpha^3 + a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sec\alpha^5 + a \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sec\alpha^7 + \ldots$$

Die Reihen divergiren; zur Probe findet man leicht aus der Figur: Nr. 1. und 3. müssen, mit $\sec\alpha$ multiplicirt, resp. Nr. 2. und 4. geben. (Aehnlich kann man auch im Beisp. 1. eine Probe machen.)

§. 214.

Gesetze über sin. und cos. der Summe und Differenz zweier Winkel.

IX. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$.

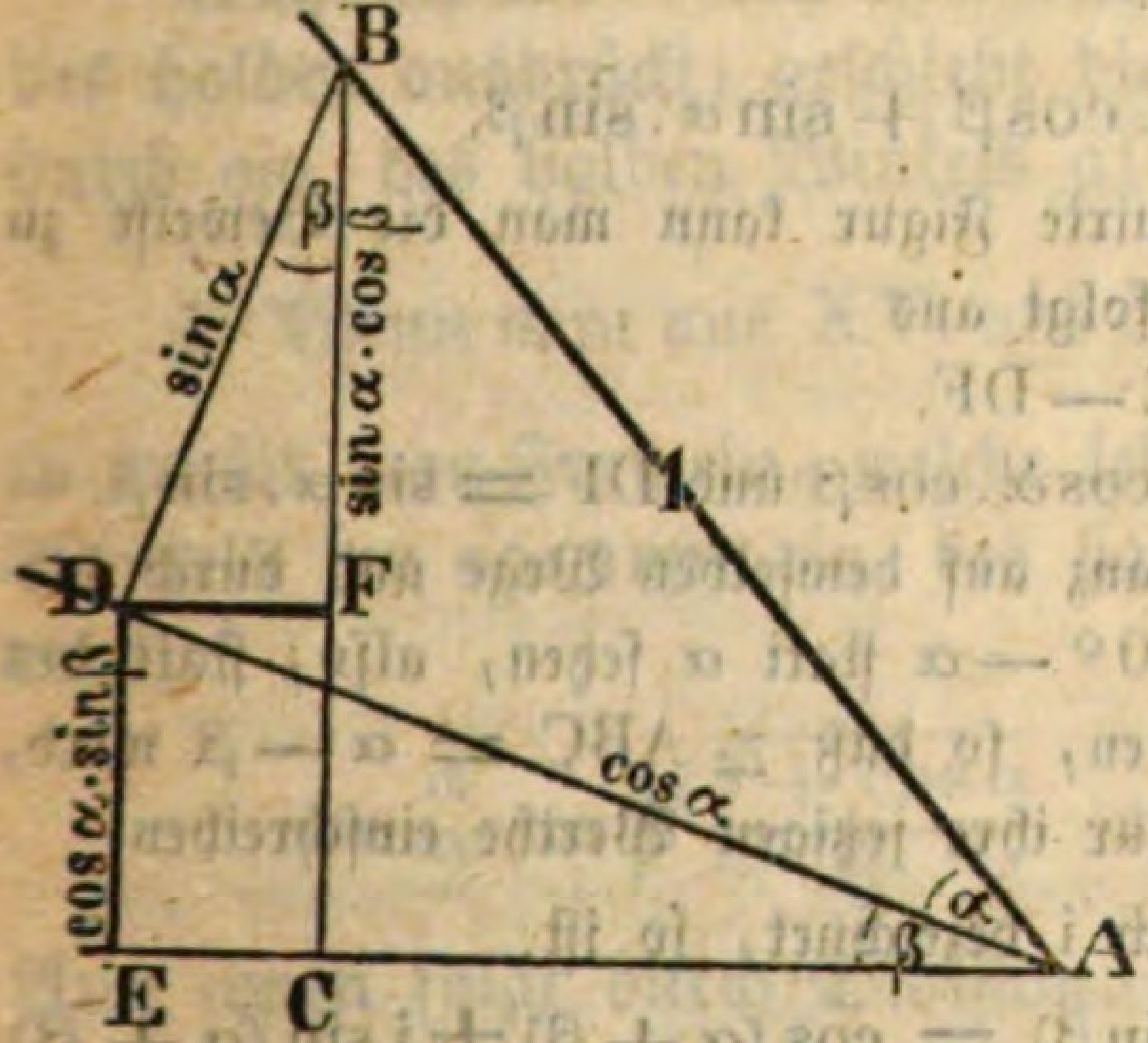
X. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta$.

XI. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta$.

XII. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta$.

Diese Formeln lehren, wie man den sin. und cos. der Summe und Differenz zweier Winkel durch die sin. und cos. der einzelnen Winkel bestimmen kann; IX. und X. setzen voraus, daß $\alpha + \beta < 90°$ ist, XI. und XII. aber, daß $\alpha > \beta$ ist. — Diese vier Sätze stehen in so engem Zusammenhange mit einander, daß aus der Richtigkeit eines derselben die Richtigkeit der drei übrigen schon aus Formel VI. und aus dem in §. 208. Nr. 3. angegebenen, unmittelbar aus der Erklärung der Functionen hervorgehenden Gesetze folgt.

Beweis zu IX. Zum Beweise brauchen wir drei rechtwinklige Dreiecke, welche resp. $\alpha + \beta$, α und β enthalten; wir werden diese Dreiecke so zu construiren suchen, daß sie sich an einander anschließen.



Es sei $\measuredangle BAD = \alpha$, $\measuredangle DAE = \beta$. B sei ein beliebiger Punkt in AB; man fälle $BC \perp AE$, $BD \perp AD$, $DE \perp AE$ und $DF \perp BC$. Nimmt man nun AB als die Längeneinheit, setzt also $AB = 1$, so ist $BC = \sin(\alpha + \beta)$, $BD = \sin\alpha$, $AD = \cos\alpha$. Nun ist $\measuredangle DBF = \measuredangle DAE$ (als Complemente gleicher Scheitelwinkel), also $\measuredangle DBF = \beta$; daher $BF = \sin\alpha \,.\, \cos\beta$. Endlich ist noch $DE = \cos\alpha \,.\, \sin\beta$.

Aus der Gleichung

$$BC = BF + DE$$

folgt aber, wie man unmittelbar aus der Figur ablesen kann:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta.$$

Beweis zu X. Es ist nach Formel VI.:

$$\cos(\alpha + \beta)^2 = 1 - \sin(\alpha + \beta)^2;$$ daher aus IX.:

$$\cos(\alpha + \beta)^2 = 1 - (\sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta)^2.$$

Setzt man noch nach VI. $\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2$ statt 1, so folgt:

$$\cos(\alpha+\beta)^2 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 - \sin\alpha^2 \cos\beta^2 - \cos\alpha^2 \sin\beta^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta.$$

$$= \cos\alpha^2(1 - \sin\beta^2) + \sin\alpha^2(1 - \cos\beta^2) - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta.$$

$$= (\cos\alpha . \cos\beta)^2 + (\sin\alpha . \sin\beta)^2 - 2\cos\alpha\cos\beta \times \sin\alpha\sin\beta.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so entsteht:

$$\cos(\alpha + \beta) = \pm(\cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta).$$

Welches Vorzeichen ist aber das richtige? Denkt man sich α und β immer kleiner und kleiner werdend, so nähert sich die linke Seite der Grenze 1 (§. 209.), die rechte Seite aber der Grenze ± 1; folglich kann nur das Vorzeichen + gelten.

Beweis zu XI. Setzt man in X. $90° - \alpha$ statt α, so folgt:

$$\cos(90° - \alpha + \beta) = \cos(90° - \alpha) . \cos\beta - \sin(90° - \alpha) . \sin\beta.$$

Es ist aber $\cos(90° - \alpha + \beta) = \cos[90° - (\alpha - \beta)] = \sin(\alpha - \beta)$; eben so ist $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ und $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

Man erhält daher:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta.$$

Beweis zu XII. Setzt man in IX. $90° - \alpha$ statt α, so folgt:

$$\sin(90° - \alpha + \beta) = \sin(90° - \alpha)\cos\beta + \cos(90° - \alpha) . \sin\beta.$$

Es ist aber $\sin(90° - \alpha + \beta) = \sin[90° - (\alpha - \beta)] = \cos(\alpha - \beta)$; daher folgt, wie oben:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta.$$

Anmerk. Durch die oben construirte Figur kann man die Beweise zu X. bis XII. so führen: Der Satz X. folgt aus

$$AC = AE - DF.$$

Es ist aber $AC = \cos(\alpha + \beta)$; $AE = \cos\alpha . \cos\beta$ und $DF = \sin\alpha . \sin\beta$. — Die Gesetze XI. und XII. werden ganz auf demselben Wege und durch dieselben Linien bewiesen; man muß nur $90° - \alpha$ statt α setzen, also, statt des $\measuredangle BAD$, den $\measuredangle ABD$ durch α bezeichnen, so daß $\measuredangle ABC = \alpha - \beta$ wird, und nun in die einzelnen Linien der Figur ihre jetzigen Werthe einschreiben.

Zur Uebung. Wird $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet, so ist:

1) $(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)(\cos\beta \pm i \sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) \pm i \sin(\alpha + \beta)$.

2) $(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha \pm i \sin 2\alpha$ [folgt aus 1)].

3) $(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha \pm i \sin 3\alpha$ [folgt aus 2) und 1)].

Multiplicirt man beide Seiten wiederholt mit $\cos\alpha \pm i \sin\alpha$, so folgt

$$(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha.$$

§. 215.

Formeln zwischen sin. und cos. eines Winkels und seiner Hälfte.

1) Setzt man in IX. $\beta = \alpha$, so folgt:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha . \cos\alpha.$$

Setzt man in diese Formel $\frac{\alpha}{2}$ statt α, so folgt:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Es soll dies auch bei den nächsten Formeln geschehen, ohne daß besonders darauf aufmerksam gemacht werden wird. Wir haben also:

XIII. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha . \cos\alpha$ oder $\sin\alpha = 2.\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

2) Setzt man in X. $\beta = \alpha$, so folgt:

XIV. $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$ oder $\cos\alpha = \cos\frac{\alpha^2}{2} - \sin\frac{\alpha^2}{2}$.

3) Wenn man die beiden Gleichungen

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 \text{ und}$$
$$1 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2$$

durch Addition und dann durch Subtraction verbindet, so folgt:

XV. $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1$ oder $\cos\alpha = 2\cos\frac{\alpha^2}{2} - 1$.

XVI. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha^2$ oder $\cos\alpha = 1 - 2\sin\frac{\alpha^2}{2}$.

Während XIV. den cos. eines Winkels durch den cos. und sin. des halben ausdrückt, geschieht dies in XV. durch den cos., in XVI. durch sin. des halben Winkels allein.

4) Wenn man aus XV. und XVI. $\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\alpha}{2}$ entwickelt, so erhält man Formeln, welche lehren, wie man aus dem cos. eines Winkels den cos. und sin. des halben Winkels berechnen kann. Man erhält:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \text{ und } \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Aus ihnen folgt durch Division:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \text{ und } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Es war z. B. $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Hieraus folgt:

$\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\operatorname{cotg} 15^\circ = 2+\sqrt{3}$; $\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

5) Von Wichtigkeit ist in der Trigonometrie die Verwandlung von Summen und Differenzen in Producte; man braucht sie sowohl zur Umformung und Vereinfachung trigonometrischer Ausdrücke, als auch zur bequemeren logarithmischen Berechnung. Die Formeln XV. und XVI. geben diese Verwandlung für

$$1 \pm \cos\alpha \quad \text{und} \quad 1 \pm \sin\alpha;$$

denn aus ihnen folgt:

$$1+\cos\alpha = 2\cos\frac{\alpha^2}{2} \quad \text{und} \quad 1-\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha^2}{2}.$$

Um $1 \pm \sin\alpha$ in ein Product zu verwandeln, setze man $\cos(90^\circ-\alpha)$ statt $\sin\alpha$.

z. B. $1+\cos 25^\circ = 2.(\cos 12^\circ\, 30')^2$; $1-\cos 74^\circ\, 20' = 2.(\sin 37^\circ\, 10')^2$;
$1+\sin 44^\circ = 1+\cos 46^\circ = 2.(\cos 23^\circ)^2$;
$1-\sin 62^\circ\, 33'\, 12'' = 1-\cos 27^\circ\, 26'\, 48'' = 2.(\sin 13^\circ\, 43'\, 24'')^2$.

Anmerk. Aus den Formeln IX., XIII. und XIV. und aus X., XIII. und XIV. findet man, wenn man $3\alpha = \alpha + 2\alpha$ setzt:

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha . \cos\alpha^2 - \sin\alpha^3 = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$.

2) $\cos 3\alpha = \cos\alpha^3 - 3\cos\alpha . \sin\alpha^2 = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha$.

§. 216.

Wenn man die Formeln IX. und XI. mit einander multiplicirt, so folgt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha^2.\cos\beta^2 - \cos\alpha^2.\sin\beta^2\\ &= \sin\alpha^2(1-\sin\beta^2) - (1-\sin\alpha^2)\sin\beta^2\\ &= \sin\alpha^2 - \sin\beta^2\\ \text{oder } &= 1-\cos\alpha^2 - (1-\cos\beta^2)\\ &= \cos\beta^2 - \cos\alpha^2; \text{ daher}\end{aligned}$$

$$\text{XVII.}\quad \sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) = \begin{cases}\sin\alpha^2 - \sin\beta^2 \text{ oder}\\ \cos\beta^2 - \cos\alpha^2.\end{cases}$$

Auf dieselbe Weise folgt aus X. und XII.:

$$\text{XVIII.}\quad \cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) = \begin{cases}\cos\alpha^2 - \sin\beta^2 \text{ oder}\\ \cos\beta^2 - \sin\alpha^2.\end{cases}$$

§. 217.

Formeln zur Verwandlung der Summe oder Differenz zweier sin. oder cos. in ein Product.

Es war $\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$
$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$$

Wenn man die ersten beiden Gleichungen durch Addition und Subtraction verbindet, und dann auch die letzten beiden, so folgt:

(1.) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x . \cos y$
(2.) $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x . \sin y$
(3.) $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x . \cos y$
(4.) $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x . \sin y$

Setzt man nun: $x+y=\alpha$
$x-y=\beta$, so folgt

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ und } y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Substituirt man diese Werthe in (1.)—(4.), so folgt:

XIX. $\sin\alpha + \sin\beta = 2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

XX. $\sin\alpha - \sin\beta = 2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

XXI. $\cos\alpha + \cos\beta = 2.\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

XXII. $\cos\beta - \cos\alpha = 2.\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Um $\sin\alpha \pm \cos\beta$ in ein Product zu verwandeln, kann man $\cos(90^\circ-\alpha)$ statt $\sin\alpha$, oder $\sin(90^\circ-\beta)$ statt $\cos\beta$ setzen.

z. B. 1) $\sin 30^\circ + \sin 10^\circ = 2\sin 20^\circ . \cos 10^\circ$.
2) $\sin 80^\circ - \sin 55^\circ = 2\cos 67^\circ\, 30' . \sin 12^\circ\, 30'$.
3) $\cos 32^\circ + \cos 50^\circ\, 12' = 2\cos 41^\circ\, 6' . \cos 9^\circ\, 6'$.
4) $\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\, 30'\, 30'' = 2\sin 40^\circ\, 15'\, 15'' . \sin 20^\circ\, 15'\, 15''$.
5) $\sin 18^\circ + \cos 54^\circ = 2\sin 27^\circ . \cos 9^\circ$
6) $\cos 18^\circ - \sin 12^\circ = \cos 42^\circ$.
7) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}.\cos(45^\circ-\alpha)$ oder $= \sqrt{2}.\cos(\alpha-45^\circ)$, je nachdem $45^\circ \gtrless \alpha$ ist. (Man kann links die Summanden vertauschen.)
8) $\cos\gamma + \cos(\gamma+2\delta) = 2\cos(\gamma+\delta) . \cos\delta$.

Zusatz. Wenn man XIX. durch XX. dividirt, so erhält man noch:

$$\sin\alpha+\sin\beta : \sin\alpha-\sin\beta = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Dividirt man Vorder- und Hinterglied der rechten Seite durch $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \times \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, so entsteht:

$$\text{XXIII.}\quad \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

§. 218.

Aus $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta}$

folgt, wenn man rechts Zähler und Nenner durch $\cos\alpha.\cos\beta$ dividirt:

$$\text{XXIV.}\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$:

$$\text{XXV.}\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}.$$

Setzt man in XXIV. $\beta = \alpha$, so erhält man noch:

$$\text{XXVI.}\quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha^2}.$$

Anm. Nimmt man von beiden Seiten dieser Gleichungen den reciproken Werth, so erhält man die analogen Formeln für cotg.; wenn man dann noch rechts Zähler und Nenner durch $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta$ dividirt, so treten auch rechts $\operatorname{cotg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\beta$ statt $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ ein. Man erhält so:

$$1)\quad \operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta};$$

$$2)\quad \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha};$$

$$3)\quad \operatorname{cotg}2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha^2 - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Zur Uebung. Es sei gegeben: $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ und $\cos\beta = \dfrac{12}{13}$.

Man findet dann: $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{56}{65}$; $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{33}{65}$;

$\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{16}{65}$; $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{63}{65}$; $\sin(2\alpha-2\beta) = \dfrac{2016}{4225}$;

$\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$; $\cos(2\alpha-2\beta) = \dfrac{3713}{4225}$; $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{8}{\sqrt{65}}$;

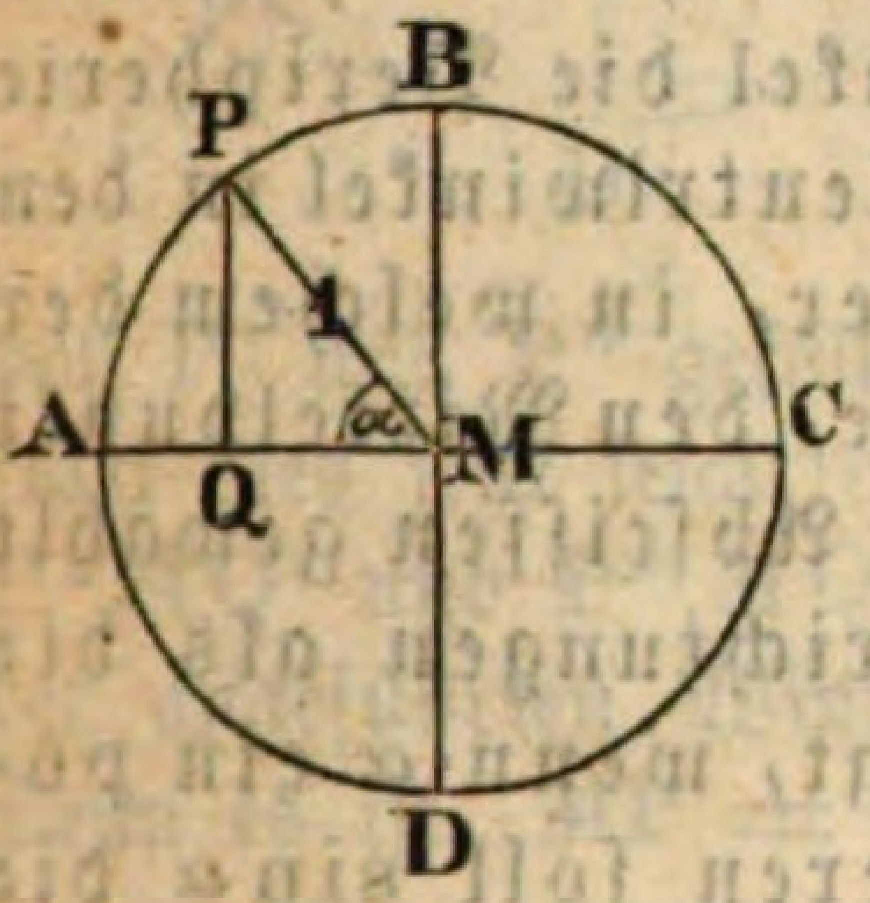
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{56}{33}$; $\operatorname{tg}(3\alpha-3\beta) = \dfrac{186\,416}{201\,663}$.

Von den trigonometrischen Functionen nicht spitzer und negativer Winkel.

§. 219.

Erklärung.

Der Kreis um M sei durch die auf einander senkrechten Durchmesser AC und BD in vier **Quadranten** zerlegt; wir nennen AMB den ersten, BMC den zweiten, CMD den dritten und DMA den vierten Quadranten. Der Centriwinkel AMP sei $= \alpha$; wir denken uns seinen Schenkel MA fest, den andern MP beweglich und sagen, α liege im 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Quadranten, je nachdem MP oder der Punkt P in einem dieser Quadranten liegt. Nehmen wir zuerst $\alpha = 0$, so fällt MP in MA und P in A. Lassen wir jetzt α stetig bis 360° wachsen, so durchläuft P alle stetig auf einander folgenden Punkte der Peripherie und fällt, wenn α gleich 90°, 180°, 270°, 360° ist, resp. in B, C, D, A. Durch α ist P und durch P ist α vollständig bestimmt. Es erscheinen aber hier α und MP als **Polar-Coordinaten des Punktes** P, von denen nur α veränderlich, MP aber immer der Radius, also constant ist. Wir können daher diesen Coordinaten auch negative Werthe beilegen, wollen dies aber nur in Bezug auf α thuen, und festsetzen, daß MP immer positiv sein soll. Dann kann P durch zwei Werthe von α bestimmt werden, von denen der eine positiv, der andere negativ ist, deren absolute Werthe sich aber zu 360° ergänzen. Der negative Winkel α ist dann an MA in der der Lage von α in der Figur entgegengesetzten Richtung anzutragen, so daß z. B. der negative stumpfe Winkel im dritten Quadranten liegt.



Der Punkt P kann aber auch durch **rechtwinklige Coordinaten** bestimmt werden. Nehmen wir AC als Abscissenlinie, M als Anfangspunkt der Abscissen, und fällen $PQ \perp AC$, so ist PQ die **Ordinate** und MQ die **Abscisse** des Punktes P.

So lange nun α ein spitzer Winkel ist, haben wir $PQ = MP . \sin \alpha$ und $MQ = MP . \cos \alpha$, und nehmen wir den Radius als Längeneinheit, setzen also $MP = 1$, so ist

$$PQ = \sin \alpha \text{ und } MQ = \cos \alpha,$$

d. h. **$\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ sind die auf den Radius als Längen-**

einheit bezogenen (unbenannten) Coordinatenwerthe des Punktes P. Diese Eigenschaft der Functionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ gestattet aber unmittelbar ihre Ausdehnung auf alle beliebigen Winkel, weil zu jedem beliebigen Winkel nur ein Punkt P gehört, dieser aber eine bestimmte Ordinate und eine bestimmte Abscisse hat. Wir geben sonach folgende Erklärung:

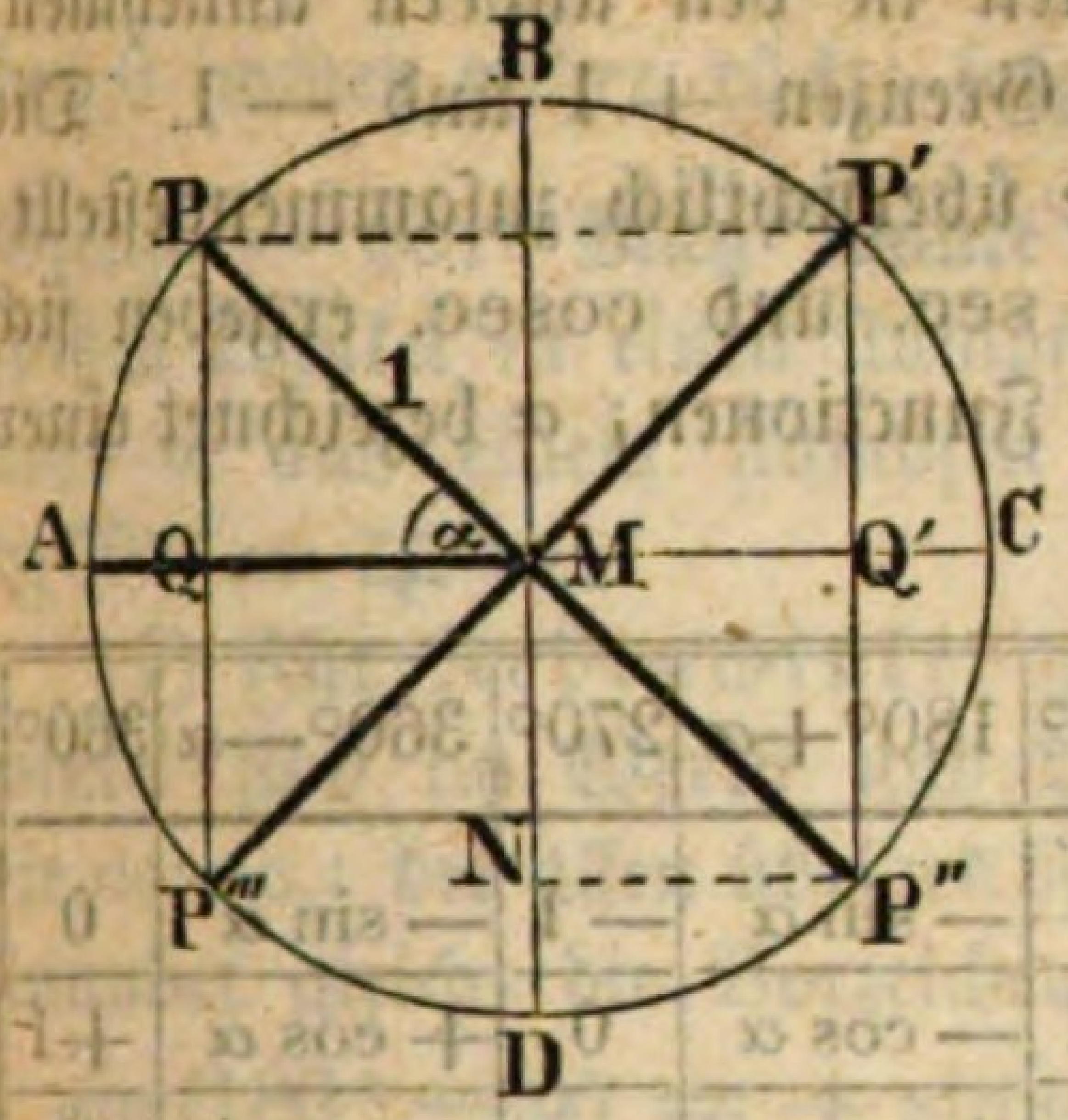
Für jeden beliebigen positiven oder negativen Winkel α sollen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die unbenannten, auf den Radius als Längeneinheit bezogenen Coordinatenwerthe des Punktes P bezeichnen, in welchem der eine Schenkel die Peripherie des Kreises schneidet, wenn man α als Centriwinkel in den Kreis eingetragen und den Durchmesser, in welchem der andere Schenkel liegt, zur Abscissenlinie, den Mittelpunkt des Kreises aber zum Anfangspunkt der Abscissen gewählt hat, und wenn man die Coordinatenrichtungen als die positiven ansieht, welche die Figur zeigt, wenn α ein positiver spitzer Winkel ist; im Besonderen soll $\sin\alpha$ die Ordinate und $\cos\alpha$ die Abscisse bezeichnen. Ferner sollen auch bei dieser Erklärung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die Functionen $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ noch immer resp. die Quotienten $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\frac{1}{\cos\alpha}$ und $\frac{1}{\sin\alpha}$ bedeuten.

Will man die Functionen verschiedener Winkel mit einander vergleichen, so muß man jeden als Centriwinkel in den Kreis eintragen. Es ist hierbei durchaus nicht nothwendig, daß man den einen Schenkel aller Winkel in denselben Radius (MA) legt; aber man wird dies (einzelne Fälle ausgenommen) immer thuen, weil dadurch die Untersuchung an Einfachheit und Klarheit gewinnt.

§. 220.

Folgerungen für die Functionen positiver Winkel.

Nach der im vorigen §. gegebenen Erklärung erkennt man unmittelbar aus der Figur, daß verschiedene Winkel, welche aber in demselben Quadranten liegen, auch verschiedene sin. und verschiedene cos. haben; man erkennt aber auch leicht, daß der absolute Werth des sin. und cos. eines Winkels im 2ten, 3ten, 4ten Quadranten dem Werthe resp. des sin. und cos. eines Winkels im 1ten Quadranten gleich ist; nur das aus der Lage der Coordinaten entspringende Vorzeichen ist nicht immer dasselbe.



Ist $\measuredangle AMP = \alpha$ ein Winkel im ersten Quadranten, und zieht man $PP' \mp AC$, von P und P' aber die Durchmesser PP″ und P′P‴: so sind die Winkel AMP, AMP′ und die convexen AMP″ und AMP‴ solche 4 Winkel, für welchen die absoluten Werthe der sin. einander gleich sind, und auch die der cos. Fällt man nämlich von P, P′, P″ und P‴ Lothe auf AC, so fallen die Fußpunkte der von P und P‴, und dann auch der von P′ und P″ gefällte Lothe in einander, resp. in Q und Q′. Es folgt dies sehr leicht aus den congruenten Dreiecken PMQ, P′MQ′ P″MQ′ und P‴MQ, aus welchen dann auch die Gleichheit der sin. der angeführten Winkel folgt, und auch die Gleichheit ihrer cos. Denn es ist, MP = 1 vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} \sin AMP &= PQ \; ; & \cos AMP &= MQ; \\ \sin AMP' &= P'Q' \; ; & \cos AMP' &= MQ'; \\ \sin AMP'' &= P''Q' \; ; & \cos AMP'' &= MQ'; \\ \sin AMP''' &= P'''Q \; ; & \cos AMP''' &= MQ. \end{aligned}$$

Da aber nach der Construction

$$\measuredangle P'MC = \measuredangle P''MC = \measuredangle P'''MA = \alpha$$

ist, so folgt hieraus, daß die vier Winkel

$$\alpha, \quad 180^\circ - \alpha, \quad 180^\circ + \alpha, \quad 360^\circ - \alpha$$

die Eigenschaft haben, daß sowohl die absoluten Werthe ihrer sin., als auch die ihrer cos., folglich auch die absoluten Werthe ihrer übrigen Functionen einander gleich sind.

Was aber die Vorzeichen betrifft, so sind diese aus der Lage der Coordinaten zu entnehmen. Die Ordinaten des Punktes P liegen im 1ten und 2ten Quadranten oberhalb AC, im 3ten und 4ten unterhalb; die Abscissen im 1ten und 4ten Quadranten links von M, im 2ten und 3ten rechts. Da nun die Lage im 1ten Quadranten als ursprüngliche die positive ist, so haben sin. und cos. in den vier auf einander folgenden Quadranten folgende Vorzeichen:

sin.	+	+	—	—
cos.	+	—	—	+

Denkt man sich endlich α von 0° bis 360° wachsend, so ist leicht aus der Figur sowohl über das Wachsen und Fallen der Functionen sin. und cos. zu entscheiden, als auch über die Werthe, welche sie

beim Uebergange aus einem Quadranten in den andern annehmen. Beide Functionen liegen innerhalb der Grenzen $+1$ und -1. Die nachstehende Tabelle enthält das Gesagte übersichtlich zusammengestellt; die Werthe der Functionen tg., cotg., sec. und cosec. ergeben sich durch Division aus der Erklärung dieser Functionen; α bezeichnet einen spitzen Winkel.

Winkel.	0°	α	90°	180°—α	180°	180°+α	270°	360°—α	360°
sin.	0	$+\sin\alpha$	$+1$	$+\sin\alpha$	0	$-\sin\alpha$	-1	$-\sin\alpha$	0
cos.	$+1$	$+\cos\alpha$	0	$-\cos\alpha$	-1	$-\cos\alpha$	0	$+\cos\alpha$	$+1$
tg.	0	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	∞	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	∞	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	0
cotg.	∞	$+\mathrm{cotg}\,\alpha$	0	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	∞	$+\mathrm{cotg}\,\alpha$	0	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	∞
sec.	$+1$	$+\sec\alpha$	∞	$-\sec\alpha$	-1	$-\sec\alpha$	∞	$+\sec\alpha$	$+1$
cosec.	∞	$+\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+1$	$+\mathrm{cosec}\,\alpha$	∞	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	-1	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	∞

§. 221.

Aus der vorstehenden Tabelle und der ihr zum Grunde liegenden Figur entnehmen wir nun Folgendes:

1) Durchläuft α alle Werthe von 0° bis 360°, so wechselt jede Function an der Stelle ihr Vorzeichen, wo sie den Werth 0 oder ∞ annimmt. Solche zwei Functionen haben in jedem Quadranten gleiche Vorzeichen, deren Product $= 1$ ist (§. 208. Nr. 1.); diese Vorzeichen sind aber in der Folge der Quadranten:

sin.	und	cosec.	+	+	—	—
cos.	und	sec.	+	—	—	+
tg.	und	cotg.	+	—	+	—

2) Wenn eine Function ∞ wird, so springt sie immer entweder aus $+\infty$ in $-\infty$, oder aus $-\infty$ in $+\infty$ über. Um dies zu verstehen, muß man auf die Erklärung der Functionen zurückgehen und sich erinnern, daß ∞ einen Grenzwerth bedeutet. Nehmen wir z. B. tg 90°. Es ist $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Im 1ten Quadranten sind Zähler und Nenner positiv; nähert sich α dem Winkel 90°, so nähert sich $\sin\alpha$ dem Werthe $+1$; $\cos\alpha$ aber ist ein positiver ächter Bruch, der immer kleiner wird, und sich der Grenze 0 nähert. Hieraus folgt, daß $\mathrm{tg}\,\alpha$ sich der Grenze $+\infty$ nähert. Nehmen wir jetzt an, α sei ein stumpfer Winkel, der allmählich kleiner wird und sich dem Winkel 90° nähert: dann ist $\sin\alpha$ positiv und nähert sich dem Werthe $+1$; $\cos\alpha$ aber ist ein negativer ächter Bruch, dessen absoluter Werth

der 0 immer näher rückt; folglich nähert sich $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, d. h. $\mathrm{tg}\,\alpha$, der Grenze $-\infty$. Man könnte dies so andeuten: geht α aus einem spitzen Winkel in einen stumpfen über, so ist $\mathrm{tg}\,90° = \pm\infty$; geht aber α aus einem stumpfen Winkel in einen spitzen über, so ist $\mathrm{tg}\,90° = \mp\infty$.

3) Für Nebenwinkel gilt das Gesetz: Die sin. zweier Nebenwinkel sind im Werth und Vorzeichen einander gleich, und eben so die cosec.; bei allen übrigen Functionen sind nur die absoluten Werthe einander gleich, die Vorzeichen aber verschieden; also:

$$\sin(180° - \alpha) = +\sin\alpha \quad ; \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha \quad ; \quad \mathrm{cotg}(180° - \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$$
$$\sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha \quad ; \quad \mathrm{cosec}(180° - \alpha) = +\mathrm{cosec}\,\alpha.$$

4) In §. 209. fanden wir, daß alle trigonometrischen Functionen von α, wenn α von 0° bis 90° wächst, entweder nur wachsen, oder nur fallen. Dasselbe findet jetzt auch in jedem anderen Quadranten Statt. Für sin. und cos. kann man dies unmittelbar aus der Figur erkennen, für die übrigen Functionen aus ihrer Erklärung als Quotienten. In §. 223. wird aber auch diese Eigenschaft der Functionen für tg., cotg., sec. und cosec. aus der Anschauung einer Figur ersichtlich. Uebergänge aus Wachsen in Fallen, oder umgekehrt, finden daher nur Statt, wenn der Winkel der Function aus einem Quadranten in einen anderen übergeht. Da alle Functionen positiv und negativ sein können, so hat man jetzt folgende Grenzen für sie:

Es liegen die Werthe der Functionen

sin. und cos.	innerhalb der Grenzen	$+1$	und	-1,
tg. und cotg.	» » »	$+\infty$	»	$-\infty$,
sec. und cosec.	» » »	$+1$	»	$+\infty$,
	oder	-1	»	$-\infty$.

§. 222.
Die trigonometrischen Functionen negativer Winkel.

Trägt man in den Kreis um M zum Radius 1 zwei gleiche Winkel α als Centriwinkel in entgegengesetzter Lage ein (die Winkel AMP und AMP′), so daß beide den Radius MA zum festen Schenkel haben, und bezeichnet man denjenigen beider Winkel, welcher die Lage hat, in welcher wir bisher alle Winkel in den Kreis als Centriwinkel eintrugen, nämlich ∡AMP, durch $+\alpha$: so ist der andere ∡ AMP′ $= -\alpha$. Werden jetzt von P und P′ Perpendikel auf



AC gefällt, so fallen ihre Fußpunkte in einen Punkt Q zusammen. Da nun diese Perpendikel PQ und P'Q (die Ordinaten der Punkte P und P') gleiche Längen, aber entgegengesetzte Lage haben, während die Punkte P und P' ganz dieselbe Abscisse MQ haben: so erkennen wir, daß $\sin\alpha$ und $\sin(-\alpha)$ im Werthe gleich, im Vorzeichen verschieden sind, daß hingegen $\cos\alpha$ und $\cos(-\alpha)$ ganz übereinstimmen. Weil aber das Gesagte immer zutrifft, in welchem Quadranten auch α liegen mag (man zeichne nur die verschiedenen Fälle), so ist allgemein:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = +\cos\alpha.$$

Hieraus folgt aber noch:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha;$$
$$\sec(-\alpha) = +\sec\alpha; \quad \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Zusatz. Für jeden beliebigen Werth von α findet man noch die wichtigen Gleichungen:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = +\sin(90^\circ - \alpha) = +\cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Bew. Zum Beweise hat man nur nöthig, die Winkel $90^\circ + \alpha$ und $90^\circ - \alpha$ auf gewöhnliche Weise in den Kreis zum Radius 1 als Centriwinkel einzutragen und ihre sin. und cos. zu construiren. Benutzen wir die Figur in §. 220., und denken wir uns $\measuredangle$ BMP' $= \measuredangle$ BMP $= \alpha$ gemacht, so ist $\measuredangle$ AMP' $= 90^\circ + \alpha$ und $\measuredangle$ AMP $= 90^\circ - \alpha$; machen wir aber $\measuredangle$ BMP'' $= \measuredangle$ BMP''' $= \alpha$, so ist der convexe $\measuredangle$ AMP'' $= 90^\circ + \alpha$, und der negative $\measuredangle$ AMP''' $= 90^\circ - \alpha$. In diesen und in allen anderen Fällen findet man, daß die Durchschnittspunkte der veränderlichen Schenkel mit der Peripherie gleiche Abstände von dem Durchmesser AC haben und auf derselben Seite von AC liegen, und daß diese Durchschnittspunkte auch von dem Durchmesser BD gleich weit entfernt sind, aber auf verschiedenen Seiten von BD liegen. Hieraus folgt:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha), \text{ aber } \cos(90^\circ + \alpha) = -\cos(90^\circ - \alpha).$$

Daß aber $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ und $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ ist, ergiebt sich auch für jeden Werth von α aus der Figur; man muß nur beachten, daß, wenn man α an MB in der Richtung von B nach C hin anträgt, dann MB der unveränderliche, feste Schenkel des Winkels α ist, so daß $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als Coordinaten auf MB als Abscissenlinie und M als Anfangspunkt der Abscissen zu beziehen sind. Es ist also $\sin\alpha$ positiv oder negativ, je nachdem die Ordinate des Durchschnittspunktes des beweglichen Schenkels von α mit der Peripherie rechts oder links von BD liegt, und $\cos\alpha$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Abscisse dieses Punktes oberhalb oder unterhalb M liegt. Für den Winkel $90^\circ + \alpha$ bleibt AM der feste Schenkel, so daß α und $90^\circ + \alpha$ verschiedene feste Schenkel, aber denselben veränderlichen Schenkel haben. Ist nun z. B. $\measuredangle$ BMP'' $= \alpha$, so ist der convexe Winkel AMP'' $= 90^\circ + \alpha$, und weil nun

$$P''Q' = NM \text{ und } MQ' = P''N$$

ist, so folgt:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha \text{ und } \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha;$$

denn $\sin(90° + \alpha)$ und $\cos\alpha$ sind in diesem Falle beide negativ; hingegen ist $\cos(90° + \alpha)$ negativ, aber $\sin\alpha$ positiv. Auf dieselbe Weise verfährt man bei jeder andern Größe des Winkels α. — Man kann übrigens auch α an MA antragen und noch α um 90° vergrößern; dann haben α und $90° + \alpha$ denselben festen Schenkel (MA), aber verschiedene bewegliche Schenkel. Der Leser möge auch auf diese Art den Beweis führen.

§. 223.

Anmerkung.

Auch die Functionen $tg\alpha$, $cotg\alpha$, $sec\alpha$ und $cosec\alpha$ kann man für jeden Werth des Winkels α durch Linien am Kreise zum Radius 1 zur Anschauung bringen; namentlich kann man das Wachsen und Fallen dieser Functionen, ihre Vorzeichen und die Werthe, welche sie beim Uebergange aus einem Quadranten in den andern oder bei einzelnen bestimmten Werthen von α annehmen, leicht aus der Figur erkennen.



Es sei der Radius des Kreises um M gleich 1, $\angle AMP = \alpha$, MA der feste, MP der bewegliche Schenkel dieses Winkels, so ist für jeden Werth von α:

1) $tg\alpha$ die im Endpunkte (A) des festen Schenkels auf diesen Schenkel errichtete und bis zum Durchschnittspunkt mit der Richtung des beweglichen Schenkels verlängerte Senkrechte; also $tg\alpha = AF$.

2) $sec\alpha$ ist der Theil der Richtung des beweglichen Schenkels, welcher zwischen dem Mittelpunkte M des Kreises und dem Durchschnittspunkte F mit $tg\alpha$ liegt; also $sec\alpha = MF$.

3) $cotg\alpha$ ist die im Endpunkte (B) des Radius, der den ersten Quadranten vom zweiten trennt, errichtete und bis zum Durchschnittspunkt mit der Richtung des beweglichen Schenkels verlängerte Senkrechte; also $cotg\alpha = BE$.

4) $cosec\alpha$ ist der Theil der Richtung des beweglichen Schenkels, welcher zwischen dem Mittelpunkte M des Kreises und dem Durchschnittspunkte E mit $cotg\alpha$ liegt; also $cosec\alpha = ME$.

Ist der Radius nicht gleich 1, so ist jede der angeführten Linien noch durch den Radius zu dividiren.

So lange α ein spitzer Winkel ist, ergiebt sich der **Beweis** unmittelbar aus §. 208. Nr. 2.; er kann aber auch in diesem Falle so geführt werden, daß er für jede beliebige Größe des Winkels α paßt.

Aus $\Delta FAM \backsim \Delta PQM$ folgt:

$$\frac{AF}{1} = \frac{QP}{QM} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\frac{MF}{1} = \frac{1}{MQ} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

Aus $\Delta EBM \backsim \Delta PNM$ folgt:

$$\frac{EB}{1} = \frac{PN}{NM} = \frac{QM}{PQ} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha;$$

$$\frac{ME}{1} = \frac{1}{MN} = \frac{1}{QP} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Die oben angegebene Construction der Linien, welche $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ zur Anschauung bringen, ist bei jeder Größe und Lage von α auszuführen (man construire nur genau dem Wortlaute nach), und für jeden Fall ist der Beweis, wie vorstehend, zu führen. Die Figur zeigt noch den stumpfen Winkel AMP'. Ist dieser gleich α, so ist $\operatorname{tg}\alpha = AF'$, $\sec\alpha = MF'$, $\operatorname{cotg}\alpha = BE'$ und $\operatorname{cosec}\alpha = ME'$. Der Beweis ist der vorstehende; man setze nur F' statt F, E' statt E, P' statt P und verstehe unter N und Q die Projectionen des Punktes P' auf resp. BD und AC.

Zum Erkennen der Vorzeichen der Functionen gilt die Regel: $\operatorname{tg}\alpha$ ist $+$ oder $-$, je nachdem AF oberhalb oder unterhalb AM liegt; $\operatorname{cotg}\alpha$ ist $+$ oder $-$, je nachdem BE links oder rechts von MB liegt. Was $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ betrifft, so bilden sie mit α die **Polar-Coordinaten** (§. 183. III.) der Punkte F und E; sie sind also $+$ oder $-$, je nachdem MF und ME in dem veränderlichen Schenkel selbst liegen, oder in seiner Verlängerung über M hinaus.

§. 224.

Lehrsatz.

Schneidet der bewegliche Schenkel des in den Kreis zum Radius 1 als Centriwinkel eingetragenen beliebigen Winkels α die Peripherie in P, und läßt man den beweglichen Schenkel im positiven oder negativen Sinne noch eine volle Umdrehung machen, d. h. vermehrt oder vermindert man α um $360°$: so nimmt P seine alte Stelle wieder ein, behält also seine Coordinaten. Hieraus folgt:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha \pm 360°) \text{ und } \cos\alpha = \cos(\alpha \pm 360°).$$

Da man aber fortfahren kann, den beweglichen Schenkel wiederholt eine volle Umdrehung machen zu lassen, so erhält man, wenn a eine positive ganze Zahl bezeichnet, das Gesetz:

$$1)\quad \sin\alpha = \sin(\alpha \pm a \,.\, 360^\circ)$$
$$2)\quad \cos\alpha = \cos(\alpha \pm a \,.\, 360^\circ).$$

Natürlich gilt nun dieses Gesetz auch für die übrigen Functionen.

§. 225.
Reduction der Functionen negativer oder nicht spitzer Winkel auf Functionen positiver spitzer Winkel.

Ist α ein positiver spitzer Winkel, so haben wir gefunden, daß die vier Winkel

$$\alpha,\quad 180^\circ - \alpha,\quad 180^\circ + \alpha,\quad 360^\circ - \alpha,$$

wenn man vom Vorzeichen absieht, gleiche sin., gleiche cos. u. s. w. haben. Es fragt sich nun, wie findet man zu einem nicht spitzen Winkel den zugehörigen spitzen, welcher, vom Vorzeichen abgesehen, denselben sin., cos. u. s. w. hat. Es folgt aber

aus $180^\circ - \alpha = \delta$, daß $\alpha = 180^\circ - \delta$ ist,
» $180^\circ + \alpha = \delta$, » $\alpha = \delta - 180^\circ$ »
» $360^\circ - \alpha = \delta$, » $\alpha = 360^\circ - \delta$ ».

Hieraus und aus den in den vorhergehenden §§. entwickelten Gesetzen ergiebt sich folgende Regel:

Jede Function eines negativen Winkels führt man zunächst auf die gleichnamige Function des positiven Winkels zurück. Ist dann der positive Winkel größer als 360°, so kann man, ohne die Function zu ändern, von dem Winkel 360° oder ein Vielfaches von 360° abziehen. Jetzt hat man einen positiven Winkel innerhalb der ersten vier Quadranten. Um nun den zugehörigen spitzen Winkel zu finden, verfährt man so:

1) ist der Winkel stumpf, so zieht man ihn von 180° ab (man nimmt den Nebenwinkel);
2) liegt der Winkel im 3ten Quadranten, so zieht man 180° von ihm ab;
3) liegt er im 4ten Quadranten, so zieht man ihn von 360° ab.

Diesen spitzen Winkel setzt man jetzt an die Stelle des Winkels, der reducirt werden sollte, nimmt von diesem Winkel also die gleichnamige Function, und bestimmt endlich noch das richtige Vorzeichen.

z. B. Gegeben $\operatorname{tg}(-644^\circ\ 12'\ 17'')$.

Reduction. $\operatorname{tg}(-644^\circ\ 12'\ 17'') = -\operatorname{tg} 644^\circ\ 12'\ 17''$
$= -\operatorname{tg} 284^\circ\ 12'\ 17''$.

Da 284° 12′ 17″ im 4ten Quadranten liegt, so hat man die Subtraction:

$$\begin{array}{r} 359°\ 59'\ 60'' \\ 284°\ 12'\ 17'', \text{ subtrahirt:} \\ \hline 75°\ 47'\ 43''. \end{array}$$

Es ist daher, weil tg. im 4ten Quadranten das Vorzeichen — hat:

$$\text{tg}(-644°\ 12'\ 17'') = -[-\text{tg}\,75°\ 47'\ 43'']$$
$$= +\text{tg}\,75°\ 47'\ 43''.$$

Eben so findet man: $\sin 130° = \sin 50°$; $\cos 124° = -\cos 56°$; $\text{tg}\,170° = -\text{tg}\,10°$; $\sec 100° = -\sec 80°$; $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$; $\text{tg}\,200° = \text{tg}\,20°$; $\sec 300° = \sec 60°$; $\text{cosec}\,225° = -\sqrt{2}$; $\sin(-260°) = \sin 80°$; $\cos 305°\ 7'\ 12'' = \cos 54°\ 52'\ 48''$; $\cos(-106°) = -\cos 74°$; $\text{cotg}(-106°) = \text{cotg}\,74°$; $\sec(-500°) = -\sec 40°$; $\text{cotg}\,94°\ 12'\ 10'' = -\text{cotg}\,85°\ 47'\ 50''$.

§. 226.

Lehrsatz.

Alle für positive spitze Winkel bewiesenen trigonometrischen Formeln gelten auch für ganz beliebige Winkel.

Beweis. Es fragt sich nur, ob folgende Formeln für beliebige Winkel richtig sind:

1) $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$;
2) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;
3) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$;

denn alle übrigen Formeln sind aus diesen mit Hülfe der Erklärungen der Functionen tg., cotg., sec. und cosec. (Formeln I. bis IV.), welche auch für beliebige Winkel beibehalten wurden, bewiesen worden. Allerdings haben wir die Formeln VII. und VIII. aus der Figur gefunden, aber in der Anmerkung zu diesen Formeln gezeigt, daß sie unmittelbar aus VI. folgen.

Zu 1). Die allgemeine Gültigkeit dieser Formel erkennt man sehr leicht. Man kann sin. und cos. eines beliebigen Winkels immer auf resp. sin. und cos. desselben spitzen Winkels α reduciren, nur werden die Vorzeichen + oder —. Es ist aber $(-\sin\alpha)^2 = \sin\alpha^2$ und $(-\cos\alpha)^2 = \cos\alpha^2$; daher gilt die Formel $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ganz allgemein.

Zu 2). Auch die Richtigkeit dieses Gesetzes ist leicht zu beweisen. Ist α ein beliebiger positiver Winkel, so fragt es sich, ob

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

ist. Es folgt dies aber aus dem Zusatz zu §. 222.

Nach demselben Gesetz ist aber auch:

$$\sin(-\alpha) = \cos(90° + \alpha) \text{ und } \cos(-\alpha) = \sin(90° + \alpha),$$

weil man $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ setzen kann.

Endlich ist noch

$$\sin(\alpha \pm a.360^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha \mp a.360^\circ) \text{ und}$$
$$\cos(\alpha \pm a.360^\circ) = \sin(90^\circ - \alpha \mp a.360^\circ);$$

denn man kann, ohne den Werth einer Function zu ändern, jeden Winkel um $a.360^\circ$ vermehren oder vermindern, wodurch diese Formeln auf die oben schon bewiesenen zurückzuführen sind.

Zu 3). Der Beweis dieses Gesetzes für beliebige Winkel ist zwar nicht schwierig, aber weitläufig, wenn man für alle Fälle den Beweis vollständig durchführen will. Nachstehend folgt die Uebersicht dieser Fälle, die Anleitung zu ihrem Beweise und der Beweis einzelner.

Bei dem Beweise von IX.: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ wurde vorausgesetzt, daß nicht nur α und β spitz sind, sondern auch $\alpha+\beta$ ein spitzer Winkel ist. Nehmen wir zuerst an, α und β sind spitz, aber $\alpha+\beta = 90^\circ$, so sind α und β Complements-Winkel, und IX. geht über in $1 = \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2$ und ist richtig.

Es kann ferner $\alpha+\beta$ stumpf sein, während α und β spitz sind. In diesem Falle ist

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin[(90^\circ-\alpha) + (90^\circ - \beta)].$$

Da jetzt $90^\circ - \alpha$ und $90^\circ - \beta$ spitz sind, aber auch ihre Summe es ist, so folgt

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\beta) + \cos(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)$$
$$= \cos\alpha.\sin\beta + \sin\alpha.\cos\beta;$$

also ist IX. auch für diesen Fall richtig.

Weiter ist IX. richtig, wenn man α gleich 0° oder 90°, β aber ganz beliebig annimmt; denn im ersten Falle geht sie in $\sin\beta = \sin\beta$ über, im zweiten in $\sin(90^\circ+\beta) = \cos\beta$, welche Gleichung nach §. 222. Zusatz. richtig ist.

Was die übrigen Fälle betrifft, so können zunächst α und β in den vier verschiedenen Quadranten liegen, oder Grenzwerthe dieser Quadranten sein. Im Falle ein Winkel im 2ten, 3ten, 4ten Quadranten liegt, gebe man ihm resp. die Form $180^\circ - \gamma$, $180^\circ + \gamma$, $360^\circ - \gamma$. Bezeichnen γ und δ spitze Winkel, so erhält man die nebenstehenden 9 Fälle, und setzt man auch noch γ oder $\delta = 0$, so hat man alle Fälle untersucht, in welchen α und β innerhalb der 4 ersten Quadranten liegen und positiv sind. Bei jedem Beweise verfahre man so: man schreibe die zu beweisende Formel hin und forme jede Seite so weit um, bis man nur Function der spitzen Winkel γ und δ hat; beide Seiten müssen dann mit einander übereinstimmen.

α	β
γ	$180^\circ - \delta$
γ	$180^\circ + \delta$
γ	$360^\circ - \delta$
$180^\circ - \gamma$	$180^\circ - \delta$
$180^\circ - \gamma$	$180^\circ + \delta$
$180^\circ - \gamma$	$360^\circ - \delta$
$180^\circ + \gamma$	$180^\circ + \delta$
$180^\circ + \gamma$	$360^\circ - \delta$
$360^\circ - \gamma$	$360^\circ - \delta$

Beisp. 1. α liege im 2ten, β im 4ten Quadranten.

Behaupt. $\sin[180^\circ - \gamma + 360^\circ - \delta] = \sin(180^\circ - \gamma)\cos(360^\circ - \delta)$
$+ \cos(180^\circ - \gamma)\sin(360^\circ - \delta)$.

Bew. Die linke Seite $= \sin(180° - \gamma - \delta)$ §. 224.

$= \sin[(90° - \gamma) + (90° - \delta)]$

$= \sin(90°-\gamma)\cos(90°-\delta) + \cos(90°-\gamma)\sin(90°-\delta)$

$= \cos\gamma \,.\, \sin\delta + \sin\gamma \,.\, \cos\delta$

die rechte Seite $= \sin\gamma \,.\, \cos\delta + (-\cos\gamma) \,.\, (-\sin\delta)$

$= \sin\gamma \,.\, \cos\delta + \cos\gamma \,.\, \sin\delta$.

Beisp. 2. α liege im 3ten, β im 4ten Quadranten.

Behaupt. $\sin[(180°+\gamma)+(360°-\delta)] = \sin(180°+\gamma)\cos(360°-\delta) + \cos(180°+\gamma)\sin(360°-\delta)$.

Bew. Die linke Seite $= \sin[180° + (\gamma - \delta)]$ §. 224. (wenn $\gamma > \delta$).

$= -\sin(\gamma - \delta)$

$= -\sin\gamma \,.\, \cos\delta + \cos\gamma \,.\, \sin\delta$

oder $= \sin[180° - (\delta - \gamma)]$ (wenn $\gamma < \delta$)

$= \sin(\delta - \gamma)$

$= \sin\delta \,.\, \cos\gamma - \cos\delta \,.\, \sin\gamma$

die rechte Seite $= (-\sin\gamma) \,.\, \cos\delta + (-\cos\gamma) \,.\, (-\sin\delta)$

$= -\sin\gamma \,.\, \cos\delta + \cos\gamma \,.\, \sin\delta$.

Wenn für alle Fälle der Beweis geführt ist, steht die Richtigkeit der Formel IX., und so auch aller übrigen Formeln, für beliebige positive Winkel innerhalb der ersten vier Quadranten fest. Vermehrt oder vermindert man aber die Winkel um ein Vielfaches von 360°, so folgt die Richtigkeit von IX. unmittelbar aus §. 224., z. B.

$$\sin[\gamma + (\delta \pm a.360°)] = \sin\gamma.\cos(\delta \pm a.360°) + \cos\gamma.\sin(\delta \pm a.360°)$$

Diese Gleichung geht nach dem angeführten Satz unmittelbar über in:

$$\sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma \,.\, \cos\delta + \cos\gamma \,.\, \sin\delta.$$

Hierin liegt aber auch der Beweis für negative Winkel; man kann aber auch für diese Winkel den Beweis unmittelbar führen, und würde nur zwei Fälle: ein Winkel ist negativ, oder beide sind es, unterscheiden müssen; z. B.

$$\sin(-\alpha - \beta) = \sin(-\alpha)\cos(-\beta) + \cos(-\alpha)\sin(-\beta).$$

Die Gleichung geht nach §. 222. über in:

$$-\sin(\alpha + \beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

und ist also richtig.

Anm. Durch die vorstehende Untersuchung ist die Richtigkeit der trigonometrischen Formeln für beliebige Winkel außer Zweifel gestellt; die in §. 229. folgende Entwicklung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ in Reihen giebt aber die Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit noch bündiger. In Beziehung hierauf möge der Leser die Untersuchungen im vorstehenden §. als eine sehr nöthige Uebung in der Anwendung und Einübung der trigonometrischen Gesetze ansehen.

§. 227.

Ueber die Bestimmung der Winkel durch ihre Functionen.

1) Durch einen gegebenen Winkel ist jede Function dieses Winkels eine einzige, bestimmte. So lange wir nur Functionen spitzer Winkel

kannten, gehörte auch umgekehrt zu jeder gegebenen Function nur **ein** bestimmter Winkel; seit wir die Functionen beliebiger Winkel eingeführt haben, ist dieser umgekehrte Schluß falsch. Zu jeder gegebenen Function gehören zunächst zwei positive Winkel, welche in zwei verschiedenen Quadranten zwischen $0°$ und $360°$ liegen; die Quadranten werden durch das Vorzeichen der Function bestimmt. Dann gehören zu der Function zwei negative Winkel, deren absolute Werthe die positiven Winkel zu $360°$ ergänzen; endlich aber kann jeder solcher Winkel noch um ein Vielfaches von $360°$ vermehrt oder vermindert werden. In so fern aber durch einen gesuchten Winkel, dessen Function gegeben ist, die Lage zweier Linien zu einander bestimmt werden soll, geben alle diese Winkel doch immer nur die zwei Lagen, welche durch die beiden positiven Winkel angezeigt werden. Wir ziehen deshalb künftig nur diese zwei positiven Winkel in Betracht und sehen die Fälle, in welchen die anderen Winkel auch zu berücksichtigen sind, als Ausnahmen an. Dann können wir sagen: **zu jeder gegebenen Function gehören zwei Winkel, deren Quadranten durch das Vorzeichen der Function bestimmt sind.**

2) Sind aber **zwei** Functionen eines Winkels bekannt, so ist der Winkel selbst in dem Falle völlig bestimmt, wenn diese Function in den 4 Quadranten nicht gleiche Vorzeichen haben, d. h. wenn nicht jede die Reciproke der andern ist. Der am häufigsten vorkommende Fall ist, wenn $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bekannt sind; α liegt dann in dem Quadranten, in welchem diese Functionen gerade die gegebenen Vorzeichen haben. Für diesen Fall gilt folgende Uebersicht:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	α liegt
+	+	im 1sten Quadranten
+	—	» 2ten »
—	+	» 4ten »
—	—	» 3ten »

Ausdrücklich sei bemerkt, daß zwei Functionen desselben Winkels nicht willkührlich gegeben werden können, da zwischen je zwei Functionen immer eine bestimmte Gleichung Statt findet, und daß es zur vollen Bestimmung des Winkels hinreicht, wenn eine Function gegeben, von der andern aber das Vorzeichen bekannt ist. z. B.

Es sei $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\sec\alpha$ positiv, so ist $\alpha = 330°$.

Bew. Es ist $\sin 30° = \frac{1}{2}$; läge also α im ersten Quadranten, so wäre $\alpha = 30°$. Nun sind die Vorzeichen vom sin. $++--$,
von der sec. $+--+$. Die gegebenen

Vorzeichen treffen also nur im 4ten Quadranten zu; folglich muß 30° auf den 4ten Quadranten reducirt werden. Es ist also $\alpha = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

Es sei $\operatorname{tg}\alpha = +1$ und $\cos\alpha$ negativ, so ist $\alpha = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$.

Es sei $\cos\alpha = 0$ und $\sin\alpha$ negativ, so ist $\alpha = 270^\circ$.

3) Häufig kommen Aufgaben vor, bei welchen ein gesuchter Winkel α nur innerhalb der Grenzen 0° und 180° liegen kann (z. B. wenn α ein Winkel eines Dreiecks ist); in diesem Falle ist α durch eine der Functionen $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ und $\sec\alpha$ völlig bestimmt, hingegen durch $\sin\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ nicht. Dies hat die Folge, daß man bei Bestimmung eines concaven Winkels sich der Function cos. lieber als der Function sin. bedient.

4) Die aus den Hauptformeln der Trigonometrie hervorgehenden Nebenformeln, in welchen Quadratwurzeln vorkommen, können bei beliebigen Winkeln nur mit Berücksichtigung des richtigen Vorzeichens gebraucht werden.

So ist z. B. die Formel $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ allgemein richtig; ist aber α ein stumpfer Winkel, so folgt $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin\alpha^2}$. Ist der Quadrant, in welchem α liegt, unbekannt, so schreibe man lieber $\pm$ vor die Wurzel; z. B. $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$.

5) Ist eine Function eines Winkels gegeben, und soll man die anderen finden, so kann man wie früher verfahren, muß aber die richtigen Vorzeichen vor die erhaltenen Werthe setzen.

Es sei z. B. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ und α stumpf, so ist $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{5}{12}$ und man kann nun alle Functionen von $180^\circ - \alpha$, etwa durch das rechtwinklige Dreieck, bestimmen. Man findet dann aus diesen Functionen: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{12}{5}$, $\sec\alpha = -\frac{13}{12}$ und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{5}$.

§. 228.

Gesetze.

In dem besonderen Falle, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist, z. B. wenn α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind, gelten folgende Formeln:

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

2) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\beta\,.\operatorname{tg}\gamma$.

Bew. zu 1). Es ist $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\beta + \gamma)$; folglich

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left[\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\, 2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \quad (\text{§. 217. XXI.}),$$

weil $\frac{\beta+\gamma}{2}$ das Complement von $\frac{\alpha}{2}$ ist.

Bew. zu 2). Es ist $-\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = +\operatorname{tg}\alpha$ (§. 221. Nr. 3.); folglich:

$$-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ daher}$$

$$-(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma) = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\beta\,.\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma.$$

Anmerkung. Auf ähnliche Weise beweist man, wenn $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ ist:

3) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

4) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Ferner ist noch bei der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma = 180°$:

5) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma = 4\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\sin\gamma$.

6) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

Nr. 5. folgt aus 1), wenn man $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma = \sin(180°-2\alpha) + \sin(180°-2\beta)+\sin(180°-2\gamma)$ setzt.

Nr. 6. folgt aus 2), wenn man $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(90°-\frac{\beta}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)$ setzt.

§. 229.

Entwicklung der Functionen sin α und cos α in Reihen.

Ein Winkel ist durch seinen Arcus bestimmt; daher setzt man hinter die trigonometrischen Functionen auch den Arcus des Winkels, anstatt diesen Winkel durch Grade, Minuten und Secunden auszudrücken. Man schreibt also auch $\sin\frac{\pi}{2}$ statt $\sin 90°$, $\operatorname{tg}\pi$ statt $\operatorname{tg} 180°$, $\cos\frac{\pi}{6}$ statt $\cos 30°$ u. s. w. Es ist sonach z. B. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\pi = -1$, $\operatorname{cotg}\pi = \infty$ u. s. w. Den Arcus eines beliebigen Winkels drückt man häufig durch einen Buchstaben aus: x, δ, auch α u. s. w. In der Gleichung $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ bezeichnet (der Verbindung mit π wegen) α einen Arcus.

Da der Arcus einen Winkel, dieser aber seinen sin. und cos. bestimmt, so kann man die Aufgabe stellen: sin. und cos. eines Winkels in Reihen zu verwandeln, die nach den Potenzen seines Arcus (der eine abstracte

Zahl ist) fortlaufen. Der nächste Zweck dieser Aufgabe ist, die Functionen sin. und cos. aller Winkel mittelst dieser Reihen zu berechnen; es ist aber oben schon angegeben worden, daß wir durch diese Reihen auch die Ueberzeugung von der allgemeinen Gültigkeit aller trigonometrischen Formeln erhalten.

Aufgabe. Es bezeichne x den Arcus eines beliebigen Winkels α; man soll $\sin x$ und $\cos x$ in Reihen verwandeln, welche nach den Potenzen von x fortlaufen.

Auflösung. Es sei $\measuredangle AMP = \alpha$, der Radius $MP = 1$, so ist der Bogen $AP = \operatorname{arc}\alpha = x$. Fällt man nun $PQ \perp MA$, so sind PQ und MQ die Coordinaten des Punktes P, und bezeichnet man PQ durch y und MQ durch x: so ist

$$(1.) \qquad y = \sin x \quad \text{und} \quad z = \cos x.$$

Da nun für $x = 0$, $y = 0$ und $z = 1$ ist, so setzt man:

$$(2.) \quad y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \ldots..$$

$$(3.) \quad z = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + \ldots..$$

Denkt man sich nun den Bogen x um ein kleines Stück PE vergrößert, bezeichnet den Bogen AE durch x_1 und fällt $EF \perp MA$: so sind EF und MF die Coordinaten des Punktes E; bezeichnet man EF durch y_1 und MF durch z_1, so folgt aus (2.) und (3.), weil diese Gleichungen für beliebige Werthe von x richtig sein sollen:

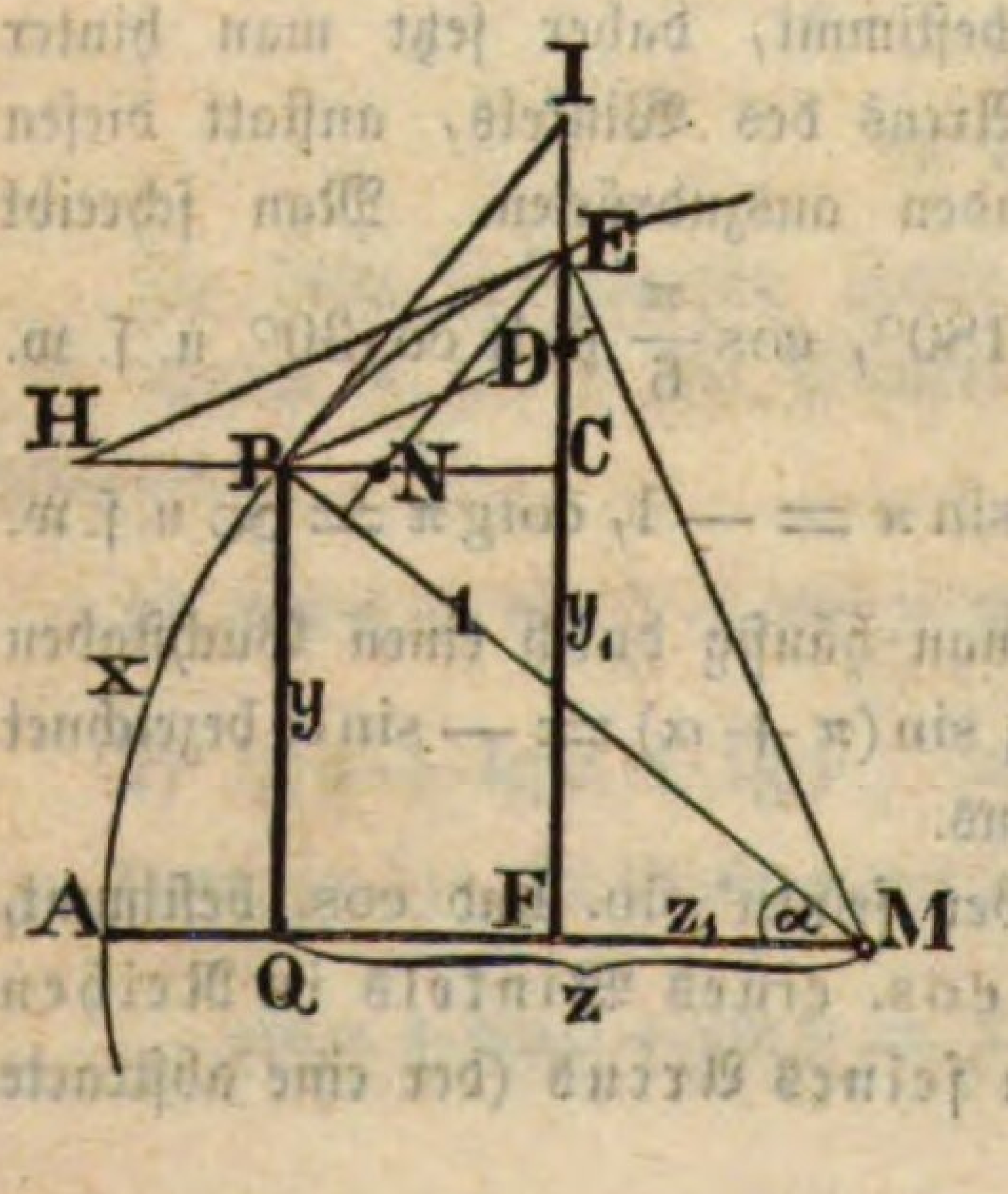
$$(4.) \quad y_1 = a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4 + a_5x_1^5 + a_6x_1^6 + \ldots..$$

$$(5.) \quad z_1 = 1 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3 + b_4x_1^4 + b_5x_1^5 + b_6x_1^6 + \ldots..$$

Zieht man jetzt (2.) von (4.) und auch (3.) von (5.) ab und dividirt jede der neuen Gleichungen durch $x_1 - x$, so erhält man:

$$(6.) \quad \frac{y_1-y}{x_1-x} = a_1 + a_2\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x} + a_3\frac{x_1^3-x^3}{x_1-x} + a_4\frac{x_1^4-x^4}{x_1-x} + a_5\frac{x_1^5-x^5}{x_1-x} + \ldots$$

$$(7.) \quad \frac{z_1-z}{x_1-x} = b_1 + b_2\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x} + b_3\frac{x_1^3-x^3}{x_1-x} + b_4\frac{x_1^4-x^4}{x_1-x} + b_5\frac{x_1^5-x^5}{x_1-x} + \ldots$$



Ferner ist, wenn man $PC \# AM$ zieht:

$$(8.) \quad \frac{y_1-y}{x_1-x} = \frac{EC}{EP}, \quad -\frac{z_1-z}{x_1-x} = \frac{PC}{PE}.$$

Es lassen sich aber in der Figur leicht Grenzen finden, zwischen welchen $\frac{EC}{EP}$ und $\frac{PC}{PE}$ liegen.

Errichtet man nämlich $EH \perp EM$, verlängert EH bis zu ihrem Durchschnittspunkt H mit der Richtung PC, und fällt von E eine Senkrechte auf

MP, welche PC in N schneidet; errichtet man ferner $PI \perp PM$, verlängert PI bis zu ihrem Durchschnittspunkte I mit der Richtung CE, und fällt noch von P eine Senkrechte auf ME, welche EC in D schneidet: so ist Bogen EP größer als EN und größer als PD (denn er ist größer als die Sehne EP), zugleich aber kleiner als EH und kleiner als PI (denn er ist kleiner als die Summe der Theile beider Linien, welche zwischen ihrem Durchschnittspunkte und den Berührungspunkten E und P liegen). Es folgt daher aus (8.)

$$(9.)\quad \frac{y_1-y}{x_1-x}\begin{cases}<\dfrac{EC}{EN}\\[2ex]>\dfrac{EC}{EH}\end{cases} \text{und} \quad -\frac{z_1-z}{x_1-x}\begin{cases}<\dfrac{PC}{PD}\\[2ex]>\dfrac{PC}{PI}\end{cases}.$$

Diese Grenzen sind aber auf bequemere zu reduciren. Es ist nämlich:

$$\Delta ECN \sim \Delta MQP; \quad \text{folglich} \quad \frac{EC}{EN} = \frac{MQ}{MP} = z$$

$$\Delta ECH \sim \Delta MFE; \quad \text{»} \quad \frac{EC}{EH} = \frac{MF}{ME} = z_1$$

$$\Delta PCD \sim \Delta EFM; \quad \text{»} \quad \frac{PC}{PD} = \frac{EF}{EM} = y_1$$

$$\Delta PCI \sim \Delta PQM; \quad \text{»} \quad \frac{PC}{PI} = \frac{PQ}{PM} = y.$$

Substituirt man diese Werthe in (9.) und setzt statt $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ und $\frac{z_1-z}{x_1-x}$ die Reihen aus (6.) und (7.), so folgt:

$$(10.)\quad a_1+a_2\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}+a_3\frac{x_1^3-x^3}{x_1-x}+a_4\frac{x_1^4-x^4}{x_1-x}+a_5\frac{x_1^5-x^5}{x_1-x}+\ldots\begin{cases}<z\\>z_1\end{cases}$$

$$(11.)\quad -\left[b_1+b_2\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}+b_3\frac{x_1^3-x^3}{x_1-x}+b_4\frac{x_1^4-x^4}{x_1-x}+b_5\frac{x_1^5-x^5}{x_1-x}+\ldots\right]\begin{cases}<y_1\\>y.\end{cases}$$

Jede dieser Reihen liegt zwischen zwei Grenzwerthen, von welchen der eine (z und y) von der Länge des Bogens PE unabhängig ist, der andere aber abhängig. Denkt man sich nun PE immer kleiner und kleiner werdend, so rücken die Grenzwerthe jeder Reihe immer näher an einander und fallen, wenn $PE = 0$ genommen wird, zusammen (resp. in z und y). Ist aber $PE = 0$, so ist $x_1 = x$, und die linke Seite jeder Gleichung wird ebenfalls von PE unabhängig; die einzelnen Quotienten erhalten, weil $\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right)_{x_1=x} = nx^{n-1}$ ist (Arithm. §. 92.), bestimmte von x abhängige Werthe. Es entsteht:

$$(12.)\quad a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots\ldots = z.$$

$$(13.)\ -[b_1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3+5b_5x^4+\ldots\ldots] = y.$$

Setzt man endlich statt z und y die Reihen aus (3.) und (2.), so folgt:

$$(14.)\ a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+7a_7x^6+\ldots\ldots$$
$$= 1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6+\ldots\ldots$$

$$(15.)\ -b_1-2b_2x-3b_3x^2-4b_4x^3-5b_5x^4-6b_6x^5-7b_7x^6-\ldots\ldots$$
$$= a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\ldots\ldots$$

Wendet man nun die Methode der unbestimmten Coefficienten an, so erhält man die Gleichungen:

$a_1 = 1$	und	$-b_1 = 0$;	folglich	$a_1 = 1$	und	$b_1 = 0$
$2a_2 = b_1$	»	$-2b_2 = a_1$	»	$a_2 = 0$	»	$b_2 = -\frac{1}{2}$
$3a_3 = b_2$	»	$-3b_3 = a_2$	»	$a_3 = -\frac{1}{3!}$	»	$b_3 = 0$
$4a_4 = b_3$	»	$-4b_4 = a_3$	»	$a_4 = 0$	»	$b_4 = +\frac{1}{4!}$
$5a_5 = b_4$	»	$-5b_5 = a_4$	»	$a_5 = +\frac{1}{5!}$	»	$b_5 = 0$
$6a_6 = b_5$	»	$-6b_6 = a_5$	»	$a_6 = 0$	»	$b_6 = -\frac{1}{6!}$
$7a_7 = b_6$	»	$-7b_7 = a_6$	»	$a_7 = -\frac{1}{7!}$	»	$b_7 = 0$
		u. s. w.				u. s. w.

Setzt man die gefundenen Werthe der Coefficienten in (2.) und (3.) ein, schreibt sin x statt y und cos x statt z, so folgt:

$$\text{XXVII.}\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - + \ldots\ldots$$

$$\text{XXVIII.}\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - + \ldots\ldots$$

Diese Reihen sind nun dieselben, welche in der Analysis (Arithm. §. 212.) mit cos x und sin x b e z e i c h n e t wurden; wir haben sonach die Untersuchung nicht zu führen, ob die Reihen convergiren, und ob sie wirklich allen Gesetzen der trigonometrischen Functionen sin x und cos x entsprechen, denn beides ist an jener Stelle geschehen; vielmehr giebt die vorstehende Entwicklung uns die volle Ueberzeugung, daß alle Formeln für beliebige Winkel richtig sind, und dient zugleich zur Begründung dessen, was in der Analysis von den Kreisfunctionen mit Rücksicht auf ihre Anwendung in der Geometrie gesagt worden ist. Auch über die Berechnung der trigonometrischen Functionen ist dort das Nöthige angegeben worden.

Anmerkung. In manchen practischen Fällen ist es wichtig, zu wissen, wie weit sin α mit arc α, cos α aber mit 1 übereinstimmt, wenn α ein nur kleiner Winkel ist. Die Entscheidung hierüber geschieht durch die Reihen

$$1)\ \sin\alpha = \operatorname{arc}\alpha - \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^3}{3!} + \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^5}{5!} - \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^7}{7!} + - + \ldots$$

$$2)\ \cos\alpha = 1 - \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^4}{4!} - \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^6}{6!} + - + \ldots$$

Für kleine Winkel ist arc α ein ächter Bruch, und in diesem Falle convergiren beide Reihen vom ersten Gliede an. Weil aber die Reihen auch abwechselnde Vorzeichen haben, so folgt hieraus (vergl. Arithm. §. 196. II. und §. 197.):

$$3)\ \sin\alpha \begin{cases} < \operatorname{arc}\alpha \\ > \operatorname{arc}\alpha - \dfrac{(\operatorname{arc}\alpha)^3}{3!}. \end{cases}$$

$$4)\ \cos\alpha \begin{cases} < 1 \\ > 1 - \dfrac{(\operatorname{arc}\alpha)^2}{2!}. \end{cases}$$

Aus 3) und 4) folgt nun:

5) Unterschied der Grenzen für sin α

$$= \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^3}{3!}.$$

6) Unterschied der Grenzen für cos α

$$= \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^2}{2!}.$$

Ist z. B. $\alpha = 1''$, so ist der Unterschied der Grenzen für sin 1″

$$= \frac{(\operatorname{arc}1'')^3}{3!} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,019\ldots$$

und für cos 1″

$$= \frac{(\operatorname{arc}1'')^2}{2!} = 0{,}000\,000\,000\,011\,761\ldots,$$

d. h. sin 1″ und arc 1″ weichen noch nicht um 2 Einheiten der 17ten Decimalstelle von einander ab, und cos 1″ und arc 1″ noch nicht um 12 Einheiten der 12ten Decimalstelle.

Nicht minder wichtig ist die Beantwortung der Frage, wie groß α höchstens sein darf, wenn sin α mit arc α, und cos α mit 1 auf eine bestimmte Anzahl Decimalstellen übereinstimmen soll. Auch diese Frage wird durch die oben gefundenen Grenzen beantwortet.

Soll sin α von arc α, und cos α von 1 noch nicht um eine Einheit der n^{ten} Decimalstelle abweichen, so muß der Unterschied der Grenzen kleiner als 10^{-n} sein. Hieraus folgt aber:

7) für sin α muß $\operatorname{arc}\alpha < \sqrt[3]{6.10^{-n}}$,

8) für $\cos\alpha$ muß $\operatorname{arc}\alpha < \sqrt{2 \cdot 10^{-n}}$

sein. Soll z. B. $\sin\alpha$ von $\operatorname{arc}\alpha$, und $\cos\alpha$ von 1 noch nicht um eine Einheit der 6ten Decimalstelle abweichen, so ist für $\sin\alpha$:

$$\operatorname{arc}\alpha < 0{,}018171206;\ \alpha < 1^\circ\ 2'\ 28'',$$

und für $\cos\alpha$:

$$\operatorname{arc}\alpha < 0{,}0014142136;\ \alpha < 4'\ 51''.$$

Es weicht also $\sin 1^\circ\ 2'\ 27''$ von $\operatorname{arc} 1^\circ\ 2'\ 27''$ noch nicht um eine Einheit der 6ten Decimalstelle ab, d. h. diese Zahlen stimmen in den ersten 6 Decimalstellen mit einander so weit überein, daß ihre 6ten Decimalziffern höchstens um 1 von einander abweichen können; denn eine größere Abweichung würde durch die nachfolgenden Ziffern nicht so ausgeglichen werden können, daß der Unterschied beider Zahlen noch nicht eine Einheit der 6ten Decimalstelle ausmacht. — Das Gesagte gilt eben so von $\cos 4'\ 50''$ und 1; nur muß man sich 1 in der Form des periodischen Decimalbruches 0,9999999.... denken. Hierbei muß aber $\cos 4'\ 50''$ auf 6 Decimalstellen vollständig übereinstimmen mit 0,9999999...., weil spätere Ziffern eine Ausgleichung nicht bewirken können.

Die Untersuchung, wie weit $\operatorname{tg}\alpha$ mit $\operatorname{arc}\alpha$ übereinstimmt für kleine Werthe von α, ist aus $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ zu beurtheilen. (Vergl. Arithm. §. 102. II. Nr. 4.)

§. 230.

Die Logarithmen der trigonometrischen Functionen.

Die Einrichtung jeder Logarithmentafel ist aus ihr selbst zu entnehmen; hier soll nur das Wichtigste hervorgehoben werden. Es wird hauptsächlich auf die Vega'schen Logarithmentafeln Bezug genommen werden, durch welche alle Rechnungen in diesem Buche ausgeführt worden sind.

Da für Winkel im ersten Quadranten alle trigonometrischen Functionen positiv sind, so sind ihre Briggischen Logarithmen (und auch ihre natürlichen) reell. Die Tafeln enthalten nur die Logarithmen der Functionen sin., cos., tg. und cotg. Da sec. und cosec. die Reciproken von cos. und sin. sind, so ist

$$\log \sec\alpha = -\log\cos\alpha,\quad \log \operatorname{cosec}\alpha = -\log\sin\alpha.$$

Weil nun $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ immer ächte Brüche sind, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ zur Hälfte, nämlich wenn α resp. kleiner und größer als 45° ist, so haben die Logarithmen der trigonometrischen Functionen überwiegend eine negative Characteristik. Um nun den Druck der Tafeln zu vereinfachen, ist jeder Logarithmus auf die negative Characteristik —10 gebracht, diese aber beim Drucke fortgelassen worden; sie ist also bei dem Abschreiben des Logarithmus hinzuzufügen. So ist z. B.

$$\log \sin 33^\circ\ 51' = 0{,}7458712 - 1$$

$$\text{und}\quad \log \operatorname{cotg} 3^\circ\ 12' = 1{,}2525208.$$

Bringt man jeden Logarithmus auf die negative Characteristik -10, so folgt:

$$\log\sin 33^\circ\ 51' = 9{,}7458712 - 10.$$
und $$\log\operatorname{cotg} 3^\circ\ 12' = 11{,}2525208 - 10.$$

In den Tafeln steht sonach:

$$\log\sin 33^\circ\ 51' = 9{,}7458712$$
$$\log\operatorname{cotg} 3^\circ\ 12' = 11{,}2525208.$$

In den von Bremiker bearbeiteten Vega'schen Tafeln ist aber, wenn die positive Characteristik eine zweiziffrige Zahl ist, die erste Ziffer (immer eine 1) auch fortgelassen worden, so daß der abgedruckte Logarithmus in diesem Falle dem reducirten gleich ist. Dem Anfänger wenigstens ist zur Vermeidung von Fehlern zu rathen, diese 1 und dann noch -10 beim Abschreiben hinzuzufügen.

Da $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ und $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha)$ ist, so folgt: $\log\sin\alpha = \log\cos(90^\circ - \alpha)$ und $\log\operatorname{tg}\alpha = \log\operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha)$. Hieraus erklärt sich die Einrichtung der Tafeln, nach welcher jeder Logarithmus zu zwei Winkeln gehört, welche zusammen 90° betragen; ist er von dem einen Winkel der log sin. oder log tg., so ist er vom andern resp. log cos. oder log cotg. Diese Winkel sind so gedruckt, daß die Grade oben und unten auf jeder Seite stehen, die Minuten und Secunden resp. links und rechts; die Function des Winkels steht resp. über und unter jeder verticalen Columne. z. B.

$$9{,}0107537 - 10 = \log\operatorname{tg} 5^\circ\ 51'\ 10'' = \log\operatorname{cotg} 84^\circ\ 8'\ 50''.$$

Das Interpoliren.

Im ersten Quadraten wachsen mit dem Winkel α auch die Functionen $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$, hingegen fallen $\cos\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$. Hieraus folgt:

$\log\sin\alpha$ und $\log\operatorname{tg}\alpha$ werden größer, wenn α wächst;
$\log\cos\alpha$ und $\log\operatorname{cotg}\alpha$ werden kleiner, wenn α wächst.

Die älteren Tafeln von Vega enthalten die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Minute zu Minute; Secunden müssen interpolirt werden. Es werde z. B. gesucht $\log\sin 24^\circ\ 28'\ 36''$. In den Tafeln findet man

$$\log\sin 24^\circ\ 29' = 9{,}6174496 - 10$$
$$\log\sin 24^\circ\ 28' = 9{,}6171721 - 10$$

(Dff.) $1'$ .... 2775.

Wie findet man nun den gesuchten Logarithmus? Aus obiger Rechnung geht hervor, daß hier der Logarithmus in den letzten Stellen um 2775 wächst, wenn der Winkel um 1 Minute zunimmt, d. h. 2775 ist die Differenz für 1 Minute. Man schließt nun, daß bei wenig

von einander verschiedenen Winkeln die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der Winkel proportional sind, daß also, wenn der Winkel um 1 Secunde wächst, der Logarithmus um $\frac{2775}{60}$, d. h. um 46,25 wachsen muß; man vertheilt also die Differenz 2775 gleichmäßig auf 60 Secunden. Dieser Schluß ist annähernd wahr, weil die Tafeln zeigen, daß selbst bei der Zunahme des Winkels um immer eine Minute, die Differenzen der Logarithmen innerhalb gewisser Grenzen wenig von einander abweichen. Nur dann, wenn die Winkel nahe an 0° oder 90° liegen, sind die Differenzen so verschieden, daß die gleichmäßige Vertheilung der Differenz für 1′ auf 60″ ungenaue Logarithmen giebt; daher enthalten auch die Tafeln von 0° bis 6° und von 90° bis 84° die Logarithmen für die Winkel von 10 zu 10 Secunden. — In dem vorliegenden Beispiele sind 36″ zu interpoliren, und hierzu würde ein Zuwachs des kleineren Logarithmus um 36 × 46,25 gehören. Die Differenz für 1 Secunde ist in den Tafeln abgedruckt; im vorliegenden Falle heißt sie 46,26 (nach genauerer Rechnung) und steht rechts zwischen den beiden oben angegebenen Logarithmen. Hieraus ergiebt sich nun folgende Regel: Ist ein Winkel in Graden, Minuten und Secunden gegeben, so läßt man die Secunden fort und schlägt den Logarithmus der Function des gebliebenen Winkels auf. Dann multiplicirt man die Anzahl der Secunden mit der Differenz für 1″ und addirt das Product zu den letzten Ziffern des aufgeschlagenen Logarithmus, wenn die Function ein sin. oder eine tg. ist; hingegen muß man das Product subtrahiren, wenn die Function ein cos. oder eine cotg. ist, weil für diese Functionen zum größeren Winkel der kleinere Logarithmus gehört. Practisch verfährt man so:

		Dff. 1″ = 46,26
log sin 24° 28′ 36″ = 9,6171721 — 10.		36
36″ 1665		277 56
log sin 24° 28′ 36″ = 9,6173386 — 10.		1387 8
		1665,36

Beispiel 2.

		Dff. 1″ = 82,77
log cotg 74° 42′ 17″ = 9,4370670 — 10.		17
17″ 1407		579 39
log cotg 74° 42′ 17″ = 9,4369263 — 10.		827 7
		1407,09

In den neueren Tafeln sind die Winkel von 10 zu 10 Secunden enthaltenen, so daß man in dem ersten Beispiele nur 6″ zu interpoliren braucht; zugleich ist aber das Product der Differenz für 1″ mit

den Zahlen 1 bis 9 ebenfalls abgedruckt, so daß obige Beispiele so zu rechnen sind:

1) $\log \sin 24^\circ\ 28'\ 30'' = 9{,}6173109 - 10.$ (Dff. $10'' = 463$)
$6'' \ldots\ldots\ldots 277{,}8$

$\log \sin 24^\circ\ 28'\ 36'' = 9{,}6173387 - 10.$

2) $\log \operatorname{cotg} 74^\circ\ 42'\ 10'' = 9{,}4369842 - 10.$ (Dff. $10'' = 827$)
$7'' \ldots\ldots\ldots 578{,}9.$

$\log \operatorname{cotg} 74^\circ\ 42'\ 17'' = 9{,}4369263 - 10.$

Man hätte auch $\log \operatorname{cotg} 74^\circ\ 42'\ 20''$ aufschlagen und die Differenz für $3''$ addiren können.

Soll zu dem gegebenen Logarithmus einer Function der Winkel aufgeschlagen werden, so suche man den nächst niederen Logarithmus und notire den zugehörigen Winkel. Zieht man dann den aufgeschlagenen Logarithmus vom gegebenen ab, so hat man noch auszurechnen, wie oft die Differenz für $1''$ in diesem Rest enthalten ist; dadurch erhält man die Secunden, welche zu dem notirten Winkel bei den Functionen sin. und tg. zu addiren, bei cos. und cotg. aber von ihm abzuziehen sind. Das practische Verfahren zeigen folgende Beispiele:

1) $\log \cos \alpha = 9{,}9599634 - 10.$
$9{,}9599384 \measuredangle = 24^\circ\ 14'$

(Dff. $1'' =$) $9{,}47 \mid 250{,}00 \mid 26''$
189 4

60 60
56 82

$\alpha = 24^\circ\ 14' - 26'' = 24^\circ\ 13'\ 34''.$

2) $\log \operatorname{tg} \beta = 10{,}6637706 - 10.$
$10{,}6632976 \measuredangle = 77^\circ\ 45'$

(Dff. $1'' =$) $101{,}62 \mid 4730{,}00 \mid 46''$
4064 8

665 20
609 72

$\beta = 77^\circ\ 45'\ 46''.$

Besonders bei den neueren Tafeln, mit welchen der geübte Rechner sehr wohl im Kopfe interpoliren kann, ist es bei den Functionen cos. und cotg. bequemer, den nächst höheren Logarithmus aufzuschlagen, weil dann die interpolirten Secunden zu addiren sind. Obige Beispiele würden mit den neueren Tafeln so zu rechnen sein:

1) $\log \cos\alpha = 9{,}9599634 - 10.$

$9{,}9599668 \measuredangle = 24^\circ\ 13'\ 30''$

(Dff. 10″ = 95) 34

28,5 .... 3″

5 5

5 7 .... 6.

$\alpha = 24^\circ\ 13'\ 33{,}6''.$

2) $\log \operatorname{tg}\beta = 10{,}6637706 - 10.$

$10{,}6637040 \measuredangle = 77^\circ\ 45'\ 40''$

(Dff. 10″ = 1016) 666 .... 6″

$\beta = 77^\circ\ 45'\ 46''.$

Da ein Differenzen-Täfelchen mit der Ueberschrift 1016 fehlt, so dividirt man mit 101,6 in 666, oder benutzt das Täfelchen mit der Ueberschrift, welche 1016 am nächsten liegt.

Soll nicht der Logarithmus einer Function, sondern die Function selbst gefunden werden, so schlägt man erst den Logarithmus der Function auf und dann in den Tafeln der gemeinen Logarithmen den zugehörigen Numerus.

Ist nicht der Logarithmus einer Function gegeben, sondern die Function selbst, und soll der Winkel bestimmt werden, so schlägt man den Logarithmus der Function auf, bringt ihn auf die Characteristik −10 und sucht dann den Winkel. z. B.

Gegeben $\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$; gesucht α.

Aufl. $\log 2 = 30{,}3010300 - 30$

$\log 7 = 0{,}8450980$

$29{,}4559320 - 30$

3) ―――――

$\log \cos\alpha = 9{,}8186440 - 10$

$9{,}8186567 \measuredangle = 48^\circ\ 48'\ 10''$

(Dff 10″ = 241) 127

120,5 .... 5″.

$\alpha = 48^\circ\ 48'\ 15''.$

Anm. 1. Die absoluten Werthe der Differenzen je zweier auf einander folgenden Logarithmen der Functionen tg. und cotg. sind einander gleich; daher finden sie sich in derselben Columne mit der Ueberschrift d. c. (differentia communis). Der Grund ist leicht einzusehen. Aus $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1$ folgt $\log \operatorname{tg}\alpha + \log \operatorname{cotg}\alpha = 0$. Da dies für jeden Winkel wahr ist, so muß, wenn $\log \operatorname{tg}\alpha$ wächst, $\log \operatorname{cotg}\alpha$ um eben so viel fallen, und umgekehrt.

Anm. 2. Zu jeder gegebenen Function eines Winkels α gehören innerhalb der ersten 4 Quadranten 2 Winkel. Ist die Function positiv gegeben, so findet

man aus den Tafeln den spitzen Winkel und durch Reduction desselben auf den betreffenden Quadranten den andern Winkel. Ist die Function negativ, so sucht man zunächst den spitzen Winkel, dessen Function dem absoluten Gliede der negativen Zahl gleich ist, und reducirt dann diesen Winkel auf die richtigen Quadranten (vergl. das folgende Beisp. 19.). In den Beispielen bis Nr. 18. werden nur spitze Winkel gesucht.

Uebungs-Beispiele.

1) $\log \sin 70^\circ\ 5'\ 42'' = 9{,}9732472 - 10.$

2) $\log \cos \alpha = 9{,}0007888 - 10;\ \alpha = 84^\circ\ 15'\ 2''.$

3) $\log \operatorname{cotg} 12^\circ\ 30'\ 40'' = 10{,}6538464 - 10.$

4) $\log \operatorname{tg} \beta = 11{,}2071000 - 10;\ \beta = 86^\circ\ 26'\ 53''.$

5) $\log \cos 81^\circ\ 59'\ 13'' = 9{,}1442586 - 10.$

6) $\log \sin \gamma = 8{,}9328570 - 10;\ \gamma = 4^\circ\ 54'\ 53''.$

7) $\log \operatorname{tg} 1^\circ\ 7'\ 48'' = 8{,}2950119 - 10.$

8) $\log \operatorname{cotg} \delta = 11{,}0030002 - 10;\ \delta = 5^\circ\ 40'\ 18''.$

9) $\dfrac{3 \, . \sin 45^\circ}{5 \, . \cos 2^\circ} = 0{,}4245227.$

10) Es sei $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3 \, . \sin 3^\circ\ 7'\ 7''}$; wie groß α?
Antw. $21^\circ\ 59'\ 54''$.

11) $2 + 3 \, . \sin 40^\circ\ 2'\ 30'' = 3{,}9300335.$

12) Es sei $\cos x = \frac{1}{4}\,(6 - 5 \, . \cos 7^\circ\ 7'\ 7'')$; wie groß x?
Antw. $74^\circ\ 57'\ 6''$.

13) $1 + 2 \, . \operatorname{cotg} 72^\circ\ 10'\ 35'' = 1{,}643039.$

14) Es sei $\operatorname{tg} y = \dfrac{\sin 51^\circ\ 48'\ 20''}{\operatorname{tg} 53^\circ\ 7'\ 40''}$; wie groß y?
Antw. $30^\circ\ 31'\ 7''$.

15) Es sei $\operatorname{cotg} \delta = \sqrt{4 \, . \cos 81^\circ\ 0'\ 50''}$; wie groß δ?
Antw. $51^\circ\ 40'\ 34''$.

16) Es sei $\sin \varphi = \sqrt[3]{\dfrac{0{,}27349}{\cos 52^\circ\ 7'\ 37''}}$; wie groß φ?
Antw. $49^\circ\ 47'\ 41''$.

17) $0{,}2731479 \, . \cos 12^\circ\ 12'\ 12'' = 0{,}2669757.$

18) Es sei $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\dfrac{4 + \sin 40^\circ}{2 - \cos 72^\circ\ 44'\ 53''}}$; wie groß α?
Antw. $58^\circ\ 47'\ 45''$.

19) Die Werthe der Winkel α, β, γ und δ zu finden, welche innerhalb der ersten 4 Quadranten liegen und folgenden Gleichungen genügen:

$$\sin \alpha = 4 - 3 \sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{tg} 46^\circ}{1 - \sin 9^\circ}}.$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{3 \, . \sin 20^\circ + \sec 10^\circ}{1 - 3 \, . \operatorname{tg} 70^\circ}.$$

$$\cos\gamma = \sin 44^\circ + \sin 50^\circ - \cos 3^\circ\ 3'\ 3''.$$

$$\operatorname{tg}\delta = \sqrt[5]{\frac{3 + 4 . \sin 12^\circ\ 14'\ 37''}{3 - \sqrt{\sin 10^\circ\ 10' . \operatorname{cotg} 3^\circ\ 3'\ 3''}}}.$$

Aufl. Man erhält $\sin\alpha = -0{,}023841$; es liegt also α im 3ten oder im 4ten Quadranten. Im ersten Falle ist $\sin(\alpha - 180^\circ) = 0{,}023841$; im zweiten ist $\sin(360^\circ - \alpha) = 0{,}023841$. Man hat also zunächst den spitzen Winkel zu suchen, dessen sin. $= 0{,}023841$ ist, und diesen dann auf den 3ten und 4ten Quadranten zu reduciren. Man findet:

$\alpha = 181^\circ\ 21'\ 58''$ und $\alpha = 358^\circ\ 38'\ 2''$.

$\beta = 105^\circ\ 44'\ 31''$ und $\beta = 285^\circ\ 44'\ 31''$.

$\gamma = 62^\circ\ 28'\ 34''$ und $\gamma = 297^\circ\ 31'\ 26''$.

Man findet ferner $\operatorname{tg}\delta = \sqrt[5]{\frac{3{,}8482748}{1{,}180157}}$ und hieraus:

$\delta = 51^\circ\ 42'\ 36''$ und $\delta = 231^\circ\ 42'\ 36''$.

20) Es sei $\sin x = \dfrac{+\sqrt{1 + \left(\dfrac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}\right)^2}}{1 + \operatorname{cosec} 10^\circ}$; man soll den Ausdruck für $\sin x$ so umformen, daß er eine zur logarithmischen Berechnung bequemere Form erhält, und dann x bestimmen.

Aufl. Wendet man die Formeln XIX., XXII. und VIII. an, so folgt $\sin x = \dfrac{\operatorname{cosec} 10^\circ}{1 + \operatorname{cosec} 10^\circ}$. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sin 10^\circ$, so ist $\sin x = \dfrac{1}{1 + \cos 80^\circ} = \dfrac{1}{2 . (\cos 40^\circ)^2}$. Hieraus findet man $x = 58^\circ\ 26'\ 5''$ und $x = 121^\circ\ 33'\ 55''$.

§. 231.

Zusatz.

Der Leser mag hier noch auf eine besondere Umformung aufmerksam gemacht werden, welche in manchen Fällen in Bezug auf bequemes und sicheres practisches Rechnen Vortheil gewährt.

1) Sind A und B Ausdrücke, welche trigonometrische Functionen enthalten (z. B. $3 \sin 22^\circ$, $\frac{2}{3}(\cos 75^\circ\ 3')^2$, u. s. w.), so kann man $A + B$ so umformen:

$A + B = A\left(1 + \dfrac{B}{A}\right)$. Welchen Werth nun auch $\dfrac{B}{A}$ haben mag: es giebt immer einen Winkel φ, für welchen $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{B}{A}}$ ist. Ist dieser Winkel bestimmt, so ist:

$$A + B = A(1 + \operatorname{tg}\varphi^2) = A . \sec\varphi^2 = \frac{A}{\cos\varphi^2}.$$

2) $A - B$ kann man so umformen:

Ist $A > B$, so setzt man $A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right)$ und bestimmt φ so, daß $\cos\varphi = \sqrt{\frac{B}{A}}$ ist; dann folgt $A - B = A . \sin\varphi^2$.

Man kann auch $A - B = B\left(\frac{A}{B} - 1\right)$ setzen und φ so bestimmen, daß $\sec\varphi = \sqrt{\frac{A}{B}}$ ist; dann folgt $A - B = B . \mathrm{tg}\,\varphi^2$.

Ist $A < B$, so setze man $A - B = -(B - A)$ und verfahre mit $B - A$, wie oben angegeben.

3) In dem besonderen Falle, wenn der Ausdruck

$$a \sin\alpha \pm b \cos\alpha$$

gegeben ist, setze man für ihn

$$a\left(\sin\alpha \pm \frac{b}{a}\cos\alpha\right)$$

und bestimme φ so, daß $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$ ist; dann erhält man:

$$\begin{aligned} a \sin\alpha \pm b \cos\alpha &= a(\sin\alpha \pm \mathrm{tg}\,\varphi . \cos\alpha) \\ &= a \cdot \frac{\sin\alpha . \cos\varphi \pm \cos\alpha . \sin\varphi}{\cos\varphi} \\ &= a \cdot \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos\varphi}. \end{aligned}$$

Anm. Man könnte auch an die Stelle der angegebenen Functionen in Nr. 1. $\mathrm{cotg}\,\varphi$, in Nr. 2. resp. $\sin\varphi$ und $\mathrm{cosec}\,\varphi$, in Nr. 3. $\mathrm{cotg}\,\varphi$ wählen und dann ähnlich verfahren.

Beisp. 1. Gegeben $F = \sqrt{9(\sin 53^\circ\ 12')^2 + (\cos 53^\circ\ 12')^2}$.

Aufl. $F = 3 \sin 53^\circ\ 12' . \sqrt{1 + (\frac{1}{3}\mathrm{cotg}\, 53^\circ\ 12')^2}$. Setzt man $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{3}\mathrm{cotg}\, 53^\circ\ 12'$, so ist $\varphi = 14^\circ\ 0'\ 7''$ und

$$F = \frac{3 \sin 53^\circ\ 12'}{\cos 14^\circ\ 0'\ 7''} = 2{,}475754 \ldots$$

Beisp. 2. Es sei $\mathrm{cotg}\,x = 2 \cos 10^\circ - 3 \sin 10^\circ$; gesucht x.

Aufl. $\mathrm{cotg}\,x = 2(\cos 10^\circ - 1{,}5 . \sin 10^\circ)$; wenn man $\mathrm{tg}\,\varphi = 1{,}5$ setzt, so folgt $\mathrm{cotg}\,x = \frac{2\cos(10^\circ + \varphi)}{\cos\varphi}$. Man erhält $\varphi = 56^\circ\ 18'\ 36''$ und $x = 34^\circ\ 37'\ 0{,}7''$.

§. 232.

Von den Gleichungen zwischen den trigonometrischen Functionen eines unbekannten Winkels.

Soll ein Winkel x gefunden werden, der durch eine Gleichung zwischen trigonometrischen Functionen von x gegeben ist, so beruht die Auflösung darauf, daß man nicht x als die Unbekannte betrachtet,

sondern zunächst jede einzelne Function von x als eine besondere Unbekannte ansieht. Weil aber dann zur Entwicklung einer der Functionen die eine Gleichung nicht ausreicht, so nimmt man von den trigonometrischen Formeln zwischen den in der Gleichung vorkommenden Functionen von x so viele als Hülfsgleichungen hinzu, bis man so viel Gleichungen als Unbekannte hat. Von der Wahl der Gleichungen hängt die größere oder geringere Schnelligkeit der Auflösung ab. Hierbei sind nicht nur ungleichnamige Functionen als verschiedene zu betrachten, sondern auch gleichnamige, wenn sie zu verschiedenen Winkeln gehören, z. B. $\sin x$ und $\sin 2x$. Bringt die Hülfsgleichung eine neue Function in die Gleichung hinein, so muß wieder eine neue Hülfsgleichung herangezogen werden. Wenn dann eine Function von x durch bekannte Zahlen bestimmt ist, so geben die Logarithmentafeln das Mittel zur Berechnung von x. Es können sich mehrere Werthe für x ergeben; man vergesse nicht zu untersuchen, welche von den gefundenen Winkeln der Aufgabe genügen.

Unter den hierher gehörigen Gleichungen ist die wichtigste: $a \sin x \pm b \cos x = c$. Ihre Auflösung folgt hier; die Behandlung anderer Gleichungen zeigen die nachfolgenden Beispiele.

Um die Gleichung

$$a \sin x \pm b \cos x = c$$

aufzulösen, unterscheiden wir folgende Fälle:

1) Es kann $a = b$ sein. Wenn man die Gleichung

$$a \sin x \pm a \cos x = c$$

quadrirt, so folgt:

$$a^2 \pm a^2 \sin 2x = c^2, \text{ daher } \sin 2x = \pm \frac{c^2 - a^2}{a^2}.$$

2) Wenn $b = c$ ist, so folgt aus

$$a \sin x + b \cos x = b:$$

$$a \sin x = b(1 - \cos x), \text{ oder}$$

$$2a \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2b \cdot \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2.$$

Hieraus folgt: $\sin \frac{x}{2} = 0$, oder $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$.

Heißt die gegebene Gleichung

$$a \sin x - b \cos x = b,$$

so erhält man auf demselben Wege:

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{b}{a}.$$

3) Wenn $a = c$ ist, so kann man die Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = a$$

auf Nr. 2) zurückführen. Man schreibt

$$a \cos(90° - x) + b \sin(90° - x) = a.$$

Hierauf folgt $\sin \frac{90° - x}{2} = 0$ oder $\operatorname{tg} \frac{90° - x}{2} = \frac{b}{a}$.

Auf dieselbe Weise ist die Gleichung

$$-a \sin x + b \cos x = a$$

zu behandlen.

4) Allgemein kann man

$$a \sin x \pm b \cos x = c$$

auflösen, wenn man $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ als Hülfsgleichung heranzieht. Bequemer aber ist folgender Weg:

Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$\sin x \pm \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a}.$$

Setzt man nun $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, so folgt (vergleiche den vor. §.)

$$\sin(x \pm \varphi) = \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi.$$

Anm. Bei den folgenden Beispielen werden nur positive Winkel innerhalb der ersten 4 Quadranten gesucht.

Beisp. 1. $\cos x^2 + 2 \sin x . \cos x - \sin x^2 = 0.$

Aufl. $\cos 2x + \sin 2x = 0$; hieraus:
$\sin 4x = -1$; folglich $x = 67° \, 30' + a . 90°$.

Beisp. 2. $\frac{5}{\sin x} - 3 = \frac{3 \cos x}{1 - \cos x}$.

Aufl. Man erhält:

$3 \sin x + 5 \cos x = 5$, folglich $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{5}$; $x = 61° \, 55' \, 39''$.

Für $x = 0$ nimmt die gegebene Gleichung die Form $\infty = \infty$ an.

Beisp. 3. $5 \sin x - 2 \cos x = 0{,}8.$

Aufl. Aus $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}4$ folgt $\varphi = 21° \, 48' \, 5''$; dann ist $\sin(x - \varphi) = 0{,}16 . . \cos \varphi$ und $x = 30° \, 20' \, 40''$ oder $x = 193° \, 15' \, 30''$.

Beisp. 4. In einem rechtwinkligen Dreieck verhält sich der sin. des einen spitzen Winkels zur tg. des andern $= 1 : 2$; wie groß sind die Winkel?

Aufl. Aus $\sin x : \operatorname{cotg} x = 1 : 2$ folgt $\cos x = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17})$ mittelst der Hülfsgleichungen $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ und $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$. Man erhält die Winkel gleich $38° \, 40' \, 6''$ und $51° \, 19' \, 54''$.

Beisp. 5. In einem rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die tg. der spitzen Winkel zu einander, wie 1 : 4; wie groß sind die Winkel?

Antw. 26° 33′ 54″ und 63° 26′ 6″.

Beisp. 6. In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich der sin. des Winkels (x) an der Grundlinie zum cos. des Winkels (y) an der Spitze wie 8 : 5; wie groß sind die Winkel?

Aufl. $\sin x : \cos y = 8 : 5$; folglich

$$5 . \sin x = 8\left(2 . \cos\frac{y^2}{2} - 1\right).$$

Nun ist $\frac{y}{2}$ das Complement von x; folglich $5 . \sin x = 16 . \sin x^2 - 8$; u. s. w.

Man erhält $x = 61° \, 41' \, 32''$; $y = 56° \, 36' \, 56''$

Beisp. 7. Wie groß ist der spitze Winkel, dessen sin. sich zum sin. des dreifachen Winkels wie 3 : 5 verhält?

Aufl. $\sin x : \sin 3x = 3 : 5$ oder

$$5 . \sin x = 3 . [\sin x . \cos 2x + \cos x . 2 . \sin x . \cos x].$$

Durch $\sin x$ kann man heben, und setzt man dann noch $\cos 2x = 2 . \cos x^2 - 1$; so entsteht $\cos x = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$. Hieraus $x = 35° \, 15' \, 52''$.

Beisp. 8. Der sin. eines spitzen Winkels (x) verhält sich zum sin. des doppelten Winkels wie n : m; wie groß ist die tg. dieses Winkels und die cotg. des doppelten?

Antw. $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{4n^2 - m^2}}{m}$; $\operatorname{cotg} 2x = \frac{m^2 - 2n^2}{m\sqrt{4n^2 - m^2}}$.

Determ. $2n > m$. (Wird $\operatorname{tg} x > 1$, so ergiebt sich $\operatorname{cotg} 2x$ negativ.)

Beisp. 9. Wie groß ist x aus der Gleichung:

$$9 \sin x . \cos(10° + x) = 2?$$

Aufl. $2 \cos(10° + x) . \sin x = \frac{4}{9}$.

Wendet man nun die Formel §. 217. (2.) an, so folgt

$\sin(10° + 2x) - \sin 10° = \frac{4}{9}$; hieraus

$\sin(10° + 2x) = 0{,}6180926$; u. s. w.

Man erhält $x = 14° \, 5' \, 18{,}5''$ oder $x = 65° \, 54' \, 41{,}5''$.

Beisp. 10. $\sin x . \sqrt{3} - 3 \cos x = \sqrt{3}$.

Aufl. $x = 90°$ und $210°$. (Die Auflösung dieser und der beiden folgenden Aufgaben wird nicht unbequem, wenn man sich der Hülfsgleichung $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ bedient.)

Beisp. 11. $\sin x - 3 \cos x + 1 = 0$.

Aufl. $x = 53° \, 7' \, 48''$ und $270°$.

Beisp. 12. $4 \sin x + 7 \cos x = 8$.

Aufl. $x = 36° \, 52' \, 12''$ und $22° \, 37' \, 11''$.

Beisp. 13. $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} = +\sqrt{\frac{2\sin x}{1+\sin x}}$.

Aufl. Die Gleichung ist nach gehöriger Umformung durch $\sin x^2$ und durch $1+\sin x$ zu heben. (Für $x = 0$ wird sie richtig, für $x = 270^\circ$ nimmt sie die Form $\infty = \infty$ an.) Man erhält dann $\sin x^2 - \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{9} = 0$ und $x = 19^\circ\ 28'\ 16''$.

Beisp. 14. $0{,}4 \operatorname{tg} x + 0{,}4 \operatorname{cotg} x = \frac{3}{2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{cotg} x}$.

Aufl. $x = 63^\circ\ 26'\ 6''$, und dieser Winkel kann noch auf jeden der übrigen 3 Quadranten reducirt werden.

Beisp. 15. $2\cos x \,.\, \operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x = 3\sin x$.

Aufl. Multiplicirt man mit $\sin x$, so entsteht:

$$2\cos x^2 - 1 = 3\sin x^2.$$

Setzt man jetzt $\sin x^2 + \cos x^2$ statt 1, so folgt: $\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{2}$. Es ist $x = 26^\circ\ 33'\ 54''$, und dieser Winkel kann noch auf jeden der 3 anderen Quadranten reducirt werden ($180^\circ - x$, $180^\circ + x$ und $360^\circ - x$).

Beisp. 16. $2\cos x \,.\, \operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x = 3\cos x$.

Aufl. Man erhält $\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{3}$. Hieraus folgt $2x = 33^\circ\ 41'\ 24'' + a \,.\, 360^\circ$ oder $213^\circ\ 41'\ 24'' + a \,.\, 360^\circ$; daher $x = 16^\circ\ 50'\ 42'' + a \,.\, 180^\circ$ oder $106^\circ\ 50'\ 42'' + a \,.\, 180^\circ$. Weil aber nur Winkel in den ersten 4 Quadranten gesucht werden, so ist 0 und 1 für a zu setzen, so daß sich für x in jedem der 4 Quadranten ein Winkel ergiebt.

Beisp. 17. $\operatorname{tg} x - 2\sin x = 4\sin 2x$.

Aufl. x ist gleich 0°; 180°; 360°; $75^\circ\ 31'\ 21''$; $284^\circ\ 28'\ 39''$; 120° und 240°.

Beisp. 18. $\sin x \,.\, \sin 2x = \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Aufl. Die Auflösung führt zu einer kubischen Gleichung, welche durch die Cardanische Formel leicht zu lösen ist. Man erhält:

$$x = 54^\circ\ 44'\ 9'' \text{ und } 305^\circ\ 15'\ 51''.$$

§. 233.

Uebungs-Aufgaben.

Die Richtigkeit folgender Gleichungen zu beweisen:

1) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{(\sec\alpha + 1)(\sec\alpha - 1)}$.

3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta} = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta$.

4) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha}$.

5) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

6) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$.

7) $\sin(\alpha + 3\beta) = 2\sin(\alpha + \beta)\cos 2\beta - \sin(\alpha - \beta)$.

Man bringe $\sin(\alpha - \beta)$ auf die andere Seite und verwandle diese in ein Product.

8) $\operatorname{cotg}\alpha - \frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin 2\alpha$.

Man schaffe den Nenner fort und wende Formel XXII. an.

9) $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin 2\alpha$.

10) $\cos 3\alpha \,.\, \sec\alpha = (1 + 2\sin\alpha)(1 - 2\sin\alpha)$.

Man setze $3\alpha = \alpha + 2\alpha$ und wende X. an.

11) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos(\alpha - 45^\circ)}{\sin 2\alpha} \,.\, \sqrt{8}$.

Multiplicirt man Zähler und Nenner der linken Seite mit $2\cos\alpha$, so geht sie in $\frac{2(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin 2\alpha}$ über; man verwandle nun $\cos\alpha + \sin\alpha$ oder $\sin(90^\circ - \alpha) + \sin\alpha$ in ein Product u. s. w.

12) $2\cos\frac{\alpha}{2} - \sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha : \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha + \sin\frac{\alpha^2}{2}}$.

Die Formeln XIV. und XV. kommen zur Anwendung.

13) $\operatorname{cosec}\alpha \,.\, \sec\beta \,.\, \sin(\alpha + \beta) = 1 + \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta$.

14) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha$.

z. B. $\operatorname{cotg} 15^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ + \operatorname{cotg} 30^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

$\operatorname{cotg} 7^\circ\, 30' = \operatorname{cotg} 15^\circ + \operatorname{cosec} 15^\circ = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6} = 7{,}595754$.

Hieraus $\operatorname{tg} 7^\circ\, 30' = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

15) $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 + \sin\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Zum Beweise kann man folgende Umformung anwenden:

$$\operatorname{cotg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 : \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \text{(XXV.)} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}$$

(wenn man Zähler und Nenner mit $\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}$ multiplicirt) $= \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos\frac{\alpha^2}{2} - \sin\frac{\alpha^2}{2}}$

$= \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$ u. s. w.

16) $\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha^3 - \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{2}{3}\sin\alpha^3 - \frac{1}{2}\cos\alpha(1-\sin 2\alpha)$.

17) Folgende Ausdrücke zu vereinfachen:

$$A = 2 \cdot \frac{\sin\varphi \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi) - \cos\varphi \cdot (1 + \sin\varphi - \cos\varphi)}{(1+\sin\varphi - \cos\varphi)^2}$$

$$B = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} - \frac{2\sin\varphi}{1+\sin\varphi - \cos\varphi}.$$

Aufl. $A = \frac{1}{1+\sin\varphi}$ und $B = -1$.

18) (Aus Grunerts Archiv 1856.)

$$4(\sin\varphi^6 + \cos\varphi^6) = 1 + 3\cos 2\varphi^2.$$

Bew. Dividirt man $\sin\varphi^6 + \cos\varphi^6$ durch $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2$, d. h. durch 1, so entsteht:

$$\begin{aligned} 4(\sin\varphi^6 + \cos\varphi^6) &= 4(\sin\varphi^4 - \sin\varphi^2\cos\varphi^2 + \cos\varphi^4) \\ &= 4[(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2)^2 - 3\sin\varphi^2\cos\varphi^2] \\ &= 4 - 3\sin 2\varphi^2 = 1 + 3\cos 2\varphi^2. \end{aligned}$$

19) Es sei $\sin\alpha + \cos\alpha = a$, wie groß ist $\sin\alpha - \cos\alpha$?

Antw. $\pm\sqrt{2-a^2}$. Man quadrirt die gegebene Gleichung, so erhält man $2\sin\alpha\cos\alpha = a^2 - 1$, und diese Gleichung zieht man von $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ab. – Man kann auch $\sin\alpha - \cos\alpha = x$ setzen, diese Gleichung und die gegebene quadriren und dann beide addiren.

Determ. a muß innerhalb der Grenzen $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ liegen, d. h. diese Zahlen sind resp. der größte und kleinste Werth, den $\sin\alpha + \cos\alpha$ annehmen kann. (Wie groß dann α?)

20) Welchen Werth hat $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha^2}$ für $\alpha = 180°$?

Antw. Den Werth $\frac{1}{2}$. – Setzt man $\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$, so kann man heben. (Vergl. Arithm. §. 91.)

21) Es sei $\cos x = \sqrt{\frac{\cos\alpha^2}{1+\cos\alpha^2}}$; gesucht $\operatorname{cotg} x$.

Aufl. $\operatorname{cotg} x = \cos\alpha$.

22) Es sei $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\sec 2\alpha - 2}$; gesucht $\sin x$.

Aufl. $\sin x = \operatorname{tg}\alpha$.

23) Es sei $\cos 2\alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; wie groß $\operatorname{tg}\alpha$?

Antw. $\operatorname{tg}\alpha = \pm(1+\sqrt{2})$.

24) Es sei $z^2 = 2t^2 + 2a^2 + \frac{2t^2 - 2a^2}{\cos\alpha}$. Wenn nun $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{t}{a}$ ist, wie groß ist z?

Antw. Man erhält $\cos\alpha = \frac{t^2 - a^2}{t^2 + a^2}$ und $z = 2\sqrt{t^2 + a^2}$.

25) Es sei $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 + b^2 \cos\varphi^2}}$; wie groß ist $\operatorname{tg}\varphi$?

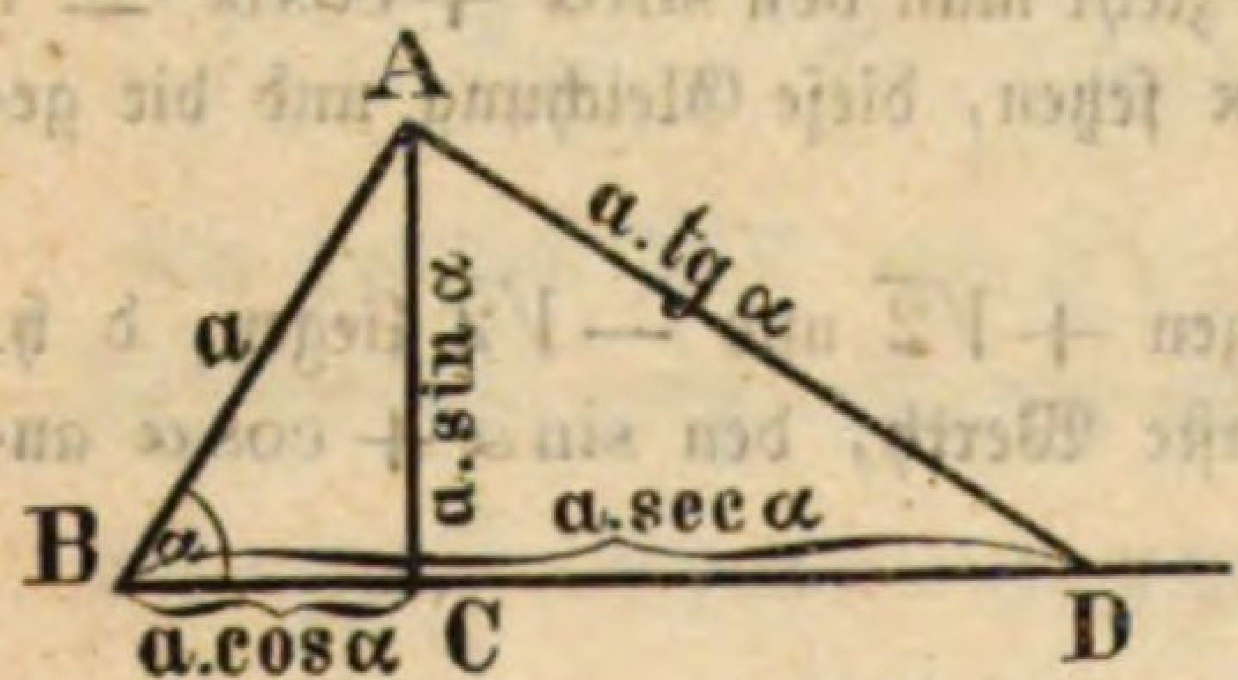
Antw. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Nachdem die Wurzeln und Nenner fortgeschafft sind, setzt man $\cos\varphi^2 = 1 - \sin\varphi^2$ und entwickelt $\sin\varphi$, u. s. w.

Von der Berechnung der rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke und der regulären Vielecke.

§. 234.

Die in §. 213. angegebenen Gesetze bilden die Grundlage für die Berechnung unbekannter Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks aus gegebenen. Auf die besondere Wichtigkeit dieser Gesetze ist schon aufmerksam gemacht worden; der Leser möge diese Gesetze auch in folgender Form sich einprägen:

Wenn man einen Schenkel eines Winkels α begrenzt und $= a$ macht, so ist:



1) $a.\sin\alpha$ die vom Endpunkte des Schenkels a auf den andern Schenkel gefällte Senkrechte (AC);

2) $a.\cos\alpha$ ist das durch diese Senkrechte ($a\sin\alpha$) abgeschnittene Stück (BC) des andern Schenkels, also die Projection von a auf den andern Schenkel;

3) $a.\operatorname{tg}\alpha$ ist die im Endpunkte von a auf a errichtete und bis zum andern Schenkel verlängerte Senkrechte (AD).

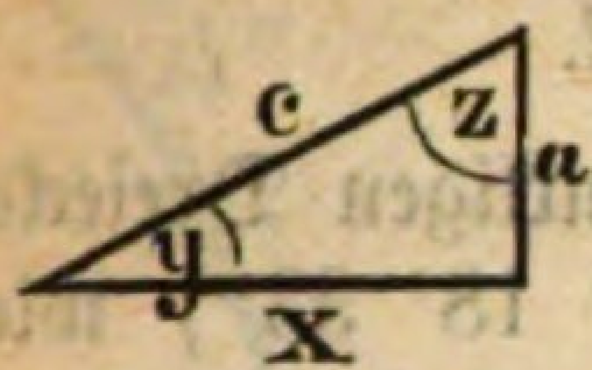
4) $a.\sec\alpha$ ist das durch diese Senkrechte ($a\operatorname{tg}\alpha$) vom andern Schenkel abgeschnittene Stück (BD).

§. 235.

Das rechtwinklige Dreieck.

Wir unterscheiden die nachfolgenden fünf Fälle, bemerken aber dem Leser ausdrücklich, daß es nicht nöthig ist, die Resultate dieser Fälle etwa als Formeln aufzufassen und dem Gedächtniß einzuprägen; vielmehr soll jede Berechnung bei dem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreieck und bei den regulären Figuren immer nur durch Anwendung der Gesetze im vorigen §. geschehen.

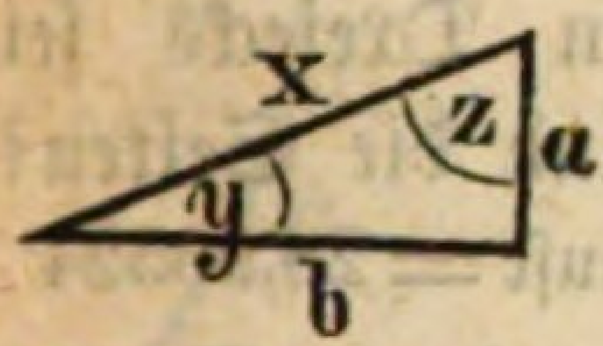
1) Gegeben die Hypotenuse c und eine Kathete a.



Aufl. $x = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$; $\sin y = \frac{a}{c}$,

$\cos z = \frac{a}{c}$ oder $z = 90^\circ - y$.

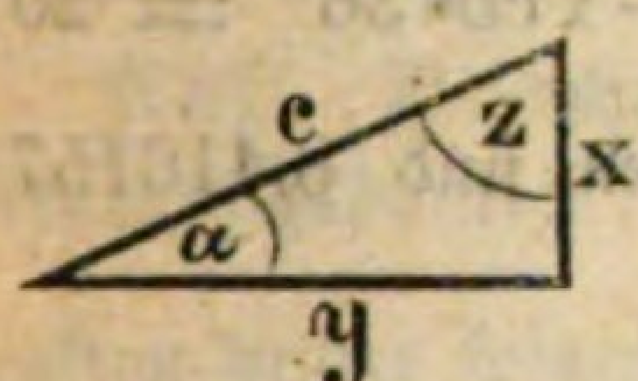
2) Gegeben die beiden Katheten a und b.



Aufl. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\operatorname{tg} y = \frac{a}{b}$;

$\operatorname{tg} z = \frac{b}{a}$ oder $z = 90^\circ - y$.

3) Gegeben die Hypotenuse c und ein Winkel α.

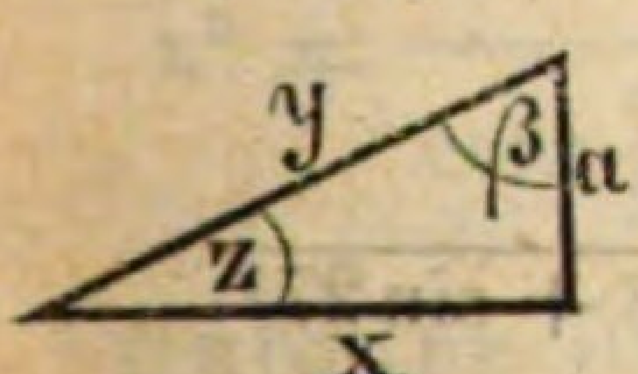


Aufl. $x = c . \sin\alpha$; $y = c . \cos\alpha$;

$z = 90^\circ - \alpha$;

Inhalt $= \frac{1}{2} c . \sin\alpha \times c . \cos\alpha = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin 2\alpha$.

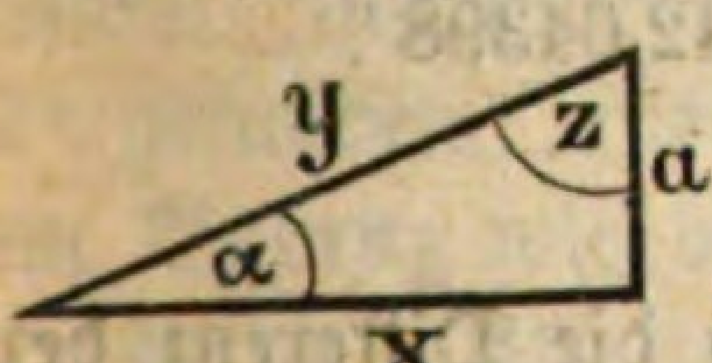
4) Gegeben eine Kathete a und der anliegende Winkel β.



Aufl. $x = a . \operatorname{tg}\beta$; $y = a . \sec\beta = \frac{a}{\cos\beta}$;

$z = 90^\circ - \alpha$; der Inhalt $= \frac{1}{2} a^2 . \operatorname{tg}\beta$.

5) Gegeben eine Kathete a und der gegenüberliegende Winkel α.



Aufl. $x = a . \operatorname{cotg}\alpha$; $y = a . \operatorname{cosec}\alpha = \frac{a}{\sin\alpha}$;

der Inhalt $= \frac{1}{2} a^2 . \operatorname{cotg}\alpha$.

(Im Wesentlichen ist diese Aufgabe die vorige.)

Anmerkung. In den vorstehenden Aufgaben ist jedes unbekannte Stück durch die gegebenen ausgedrückt worden. Es ist aber klar, daß es bei practischen Rechnungen häufig bequemer sein wird, nachdem ein unbekanntes Stück berechnet ist, dieses zur Berechnung der anderen zu benutzen. Wenn z. B. x in der Aufgabe 4. berechnet ist, wird man den Inhalt bequemer durch $\frac{1}{2} ax$ ausdrücken, zumal $\log a$ und $\log x$ aus der schon ausgeführten Rechnung zu entnehmen sind. Wenn man zuweilen doch lieber aus den gegebenen Stücken allein alle unbekannten Stücke ausrechnet, so geschieht dies nur in der Absicht, daß ein etwa gemachter Fehler sich nicht fortsetzen soll; die in Bezug auf einen solchen Fehler dann von einander unabhängigen Resultate controliren sich gegenseitig besser.

§. 236.
Uebungen über das rechtwinklige Dreieck.

Aufgabe 1. Es sei eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks $= 10{,}947'$ und der gegenüberliegende Winkel $= 42° \; 18' \; 33''$; wie groß sind die anderen Stücke?

Antw. Die Seiten $12{,}0267'$ und $16{,}2628'$; der Inhalt $= 65{,}8283 \square'$.

Aufgabe 2. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= 100 \square'$, ein Winkel $= 14° \; 14' \; 14''$; wie groß sind die Seiten?

Antw. Die Katheten $28{,}07559'$ und $7{,}123627'$; die Hypotenuse $= 28{,}96524'$.

Aufgabe 3. Die Summe der Katheten sei $20'$ und ein Winkel $= 36°$; wie groß sind die Seiten?

Aufl. Bezeichnet x die Hypotenuse, so ist $x \sin 36° + x \cos 36° = 20$; hieraus $x = \frac{10}{\sin 45° \, . \cos 9°} = 14{,}31842'$. Die Katheten sind $8{,}416157'$ und $11{,}58384'$.

Aufgabe 4. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks sei $100'$, ein Winkel $63°$; wie groß sind die Seiten?

Aufl. Bezeichnet x die Hypotenuse, so ist

$$x = \frac{100}{1 + \sin 63° + \cos 63°} = \frac{100}{\sin 90° + \sin 63° + \sin 27°} \, .$$

Wendet man nun die Formel §. 228. Nr. 1. an, so folgt:

$$x = \frac{25}{\cos 45° \, . \cos 31° \; 30' \, . \cos 13° \; 30'} = 42{,}64398'.$$

Die Katheten sind $37{,}99606'$ und $19{,}35996'$.

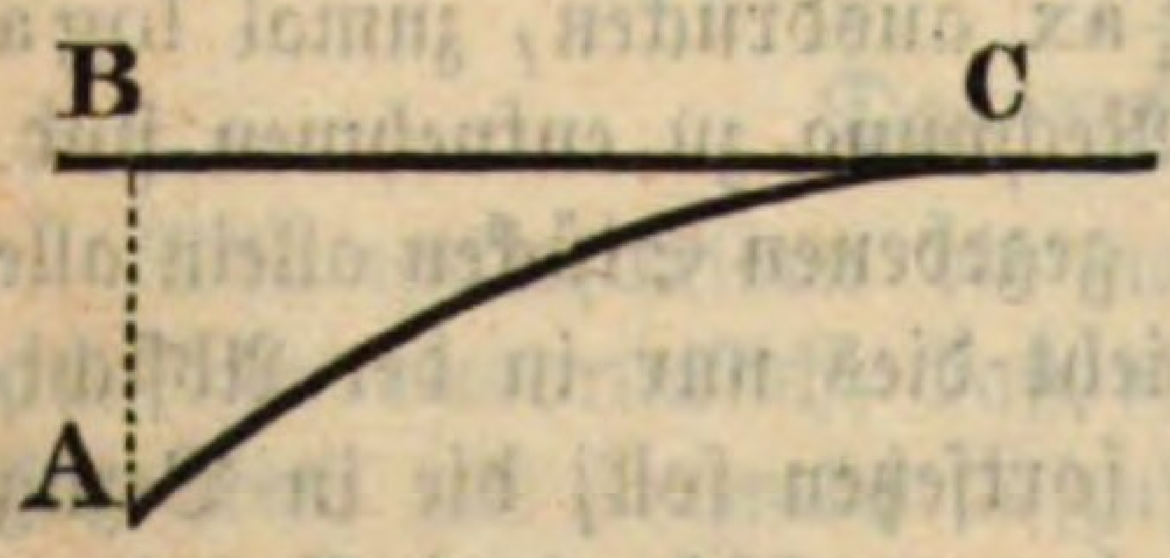
Aufgabe 5. Es sei die Hypotenuse $= a$, und die Differenz der spitzen Winkel $= \alpha$; wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

Antw. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 . \cos \alpha$.

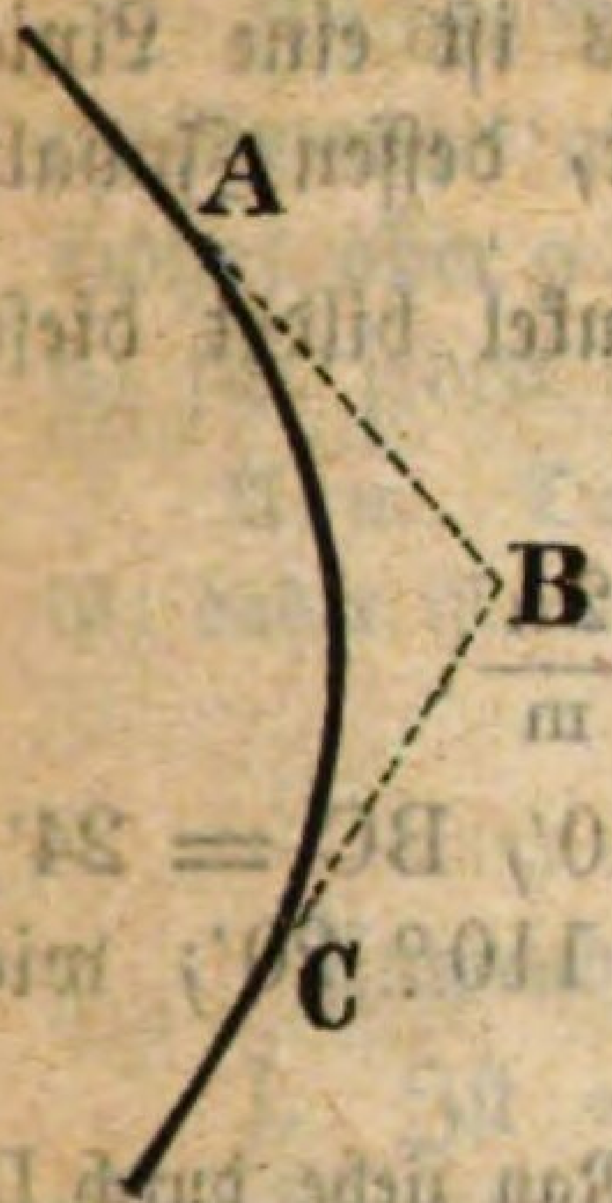
Aufgabe 6. In einem Rhombus verhalten sich die Diagonalen zu einander wie $3:5$; wie groß sind die Winkel des Rhombus?

Antw. $61° \; 55' \; 38''$ und $118° \; 4' \; 22''$.

Aufgabe 7. Eine Eisenbahn AC soll sich von A aus der Richtung BC in einem Kreisbogen so nähern, daß sie in C in diese Richtung übergeht, also BC in C berührt. A ist durch seine Coordinaten gegeben: CB=260 Ruthen, BA=150 Ruthen; wie groß ist der Radius des Bogens, und wie groß der Winkel, den die Radien nach A und C mit einander bilden?



Antw. $300\frac{1}{3}$ Ruthen und $59° \; 57' \; 48''$.



Aufgabe 8. Eine Eisenbahn soll in einem Kreisbogen, dessen Radius 400 Ruthen ist, aus der Richtung AB in die Richtung BC übergeleitet werden. Man soll die Entfernungen der Berührungspunkte A und C von B und die Länge des Bogens AC berechnen, wenn $\measuredangle$ ABC $= 109°\ 45'$ ist.

Aufl. $AB = CB = 281{,}3855$ Ruthen;
Bogen $AC = 490{,}4375$ Ruthen.

Aufgabe 9. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= a^2$, und der eine spitze Winkel $= \alpha$; es soll der Inhalt F des eingeschriebenen Kreises gefunden werden.

Aufl. Bezeichnet x den Radius, und zieht man die drei Radien nach den Berührungspunkten, verbindet auch den Mittelpunkt des Kreises mit den Scheitelpunkten beider spitzen Winkel: so ist $x^2 + x^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + x^2 \operatorname{cotg}\frac{90° - \alpha}{2} = a^2$. Hieraus folgt nach §. 228. Anm. Nr. 6. (wenn man noch $1 = \operatorname{cotg} 45°$ setzt):

$$x^2 = \frac{a^2}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{90° - \alpha}{2}};\ F = a^2 \pi \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{90° - \alpha}{2}.$$

Aufgabe 10. Um die Höhe eines Thurmes zu ermitteln, hat man auf horizontalem Boden, 1000 Fuß von seiner Mitte, durch ein Winkel-Instrument den Erhöhungswinkel nach seiner Spitze $= 11°\ 12'$ gefunden. Hierbei lag der Scheitelpunkt des Winkels 4 Fuß über dem Boden; wie hoch ist der Thurm?

Antw. 202 Fuß.

Aufgabe 11. Zwei Kreise mit den Radien 10′ und 6′ berühren sich von außen; welchen Winkel bildet die gemeinschaftliche äußere Tangente mit der Verlängerung der Centrale?

Antw. $14°\ 28'\ 39''$.

Aufgabe 12. Die Endpunkte zweier Linien liegen in den Schenkeln desselben rechten Winkels. Die eine Linie schneidet von den Schenkeln die Längen a und b, die andere die Längen c und d ab, so daß a und c in demselben Schenkel liegen; welchen Winkel x bilden die Linien mit einander?

Antw. $\operatorname{tg} x = \pm \frac{ad - bc}{ac + bd}$ (Formel XXV.).

Aufgabe 13. Die Seite eines Rhombus sei a, der spitze Winkel $= \alpha$; wie groß ist der Radius des eingeschriebenen Kreises?

Antw. $\frac{a}{2} \sin \alpha$.

Aufgabe 14. Durch eine Ecke eines Quadrats ist eine Linie gelegt, welche vom Quadrat ein Dreieck abschneidet, dessen Inhalt $= \frac{n}{m}$ vom Inhalte des Quadrats ist; welche Winkel bildet diese Linie mit den Seiten des Quadrats?

Antw. Die tg., oder die cotg. dieser Winkel ist $= \frac{2n}{m}$.

Aufgabe 15. Im Viereck ABCD ist AB = 10′, BC = 24′; die Winkel bei A und B sind rechte, und ∡ D ist = 110° 20′; wie groß sind AD und DC?

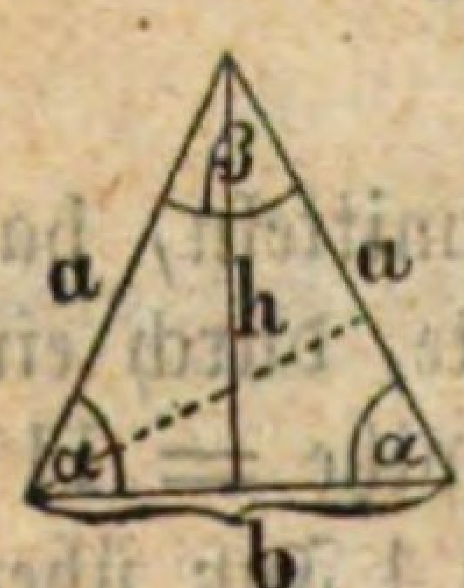
Antw. AD = 20,29427′ und DC = 10,66454′. (Man ziehe durch D eine Parallele mit AB.)

Aufgabe 16. In einem rechtwinkligen Dreieck sei eine Kathete 10′, die Hypotenuse aber um 6′ größer als die andere Kathete; wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

Antw. 61° 55′ 39″ und 28° 4′ 21″.

§. 237.

Das gleichschenklige Dreieck.



Fällt man von der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie b die Höhe h, so wird b, und auch der ∡ β an der Spitze, durch h halbirt, das Dreieck selbst aber in zwei congruente rechtwinklige zerlegt. Aus jedem derselben ergeben sich die Gleichungen:

$$1)\ b = 2a.\sin\frac{\beta}{2} = 2a.\cos\alpha = 2h.\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = 2h.\mathrm{cotg}\,\alpha.$$

$$2)\ a = \frac{b}{2}\sec\alpha = \frac{b}{2}\mathrm{cosec}\frac{\beta}{2} = h.\sec\frac{\beta}{2} = h.\mathrm{cosec}\,\alpha$$

$$\text{oder} = \frac{b}{2\cos\alpha} = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

$$3)\ h = a.\sin\alpha = a.\cos\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2}\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{2}\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

Bezeichnet F den Inhalt des Dreiecks, so ist

$$4)\ F = \frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}\mathrm{tg}\,\alpha = \left(\frac{b}{2}\right)^2\mathrm{tg}\,\alpha = \left(\frac{b}{2}\right)^2\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

Um F zu finden, wenn a und β gegeben sind, ist es bequemer, die Höhe auf a zu benutzen, als die auf b. Es ist:

5) die Höhe auf $a = a.\sin\beta$ (auch $= b.\sin\alpha$)

6) $F = \frac{1}{2}a^2.\sin\beta$ (auch $= \frac{1}{2}ab.\sin\alpha$).

Ist der Winkel β stumpf, so ist die Höhe auf $a = a . \sin(180^\circ - \beta)$, wofür man aber $a . \sin\beta$ setzen kann; ist $\beta = 90^\circ$, so ist a selbst die Höhe; aber $a . \sin 90^\circ$ ist $= a$. Es gelten sonach die Formeln 5) und 6) für jeden Werth von β.

Anm. Da $\beta + 2\alpha = 180^\circ$ ist, so folgt noch, daß $\sin\beta = \sin 2\alpha$ ist; daher ist auch $F = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha$.

§. 238.

Anwendungen auf den Kreis und auf reguläre Polygone.

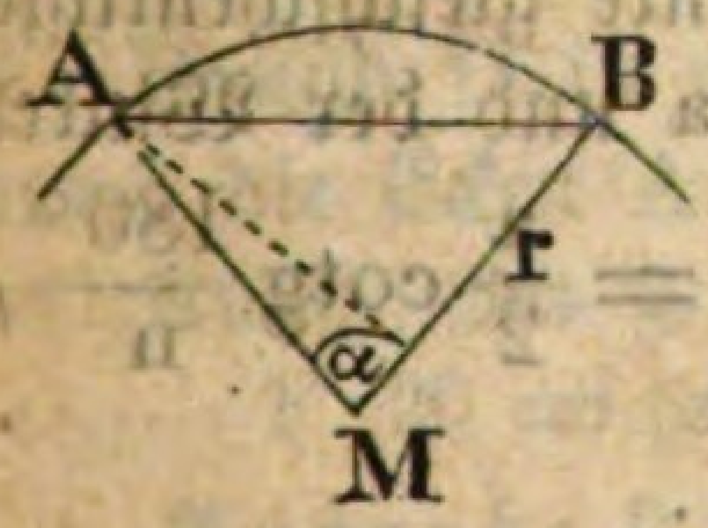
I. Ist α ein Centriwinkel im Kreise zum Radius r, so findet man die zu α gehörige Sehne, wenn man vom Mittelpunkt auf sie ein Loth fällt; man erhält dann:

$$\text{Sehne zum Centriwinkel } \alpha = 2r . \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Anm. Hieraus folgt auch, daß der Quotient der halben Sehne durch den Radius gleich dem sin. des halben zur Sehne gehörigen Centriwinkels ist. Der halbe Centriwinkel zur Seite des regulären n-Ecks im Kreise ist $= \frac{180^\circ}{n}$; kennt man also die Seite dieses n-Ecks, so hat man durch sie auch $\sin\frac{180^\circ}{n}$. Es ist z. B. die Zehnecks-Seite $= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} r$, folglich $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$;

die Fünfecks-Seite $= r . \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, folglich $\sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

II. Berechnung des Kreisabschnitts.



Um das zur Sehne AB gehörige Segment zu berechnen, muß man Δ MAB vom Sector AMB abziehen. Hieraus folgt (vergl. §. 164. Nr. 2.) das Segment zum Centriwinkel α

$$= \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 . \sin\alpha \text{ oder:}$$

$$\text{Kreisabschnitt} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\alpha}{180}\pi - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2} r^2 (\text{arc}\,\alpha - \sin\alpha).$$

Anm. Die Formel gilt auch, wenn α ein convexer Winkel ist. In diesem Falle muß bei der Ausrechnung $\sin\alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$ gesetzt werden, wodurch der Ausdruck in den Klammern in eine Summe übergeht.

Beisp. Welche Sehne und welcher Kreisabschnitt gehört in dem Kreise zum Radius 24,6′ zu dem convexen Centriwinkel 218° 40′ 20″?

Antw. Eine Sehne von 46,42474′ Länge und ein Kreisabschnitt vom Inhalt 1343,883□′.

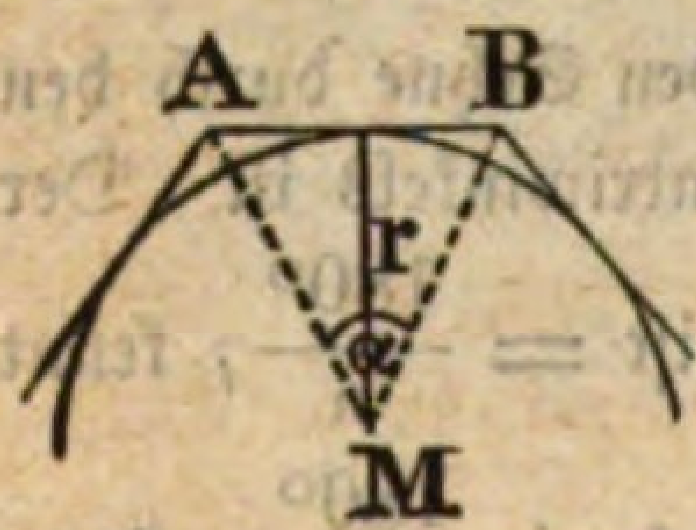
III. **Umfang und Inhalt des regulären n-Ecks im Kreise zum Radius r.** Die Radien nach den Ecken zerlegen das reguläre Polygon in n congruente gleichschenklige Dreiecke. Der Winkel an der Spitze in jedem dieser Dreiecke ist $= \frac{360^\circ}{n}$, die Höhe auf r also $= r.\sin\frac{360^\circ}{n}$, die Sehne $= 2r.\sin\frac{180^\circ}{n}$; daher:

$$\text{Umfang} = n.2r.\sin\frac{180^\circ}{n};\quad \text{Inhalt} = n.\tfrac{1}{2}r^2.\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Beisp. Der Radius eines Kreises sei $= 12{,}8'$; gesucht Umfang und Inhalt des eingeschriebenen regulären 36-Ecks.

Aufl. Umfang $= 80{,}32274'$; Inhalt $= 512{,}1095\square'$.

IV. **Umfang und Inhalt des regulären n-Ecks um den Kreis zum Radius r.** Verbindet man alle Ecken mit dem Mittelpunkt des Kreises, so wird das Polygon in n congruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt. In jedem derselben (z. B. im Δ MAB) ist die Höhe (r) und der Winkel an der Spitze $\left(\alpha = \frac{360^\circ}{n}\right)$ bekannt. Hieraus folgt:



$$\text{Umfang} = n.2r.\text{tg}\frac{180^\circ}{n};\quad \text{Inhalt} = n.r^2.\text{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Beisp. Der Radius eines Kreises sei $= 12{,}8'$; gesucht Umfang und Inhalt des umschriebenen regulären 36-Ecks.

Aufl. Umfang $= 80{,}62956'$; Inhalt $= 516{,}0292\square'$.

V. **Aus der Seite a des regulären n-Ecks den Inhalt desselben zu berechnen.** Verbindet man wieder alle Ecken mit dem Mittelpunkt des Polygons, so entstehen n congruente gleichschenklige Dreiecke, und in jedem derselben ist die Grundlinie a und der Winkel an der Spitze $\frac{360^\circ}{n}$ bekannt. Sonach ist die Höhe $= \frac{a}{2}\,\text{cotg}\frac{180^\circ}{n}$, daher

$$\text{Inhalt} = n\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{cotg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Beisp. Die Seite eines regulären 36-Ecks sei $= 12{,}8'$; wie groß ist der Inhalt?

Antw. Inhalt $= 16854{,}3\square'$.

§. 239.

Uebungen über gleichschenklige Dreiecke und reguläre Polygone.

Aufgabe 1. In einem Rhombus verhalten sich zwei Winkel zu einander wie 3 : 7, die kleinere Diagonale ist 18'; man soll die andere Diagonale und den Inhalt finden.

Aufl. Die Diagonale $= 18\,\text{tg}\,63^\circ = 35{,}327'$ und der Inhalt $= 317{,}943\square'$.

Aufgabe 2. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks sei $=a$, der Winkel an der Grundlinie $=\alpha$; wie groß ist der Inhalt?

Antw. $\dfrac{a^2 \sin 2\alpha}{32\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^4}$.

Aufgabe 3. In welcher Entfernung vom Mittelpunkt muß man in einem Kreise eine Sehne ziehen, wenn sie die 200′ lange Peripherie in zwei Theile nach dem Verhältniß 8 : 19 zerlegen soll?

Antw. In der Entfernung $\frac{100}{\pi} \cdot \cos 53^\circ 20' = 19{,}00815'$.

Aufgabe 4. In einem Kreise zum Radius 10′ ist eine Sehne $= 16'$; wie groß ist der zugehörige kleinere Bogen?

Antw. $10 \cdot \text{arc}\, 106^\circ\, 15'\, 37'' = 18{,}5459'$.

Aufgabe 5. Der Inhalt eines Kreises sei 100□′, ein Bogen $= 6'$; wie groß ist das zugehörige Segment?

Antw. 3,0148□′.

Aufgabe 6. In einem Kreise ist eine Sehne von 40′ Länge 15′ vom Mittelpunkt entfernt; wie groß ist das zur Sehne gehörige kleinere Segment?

Antw. 279,558□′.

Aufgabe 7. Wie groß ist das Segment, welches die 20′ lange Seite des regulären 18-Ecks in einem Kreise von demselben abschneidet?

Antw. $\left(\frac{10}{\sin 10^\circ}\right)^2 \text{arc}\, 10^\circ - 100\, \text{tg}\, 80^\circ = 578{,}8112 - 567{,}1282$ $= 11{,}683$□′.

Aufgabe 8. Im Rhombus ABCD ist ein Winkel gegeben: $\measuredangle BAD = 48^\circ\, 11'\, 22''$. Der Inhalt des Kreises durch die Ecken A, B und D ist $= 20$□′; wie groß ist der Inhalt F des Kreises durch die Ecken A, B und C?

Aufl. Aus §. 190. Nr. 30. folgt:

$F : 20 = (\text{cotg}\, 24^\circ\, 5'\, 41'')^2 : 1$; hieraus $F = 100{,}001$□′.

Aufgabe 9. Der Inhalt eines regulären 11-Ecks ist $= 150$□′; wie groß ist die Seite?

Antw. 4,001995′.

Aufgabe 10. Wie groß ist der Inhalt eines regulären Zehnecks, wenn dessen Umfang dem Umfange eines Kreisabschnittes gleich ist, dessen Bogen 36′ und dessen Centriwinkel 100° ist?

Aufl. Bezeichnet x den zum Bogen 36′ gehörigen Radius, y die Seite und F den Inhalt des Zehnecks, so hat man:

1) $x \cdot \text{arc}\, 100^\circ = 36$.

2) $10y = 36 + 2x \sin 50^\circ$.

$$3)\ F = 10 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{cotg} 18^\circ.$$

Man erhält F = 351,6234□′.

Aufgabe 11. Man kennt die Winkel α, β, γ eines beliebigen Dreiecks und den Radius r des umschriebenen Kreises; wie groß ist der Umfang und der Inhalt des Dreiecks?

Aufl. Verbindet man den Mittelpunkt des Kreises mit den Ecken des Dreiecks, so sind die Centriwinkel gleich 2α, 2β und 2γ; hieraus:

$$\text{Umfang} = 2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 8r\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

$$\text{Inhalt} = \tfrac{1}{2}r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 2r^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Aufgabe 12. Man kennt die Winkel α, β, γ eines Dreiecks und den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises; wie groß ist der Umfang und der Inhalt des Dreiecks?

Antw. $\text{Umfang} = 2\varrho \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$

$\text{Inhalt} = \varrho^2 \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$ (§. 228. Anm. Nr. 6.)

Aufgabe 13. Die Diagonalen eines Rechtecks schneiden sich unter dem Winkel α, jede ist = a; wie groß ist der Inhalt des Rechtecks?

Antw. $\frac{1}{2}a^2 \sin\alpha$.

Aufgabe 14. Der Radius eines Kreises sei 10′, ein Centriwinkel 120°; wie groß ist der Centriwinkel, dessen Sehne die Hälfte der Sehne des gegebenen Centriwinkels ist?

Antw. 51° 19′ 4″.

Aufgabe 15. Der Inhalt eines Kreises sei 125□′; wie groß ist der Umfang und der Inhalt des regulären 14-Ecks um diesen Kreis?

Antw. Umfang = 40,31218′ und Inhalt = 127,1412□′.

Aufgabe 16. Ein Bogen eines Kreises sei = 20′, der zugehörige Centriwinkel = 32°; wie groß ist die Sehne?

Antw. 19,74108′.

Aufgabe 16. Im Δ ABC ist $\measuredangle$ ABC = 90°, und es verhält sich AB : BC = 408 : 985. Schlägt man um das Dreieck einen Kreis, so ist der zwischen A und B liegende Bogen = 100′; wie groß sind die Seiten des Δ ABC?

Antw. AC = 254,6479′; AB = 97,4495′; BC = 235,264′.

Aufgabe 17. In einem Kreise ist eine Sehne von 10′ Länge Seite des regulären 9-Ecks; wie groß ist der zur Sehne gehörige Bogen und Kreisabschnitt?

Antw. 10,206′ und 5,914□′.

Aufgabe 18. Der Umfang eines regulären 9-Ecks sei 300′; wie groß ist der Umfang eines regulären 15-Ecks, welches mit dem 9-Eck gleichen Inhalt hat?

Antw. 295,9715′.

Aufgabe 19. Wie groß ist der Inhalt einer Figur, welche aus einem Quadrat zur Seite a und vier angesetzten gleichschenkligen Dreiecken besteht, von denen jedes eine Seite des Quadrats zur Grundlinie und den Winkel α zum Winkel an der Spitze hat?

Antw. $a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\cos\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

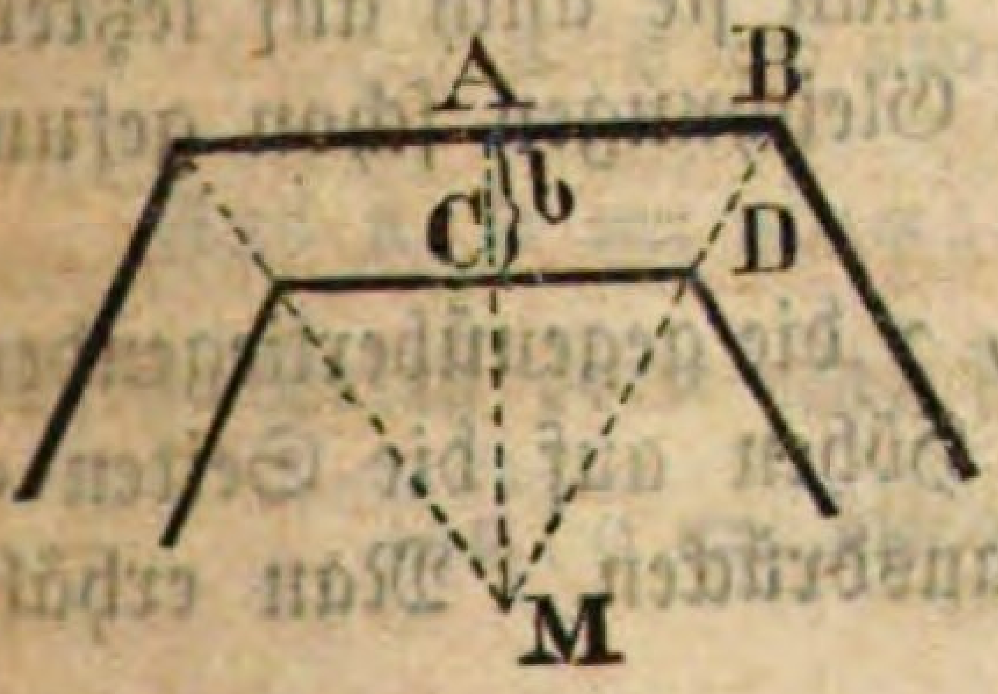
Aufgabe 20. Eine Eisenbahn soll aus der Richtung AB in die mit AB parallele Richtung CD mittelst zweier Kreisbogen geleitet werden. Der eine Bogen soll AB in B berühren und nach dem Mittelpunkte M der Linie BC gehen; der andere soll von M nach C führen und CD in C berühren. (Hieraus ergiebt sich dann geometrisch, daß die beiden Bogen in M eine gemeinschaftliche Tangente haben.) Fällt man CF senkrecht auf die Richtung AB, so sei CF = 280° und BF = 960°; es soll die Länge der Bahn zwischen B und C berechnet werden.



Aufl. Zu jedem beider Bogen gehört ein Radius von $892\frac{6}{7}$° und ein Centriwinkel von 32° 31′ 13″; die Länge der Bahn ist 1013,546 Ruthen.

Aufgabe 21. Wie groß muß die Seite einer geschlossenen Schanze (reguläres n-Eck) sein, wenn die an der Brustwehr Platz findenden Vertheidiger im Inneren hinreichend Lagerraum haben sollen? Es sei die Anzahl der Fuß für jeden Vertheidiger an der Feuerlinie = p, die Anzahl der Quadratfuß Lagerraum für jeden Mann = q und die Breite des nicht zum Lagerraum zu rechnenden Streifens = b Fuß. Aus der allgemeinen Formel soll die Ausrechnung für folgende Werthe erfolgen: das Polygon sei ein reguläres Fünfeck; p = 2, q = 18, b = 10.

Aufl. Denkt man sich den Mittelpunkt M des Polygons mit allen Ecken verbunden, auf jede Seite auch noch von M aus eine Senkrechte gefällt, so wird das Polygon in 2n congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Ist Δ MAB ein solches Dreieck, CD die Grenze des Lagerraumes, so ist die Aufgabe auf die reducirt: es sollen die an AB Platz findenden Vertheidiger im



Δ MCD hinreichend Lagerraum haben. Bekannt ist AC = b, $\measuredangle$ AMB $= \frac{180°}{n}$. Es sei AB = x Fuß, so ist

$$CD = x - b \, . \, tg \frac{180°}{n} \text{ und } \Delta MCD = \tfrac{1}{2}\left(x - b \, . \, tg \frac{180°}{n}\right)^2 . \, cotg \frac{180°}{n}.$$

Weil nun $\frac{AB}{p}$ die Anzahl der Vertheidiger an der Feuerlinie AB ist, $\frac{\Delta MCD}{q}$ aber die Anzahl der Vertheidiger, welche im Δ MCD lagern können, so muß

$$\frac{1}{2q}\left(x - b \, . \, tg \frac{180°}{n}\right)^2 . \, cotg \frac{180°}{n} \geqq \frac{x}{p}$$

sein, wobei das Zeichen = gilt, wenn die geringste Länge von AB gesucht wird. Bezeichnet man $\frac{q}{p}$ durch k, $\frac{180°}{n}$ durch φ, so ist die gesuchte Relation zwischen x und b:

$$(x - b \, . \, tg \varphi)^2 . \, cotg \varphi \geqq 2k \, . \, x.$$

Hieraus folgt aber:

$$x \, . \, cotg \varphi \geqq b + k + \sqrt{2bk + k^2}.$$

$x \, . \, cotg \varphi$ ist aber der Abstand jeder Seite des Polygons vom Mittelpunkt.

Für die in der Aufgabe angebenen Zahlenwerthe ist

$x \geqq (19 + \sqrt{261})$ tg 36°, oder die ganze Seite $2x \geqq 51{,}0839'$.

Von der Berechnung der ungleichseitigen Dreiecke.

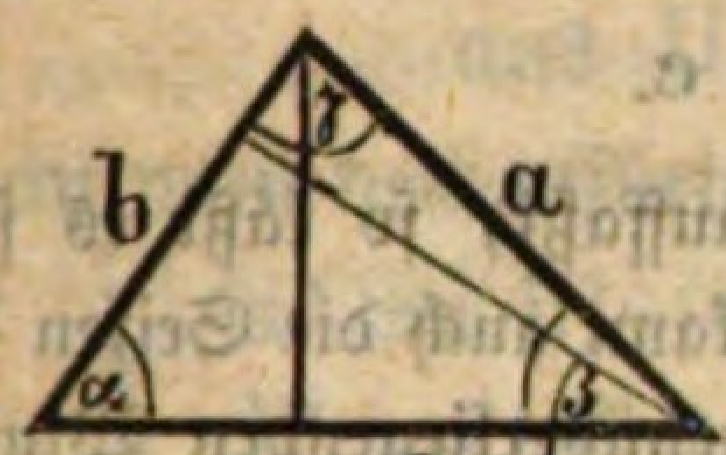
§. 240.

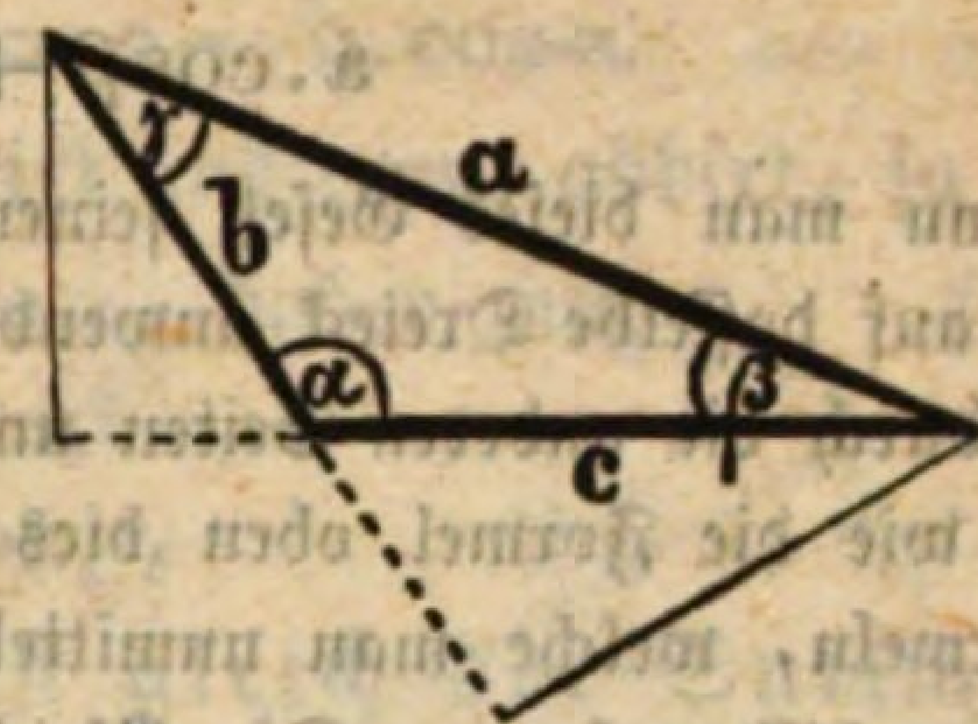
Gleichungen zwischen den Seiten und den trigonometrischen Functionen der Winkel eines schiefwinkligen Dreiecks.

Wenn von den sechs Stücken eines Dreiecks: den drei Seiten und den drei Winkeln, drei bestimmende Stücke gegeben sind, so ist durch sie das Dreieck bestimmt, also sind es auch die nicht gegebenen Stücke. Es sollen hier die Gleichungen entwickelt werden, welche zur Berechnung der unbekannten Stücke dienen. Diese Gleichungen sind allgemein richtig, d. h. für spitzwinklige und für stumpfwinklige Dreiecke; ja auch für rechtwinklige, wenn man sie auch auf letztere nicht anwendet, weil für solche bequemere Gleichungen schon gefunden sind.

1) Bezeichnen a, b, c die Seiten, α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks, und fällt man die Höhen auf die Seiten c und b: so kann man jede Höhe doppelt ausdrücken. Man erhält

dann, je nachdem das Dreieck spitz oder stumpfwinklig ist, folgende Gleichungen:





$$a . \sin\beta = b . \sin\alpha \quad \text{und} \quad a . \sin\beta = b . \sin(180° - \alpha)$$
$$a . \sin\gamma = c . \sin\alpha \quad\quad\quad a . \sin\gamma = c . \sin(180° - \alpha).$$

Weil nun aber $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ ist, so gelten die aus dem spitzwinkligen Dreieck entwickelten Gleichungen auch für das stumpfwinklige. Auch für das rechtwinklige sind sie richtig; denn ist $\alpha = 90°$, sind also b und c Katheten und ist $\sin\alpha = \sin 90° = 1$, so gehen die Gleichungen in die richtigen über:

$$a . \sin\beta = b \quad \text{und} \quad a . \sin\gamma = c.$$

Aus jenen Gleichungen folgen aber die Proportionen:

$$(1.) \quad a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$
$$(2.) \quad a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$$

und aus ihnen ergiebt sich die laufende Proportion:

$$\text{I.} \qquad a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

d. h. in jedem Dreieck verhalten sich die Seiten zu einander wie die sin. der gegenüberliegenden Winkel.

In diesem Gesetze liegen zwei von einander unabhängige Gleichungen, und nimmt man zu ihnen als dritte Gleichung hinzu

$$(3.) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

so hat man drei Gleichungen, welche alle hierher gehörige Aufgaben lösen.

Weil aber in den meisten Fällen die Auflösung nicht einfach wird, so leitet man aus diesen drei Gleichungen noch andere Gesetze ab, die aber auch aus der Figur selbst entwickelt werden können.

2) Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ folgt, daß $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ ist; daher ergiebt sich aus I.:

$$a : c = \sin\alpha : \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta.$$

Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ folgt aber $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$; setzt man diesen Werth oben ein, so folgt:

$$a : c = \sin\alpha : \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha \frac{b}{a} \sin\alpha.$$

Hebt man rechts durch $\sin\alpha$ und bildet dann die Producte der äußern und innern Glieder, so entsteht:

$$a.\cos\beta + b.\cos\alpha = c.$$

Wenn man dieses Gesetz seinem Sinne nach auffaßt, so läßt es sich noch zweimal auf dasselbe Dreieck anwenden; d. h. man kann auch die Seiten b und a eben so durch die anderen Seiten und die ihnen gegenüberliegenden Winkel ausdrücken, wie die Formel oben dies in Bezug auf c thut. So entstehen noch zwei Formeln, welche man unmittelbar aus der obigen durch Vertauschen der Buchstaben bilden kann. Die Gleichung I. hat die Eigenschaft, daß sie richtig bleibt, wenn man zwei beliebige Seiten, aber auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel mit einander vertauscht, und die Gleichung (3.), welche keine Seiten enthält, läßt das Vertauschen zweier beliebigen Winkel zu. Dies hat aber die Folge, daß alle Gleichungen, welche aus I. und (3.) sich entwickeln lassen, ebenfalls richtig bleiben, wenn man zwei Seiten, aber auch die gegenüberliegenden Winkel mit einander vertauscht. Vertauscht man also in

$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c$$

b mit c, und zugleich β mit γ (d. h. setzt man γ statt β), so folgt:

$$a\cos\gamma + c\cos\alpha = b;$$

vertauscht man aber a mit c, also auch α mit γ, so entsteht:

$$c\cos\beta + b\cos\gamma = a.$$

Natürlich kann man auch die beiden letzten Formeln eben so aus I. und (3.) entwickeln, wie die erste Formel oben entwickelt wurde. — Das Gesagte gilt auch für alle in diesem §. noch folgenden Formeln, ohne daß darauf besonders aufmerksam gemacht werden soll. (Man vergleiche die Anm. zu §. 182.)

Man hat also jetzt das Gesetz:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} a.\cos\beta + b.\cos\alpha = c, & \text{und eben so:} \\ a.\cos\gamma + c.\cos\alpha = b \\ b.\cos\gamma + c.\cos\beta = a, \end{cases}$$

d. h. jede Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede der beiden andern Seiten mit dem cos. des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten Seite bildet.

Diese Gleichungen ergeben sich aus der Figur unmittelbar, wenn man die beiden Abschnitte addirt oder subtrahirt, in welche jede Seite durch die Höhe zerlegt wird. Diese Abschnitte sind die Projectionen der beiden andern Seiten auf die erste, und sie werden subtrahirt, wenn der eine der Seite anliegende Winkel (z. B. α) stumpf ist. Da aber $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ ist, so geht die Subtraction, wenn man für den spitzen Winkel $180-\alpha$ seinen Nebenwinkel α setzt, in der Formel in eine Addition über.

3) Ferner folgt:

aus I.: $a.\sin\beta = b.\sin\alpha$,

aus II.: $a.\cos\beta = c - b.\cos\alpha$.

Wenn man beide Gleichungen quadrirt und dann addirt, so folgt:

$$\text{III.}\ \left\{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha, \text{ daher auch:} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma, \end{array}\right.$$

d. h. **das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten minus dem doppelten Product dieser beiden andern Seiten multiplicirt mit dem cos. des eingeschlossenen Winkels.**

Dieses Gesetz ist nichts weiter, als der im §. 64. enthaltene allgemeine Pythagoreische Lehrsatz; die Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

kann nach jenem Satze **aus der Figur** unmittelbar hingeschrieben werden, wenn man nur bedenkt, daß $b\cos\alpha$ die Projection von b auf c ist. Diese Projection $b\cos\alpha$ ist positiv oder negativ, je nachdem α spitz oder stumpf ist; im letzteren Falle ist $180 - \alpha$ spitz, und die Gleichung geht dann über in

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180^\circ - \alpha).$$

Das Doppelzeichen $\pm$ des Satzes in §. 64. liegt also in der trigonometrischen Form jenes Lehrsatzes in dem Factor $\cos\alpha$ verborgen und kommt erst bei der practischen Ausrechnung, wo man alle Winkel auf spitze reduciren muß, zum Vorschein.

4) Weiter folgt noch aus I.:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta; \text{ daher}$$

$$a + b : a - b = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta.$$

Wendet man nun die Formel XXIII. an, so folgt

$$\text{IV.}\ \left\{\begin{array}{l} a + b : a - b = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}, \text{ daher auch:} \\ a + c : a - c = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2} \\ b + c : b - c = \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}, \end{array}\right.$$

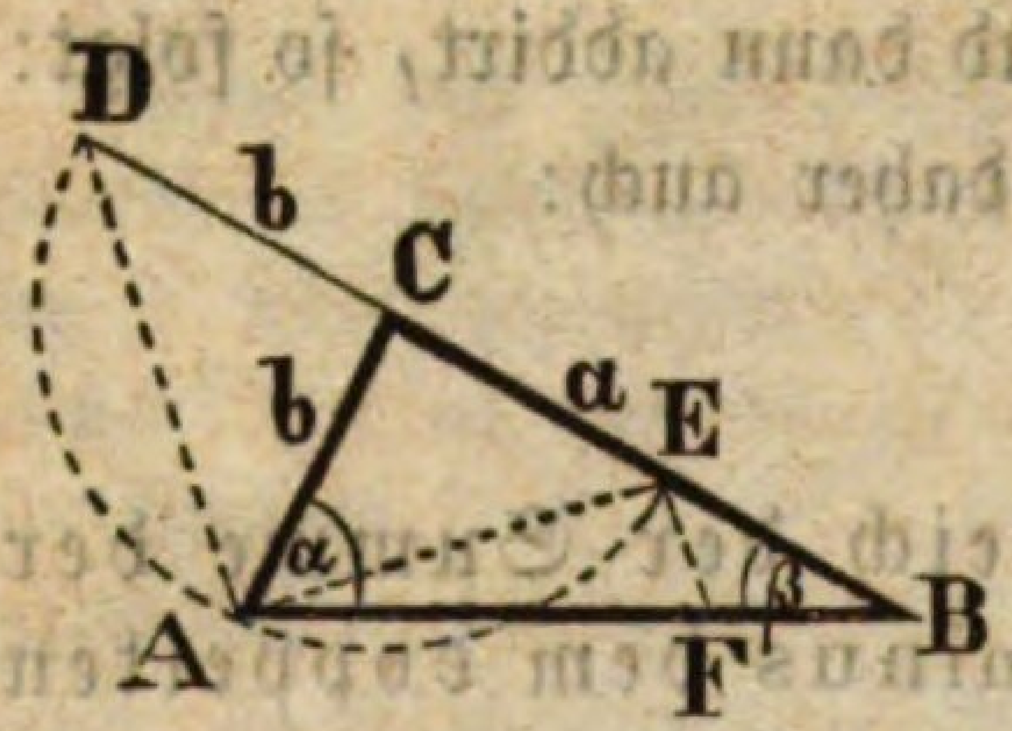
d. h. **in jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die tg. der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur tg. der halben Differenz derselben.**

Ist $a < b$, so wird man lieber schreiben:

$$b + a : b - a = \operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2},$$

obwohl die erste Gleichung in IV. auch für diesen Fall richtig bleibt; nur sind dann beide Seiten negativ.

Um auch dieses Gesetz aus der Figur zu entwickeln, schlage man mit



CA = b um C einen Kreis, welcher die Richtung BC in D und E schneidet; dann ist BD = a + b und BE = a — b.

Zieht man nun AD und AE und durch E die Linie EF ∦ DA, so hat man: a + b : a — b = DA : EF. Weil aber DA und EF auf AE senkrecht sind, so folgt:

$$a + b : a - b = AE \,.\, \mathrm{tg} \measuredangle AED : AE \,.\, \mathrm{tg} \measuredangle EAF.$$

Nun ist aber $\measuredangle AED = \frac{1}{2} \measuredangle ACD = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, als Peripheriewinkel zu dem Centriwinkel ACD, und $\measuredangle EAF = \measuredangle AED - \measuredangle ABE = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$; daher

$$a + b : a - b = \mathrm{tg}\frac{\alpha + \beta}{2} : \mathrm{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Anmerkung. Aus dem Gesetz I.:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

folgt auch noch

$$a + b : c = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\gamma$$
$$= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha - \beta}{2} : 2\sin\frac{\gamma}{2} \,.\, \cos\frac{\gamma}{2}$$

und $$a - b : c = \sin\alpha - \sin\beta : \sin\gamma$$
$$= 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \sin\frac{\alpha - \beta}{2} : 2\sin\frac{\gamma}{2} \,.\, \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Weil aber $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$ und $\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$ ist, so ergeben sich die beiden Formeln:

$$(1.) \quad a + b : c = \cos\frac{\alpha - \beta}{2} : \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$(2.) \quad a - b : c = \sin\frac{\alpha - \beta}{2} : \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

d. h. in jedem Dreieck verhält sich die Summe (Differenz) zweier Seiten zur dritten Seite, wie der cos. (sin.) der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel zum cos. (sin.) der halben Summe derselben.

Dieses Gesetz ist auch leicht aus der vorstehenden Figur abzuleiten, wenn man das Gesetz I. auf die ΔΔ ABD und ABE anwendet. Es ist

$$\measuredangle DAB = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ und } \measuredangle EAB = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

5) Endlich folgt aus III.:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha \text{ noch:}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Nun ist aber

$$2\sin\frac{\alpha^2}{2} = 1 - \cos\alpha \text{ und } 2\cos\frac{\alpha^2}{2} = 1 + \cos\alpha; \text{ daher:}$$

$$2\sin\frac{\alpha^2}{2} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$2\cos\frac{\alpha^2}{2} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Bezeichnet man wieder wie früher $a + b + c$ durch $2s$, so folgt

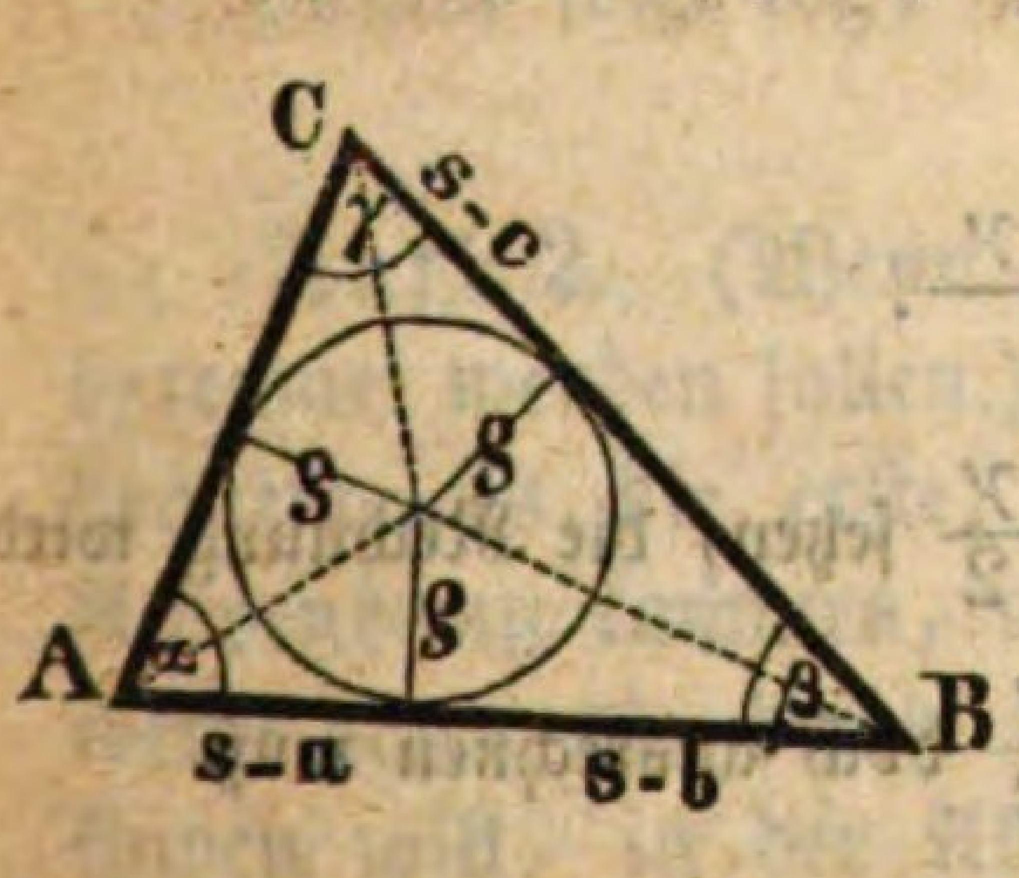
$$(1.)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

$$(2.)\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Division:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \text{ daher auch:} \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \end{cases}$$

Auch dieses Gesetz läßt sich unmittelbar aus der Figur entnehmen. Construirt man in das $\triangle ABC$ den berührenden Kreis, zieht nach jedem Berührungspunkt den Radius ϱ und verbindet noch den Mittelpunkt des Kreises mit den drei Ecken, so werden die Winkel des Dreiecks durch diese Linien halbirt, die Berührungspunkte aber haben nach §. 188. V. von den Ecken die in die Figur eingeschriebenen Entfernungen. Man hat also unmittelbar:



$$(3.)\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a};\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b};\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Setzt man aber für ϱ seinen Werth (§. 188. I.)

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

so erhält man die Formeln in V.

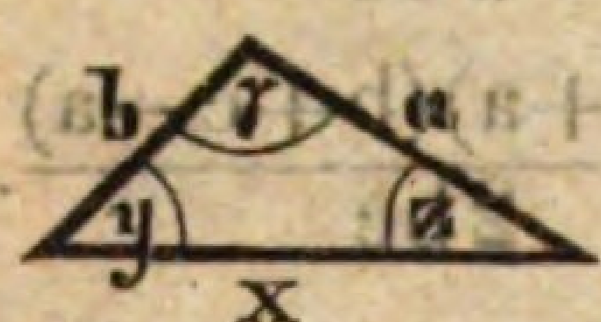
§. 241.

Die Grundaufgaben über schiefwinklige Dreiecke.

Die nachstehenden Aufgaben schließen sich in ihrer Folge den Lehrsätzen von der Congruenz der Dreiecke an; ihre Auflösung erfolgt durch die im vorigen §. entwickelten Gesetze.

Aufgabe 1.

Gegeben sind zwei Seiten a und b eines Dreiecks und der eingeschlossene Winkel γ; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt F berechnen.



Aufl. 1. (Wenn zuerst die unbekannten Winkel y und z und dann die Seite x berechnet werden soll.) Man hat folgende Gleichungen:

1) $a + b : a - b = \operatorname{tg}\frac{y+z}{2} : \operatorname{tg}\frac{y-z}{2}$.

2) $y + z + \gamma = 180°$.

3) $x : a = \sin\gamma : \sin y$.

Setzt man aus 2) $\frac{y+z}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$ in 1) ein, so folgt:

$$a + b : a - b = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) : \operatorname{tg}\frac{y-z}{2}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg}\frac{y-z}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg}\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Man kann jetzt $\frac{y-z}{2}$ mittelst der Tafeln berechnen, und da $\frac{y+z}{2}$ bekannt ist, so findet man (durch Addition und Subtraction beider Winkel) y und z.

Aus 3) ergiebt sich dann $x = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin y}$.

Statt $\operatorname{tg}\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$ kann man auch $\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$ setzen; die Rechnung wird aber dadurch nicht erleichtert, weil man $90° - \frac{\gamma}{2}$ doch ausrechnen muß.

Im Falle nur die Seite gesucht wird, kann man auch, nachdem $\frac{y-z}{2}$ gefunden ist, ohne y und z selbst auszurechnen, x nach einer der beiden in §. 240. Nr. 4. Anm. entwickelten Formeln finden. Man hat dann zur Berechnung von x die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{y-z}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \text{ und}$$

$$x = \frac{(a+b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{y-z}{2}}, \text{ oder } x = \frac{(a-b) \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{y-z}{2}}.$$

Um den Inhalt F zu finden, hat man die Höhe auf a gleich $b \sin\gamma$; folglich ist

$$4) \quad F = \tfrac{1}{2} ab . \sin\gamma,$$

d. h. der Inhalt jedes Dreiecks ist gleich dem halben Product zweier Seiten multiplicirt mit dem sin. des eingeschlossenen Winkels.

Beisp. Zwei Seiten sind 10,342′ und 9,658′; der eingeschlossene Winkel $= 107^\circ\ 44'\ 15''$.

Aufl. Man erhält $\operatorname{tg}\frac{y-z}{2} = 0{,}0342 . \operatorname{tg} 36^\circ\ 7'\ 52{,}5''$

$$\log \operatorname{tg}\frac{y-z}{2} = 8{,}3973777 - 10.$$

Hieraus $\frac{y-z}{2} = 1^\circ\ 25'\ 48{,}8''$ und

$\frac{y+z}{2} = 36^\circ\ 7'\ 52{,}5''$; folglich

$y = 37^\circ\ 33'\ 41''$ und $z = 34^\circ\ 42'\ 4''$.

Aus $x = \frac{10{,}342 . \sin 72^\circ\ 15'\ 45''}{\sin 37^\circ\ 33'\ 41''}$ folgt:

$\log x = 1{,}2083995$; folglich

$x = 16{,}15844'$.

Endlich ist $F = \frac{1}{2} . 10{,}342 . 9{,}658 . \sin 72^\circ\ 15'\ 45''$.

Hieraus folgt $\log F = 1{,}6773095$; daher:

$$F = 47{,}5674 \square'.$$

Aufl. 2. (Wenn zuerst die dritte Seite und aus dieser die Winkel berechnet werden sollen.) Diese Auflösung ist im Allgemeinen weniger bequem als die erste; sie würde daher in der Regel nur dann zur Anwendung kommen, wenn die dritte Seite allein gesucht wird, oder wenn man die dritte Seite unmittelbar aus den gegebenen Stücken finden will, in der Absicht, daß ein etwa gemachter Fehler auf die Berechnung der Seite ohne Einfluß bleibe, oder wenn man durch die zweite Auflösung die Richtigkeit der ersten prüfen will.

Man hat folgende Gleichungen:

1) $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos\gamma$

2) $x : a = \sin\gamma : \sin y$

3) $\gamma + y + z = 180^\circ$

Aus 1) berechnet man x, aus 2) y und aus 3) z. Zur Berechnung von x kann man aber der rechten Seite in 1) eine bequemere Form geben. Es ist

$$x^2 = (a-b)^2 + 2ab - 2ab.\cos\gamma$$

$$x^2 = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos\gamma)$$

$$x^2 = (a-b)^2 + 4ab.\sin\frac{\gamma^2}{2}.$$

Wendet man jetzt das in §. 231. angegebene Verfahren an, so ist

$$x^2 = (a-b)^2 . \left[1 + \frac{4ab.\sin\frac{\gamma^2}{2}}{(a-b)^2}\right].$$

Setzt man nun: (1.) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{a-b}.\sqrt{ab}$,

so folgt: (2.) $x = \dfrac{a-b}{\cos\varphi}$.

Beisp. Zwei Seiten sind 8′ und 5′, der eingeschlossene Winkel = 124°.

Aufl. Man findet:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2.\sin 62^\circ}{3}.\sqrt{40}; \quad \log\operatorname{tg}\varphi = 10{,}5708736 - 10$$

$$\varphi = 74^\circ\ 57'\ 52{,}3''.$$

$$x = \frac{3}{\cos 74^\circ\ 57'\ 52{,}3''}; \quad \log x = 1{,}0631228$$

$$x = 11{,}564392'.$$

Ferner ist $\sin y = \dfrac{8\sin 56^\circ}{x}$; $\log\sin y = 9{,}7585414 - 10$

$$y = 34^\circ\ 59'\ 43''; \text{ daher } z = 21^\circ\ 0'\ 17''.$$

Endlich findet man F = 16,58075 □′.

Anm. In Bezug auf die 2te Auflösung ist noch zu bemerken, daß aus $\sin y = \dfrac{a\sin\gamma}{x}$ sich zwei Winkel für y ergeben: ein spitzer und sein stumpfer Nebenwinkel. Einer von beiden Winkeln kann nur der richtige sein; welcher es ist, muß in jedem Falle untersucht werden. In dem vorstehenden Beispiele kann y nur spitz sein, weil das Dreieck bereits einen stumpfen Winkel hat; ist aber die y gegenüberliegende Seite die größte im Dreieck, so muß man die Untersuchung nach §. 66. führen. Man wird aber wohl thun, von den beiden Winkeln y und z den kleineren zuerst zu berechnen, denn der muß spitz sein; der andere ergiebt sich dann aus der Gleichung 3) ohne weitere Untersuchung.

Endlich mag noch angeführt werden, daß die Gleichung 1) auch so umgeformt werden kann:

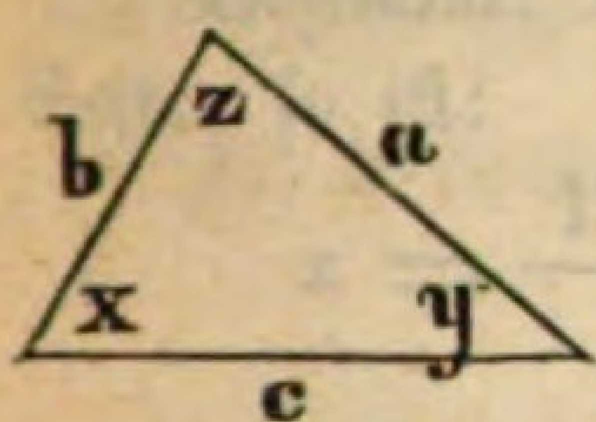
$$x^2 = (a+b)^2 - 2ab - 2ab.\cos\gamma$$

$$x^2 = (a+b)^2 - 2ab\,(1 + \cos\gamma)$$

$$x^2 = (a+b)^2 - 4ab \,.\, \cos\frac{\gamma^2}{2}, \text{ u. s. w. nach §. 231.}$$

Aufgabe 2.

Es sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben; man soll die Winkel x, y, z und den Inhalt F berechnen.



Aufl. 1. Nur wenn die Seiten Zahlen mit wenig Ziffern sind, etwa ein- oder zweiziffrige Zahlen, ist die unmittelbare Berechnung eines Winkels aus dem Gesetz III. zu empfehlen. Man hat dann:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos x$.

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos y$ (oder $a : b = \sin x : \sin y$).

3) $x + y + z = 180°$.

Den Inhalt kann man entweder nach der in der algebraischen Geometrie entwickelten Formel, oder aus $F = \frac{1}{2} bc . \sin x$ berechnen.

Beisp. 1. Die Seiten sind 25′, 17′ und 12′.

Aufl. Aus $25^2 = 17^2 + 12^2 - 2 . 17 . 12 . \cos x$

folgt $\cos x = -\frac{8}{17}$ und $x = 118° \; 4' \; 21''$.

Aus $17^2 = 25^2 + 12^2 - 2 . 25 . 12 . \cos y$

folgt $\cos y = 0{,}8$ und $y = 36° \; 52' \; 12''$.

Hieraus dann $z = 25° \; 3' \; 27''$; endlich ist F = 90□′

Beisp. 2. Die drei Seiten sind 8′, 9′ und 13′.

Aufl. Will man negative Functionen vermeiden, so berechne man zuerst den kleinsten Winkel, dann den nächst größeren und zuletzt den größten. Man findet die Winkel: 37° 21′ 24″, 43° 2′ 56″ und 99° 35′ 40″.

Auflösung 2. In allen Fällen recht bequem ist die Auflösung der vorliegenden Aufgabe durch das Gesetz V.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s.(s-a)}};\; \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s.(s-b)}};\; \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s.(s-c)}}.$$

Man hat nur vier Logarithmen zur Berechnung aller drei Winkel aufzuschlagen und kann die Rechnung am Schlusse durch die Gleichung $x + y + z = 180°$ prüfen.

Etwas bequemer wird die Rechnung, wenn man alle drei Winkel berechnen will, noch dadurch, daß man zunächst

$$\log \varrho = \log \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

bestimmt und dann aus 5) Nr. (3.) im vorigen §. entnimmt:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\varrho}{s-a},\; \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{\varrho}{s-b},\; \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Im Falle nur ein Winkel berechnet werden soll, ist auch der Gebrauch einer der Formeln (1) und (2) unter 5) im vorigen §. zu empfehlen.

Beisp. Die drei Seiten sind 15,506′, 10,246′ und 7,348′; wie groß sind die Winkel?

Aufl. $s = 16{,}550$; $\log s = 1{,}2187980$.
$s - a = 1{,}044$; $\log(s-a) = 0{,}0187005$.
$s - b = 6{,}304$; $\log(s-b) = 0{,}7996162$.
$s - c = 9{,}202$; $\log(s-c) = 0{,}9638822$.
$\log \varrho = 0{,}2817005$.

$$\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 10{,}2630000 - 10; \quad \frac{x}{2} = 61^\circ\ 22'\ 34''.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 9{,}4820843 - 10; \quad \frac{y}{2} = 16^\circ\ 52'\ 49''.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{z}{2} = 9{,}3178183 - 10; \quad \frac{z}{2} = 11^\circ\ 44'\ 14''.$$

Hiernach ist also $x = 122^\circ\ 45'\ 8''$,
$y = 33^\circ\ 45'\ 38''$,
$z = 23^\circ\ 29'\ 14''$.

Anm. In einzelnen Fällen kann es auch bequem sein, einen Winkel, z. B. x, dadurch zu berechnen, daß man den Inhalt F des Dreiecks doppelt ausdrückt:

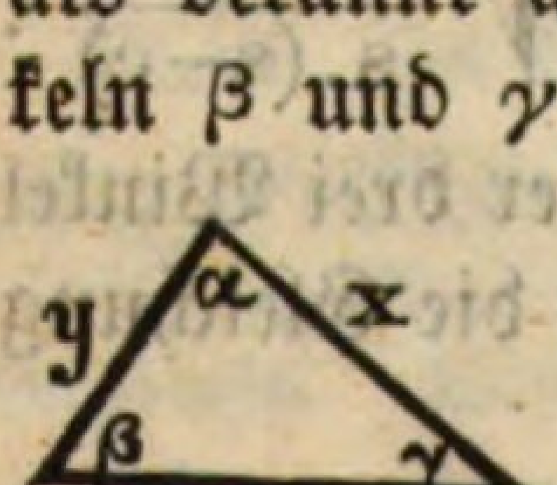
$$\tfrac{1}{2} bc \sin x = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ist x der größte Winkel im Dreieck, so muß aber besonders untersucht werden, ob x spitz oder stumpf ist.

Aufgabe 3.

Es ist eine Seite a eines Dreiecks gegeben, und zwei beliebige Winkel; man soll die andern Stücke und den Inhalt berechnen.

Aufl. Da $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist, können alle drei Winkel als bekannt angenommen werden. Bezeichnen x und y die den Winkeln β und γ gegenüberliegenden Seiten, so hat man:



1) $a : x = \sin\alpha : \sin\beta$, folglich $x = \dfrac{a . \sin\beta}{\sin\alpha}$.

2) $a : y = \sin\alpha : \sin\gamma$, „ $y = \dfrac{a . \sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Um den Inhalt F zu finden, hat man zunächst: $F = \frac{1}{2} ax . \sin\gamma$, und substituirt man den Werth für x, so folgt:

$$3)\quad F = \frac{a^2 . \sin\beta . \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{a^2 . \sin\beta . \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}.$$

d. h. der Inhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Quadrat einer Seite multiplicirt mit dem Product der sin. der anlie-

genden Winkel, dividirt durch den doppelten sin. des gegenüberliegenden Winkels.

Beisp. Eine Seite eines Dreiecks sei $= 12{,}734'$ und die beiden anliegenden Winkel gleich $21^\circ\ 12'\ 14''$ und $110^\circ\ 24'\ 30''$; wie groß sind die anderen Stücke und der Inhalt?

Aufl. Der dritte Winkel $= 48^\circ\ 23'\ 16''$.

Bezeichnet x die dem kleinsten, y die dem größten Winkel gegenüberliegende Seite, so ist:

$$x = \frac{12{,}734 \,.\, \sin 21^\circ\ 12'\ 14''}{\sin 48^\circ\ 23'\ 16''}; \qquad \log x = 0{,}7895966$$

$$x = 6{,}160225'.$$

$$y = \frac{12{,}734 \,.\, \sin 69^\circ\ 35'\ 30''}{\sin 48^\circ\ 23'\ 16''}; \qquad \log y = 1{,}2031095$$

$$y = 15{,}962816'.$$

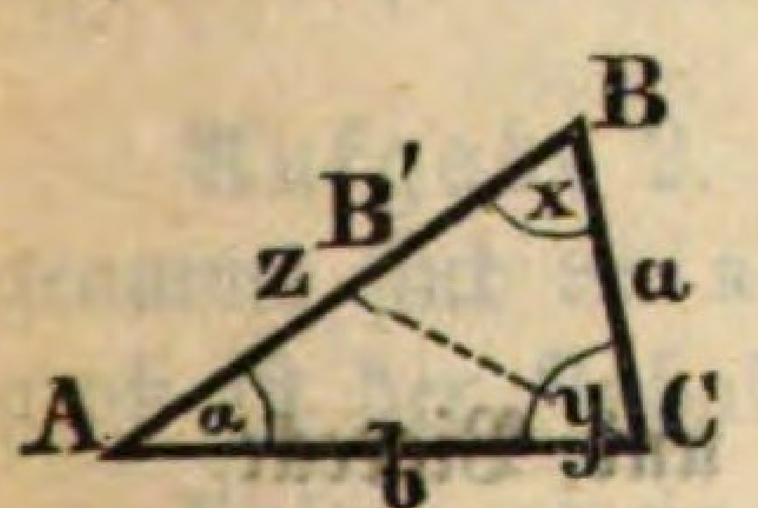
$$F = \tfrac{1}{2} \,.\, 12{,}734 \,.\, y \,.\, \sin 21^\circ\ 12'\ 14''; \quad \log F = 1{,}5653782$$

$$F = 36{,}76023\,\square'.$$

Aufgabe 4.

Es sind zwei Seiten a und b eines Dreiecks gegeben, und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α; man soll die andern Stücke und den Inhalt berechnen.

Aufl. Bezeichnet x den b gegenüberliegenden Winkel, y den andern unbekannten Winkel und z die unbekannte Seite, so hat man:



1) $a : b = \sin\alpha : \sin x.$

2) $\alpha + x + y = 180^\circ.$

3) $z : a = \sin y : \sin\alpha.$

Aus 1) folgt: $\sin x = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha.$

Hieraus ergeben sich im Allgemeinen zwei Werthe für x: ein spitzer Winkel und sein stumpfer Nebenwinkel.

Ist $a > b$, so kann x nur spitz sein, und das Dreieck ist in diesem Falle bestimmt; aus 2) und 3) ergeben sich y und z.

Ist $a < b$, so giebt es bekanntlich zwei Dreiecke mit den gegebenen Stücken (die $\Delta\,\Delta$ ABC und AB'C); die vorstehende Auflösung giebt auch beide Dreiecke. Der Winkel x ist dann sowohl der in den Tafeln befindliche spitze Winkel ($\measuredangle$ ABC), als auch sein Supplement ($\measuredangle$ AB'C); je nachdem man dann den einen oder den andern Werth von x in 2) setzt, erhält man für y auch die zwei Winkel ACB und ACB'; endlich folgen aus 3) auch zwei Werthe für z (die Seiten AB und AB'). Den Inhalt des Dreiecks berechnet man aus zwei belie-

bigen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, z. B. $F = \frac{1}{2} ab . \sin y$; auch für F ergeben sich, wenn $a < b$ ist, zwei Werthe.

Beisp. Zwei Seiten eines Dreiecks sind 10,973′ und 15,08′, und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel ist 18° 20′ 23″; wie groß sind die anderen Stücke und der Inhalt?

Aufl. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen; man findet, wenn ∠ x und ∠ y resp. der größeren gegebenen und der unbekannten Seite z gegenüberliegen:

$$\sin x = \frac{15{,}08 . \sin 18^\circ\ 20'\ 23''}{10{,}973}; \ \log \sin x = 9{,}6359045 - 10;$$

$$1) \begin{cases} x_1 = 25^\circ\ 37'\ 16''. \\ x_2 = 154^\circ\ 22'\ 44''. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y_1 = 136^\circ\ 2'\ 21''. \\ y_2 = 7^\circ\ 16'\ 53''. \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{10{,}973 . \sin 43^\circ\ 57'\ 39''}{\sin 18^\circ\ 20'\ 23''}; \ \log z_1 = 1{,}3839604.$$

$$z_2 = \frac{10{,}973 . \sin 7^\circ\ 16'\ 53''}{\sin 18^\circ\ 20'\ 23''}; \ \log z_2 = 0{,}6454187.$$

$$3) \begin{cases} z_1 = 24{,}208083'. \\ z_2 = 4{,}419964'. \end{cases}$$

$$F_1 = \tfrac{1}{2} . 15{,}08 . \sin 18^\circ\ 20'\ 23'' \times z_1; \ \log F_1 = 1{,}7591603.$$

$$F_2 = \tfrac{1}{2} , 15{,}08 . \sin 18^\circ\ 20'\ 23'' \times z_2; \ \log F_2 = 1{,}0206186.$$

$$4) \begin{cases} F_1 = 57{,}43284 \square'. \\ F_2 = 10{,}48621 \square'. \end{cases}$$

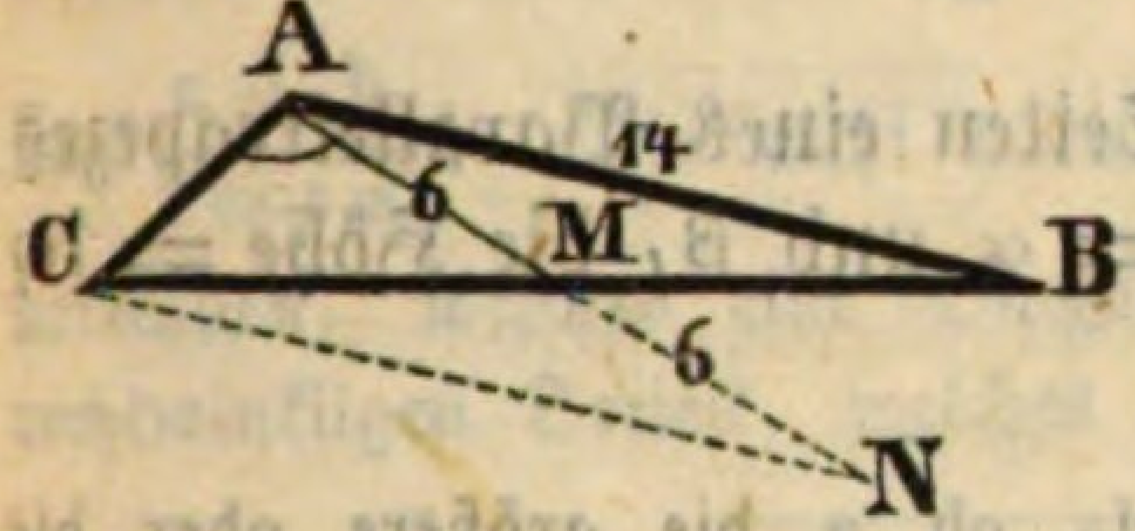
§. 242.

Uebungs-Aufgaben über schiefwinklige Dreiecke und Vierecke.

Die Aufgabe »aus gegebenen Stücken einer Figur unbekannte durch Rechnung zu finden«, welche in der algebraischen Geometrie nur unvollkommen gelöst werden konnte, hat jetzt durch die Trigonometrie auch dann ihre Auflösung erhalten, wenn unter den gegebenen oder gesuchten Stücken beliebige Winkel sind. Man bezeichnet die unbekannten Stücke durch x, y u. s. w. und bildet nun die nöthigen Gleichungen auch mit Benutzung trigonometrischer Gesetze. Da Vielecke in Dreiecke zu zerlegen sind, so ergiebt sich hieraus auch die Möglichkeit der Auflösung von Vielecks-Aufgaben; der nächste §. enthält aber noch einige besondere Gesetze für Vielecke; sie lassen sich als Erweiterungen der für Dreiecke gefundenen Gesetze betrachten. — Namentlich bei zusammengesetzteren Aufgaben ist es häufig nöthig, die verlangten Stücke nicht unmittelbar zu suchen, sondern zunächst andere Stücke der Figur zu berechnen, die sich auch aus einer zweckmäßigen Hülfsconstruction ergeben können (vgl. die folgenden Aufg. 1. 7. u. 31.);

von diesen Stücken geht man dann zu den verlangten über. Die mehr oder weniger schnelle Lösung hängt neben einer geschickten Entwicklung von der Wahl der Unbekannten und der Gesetze ab, aus denen man die nöthigen Gleichungen bildet.

Aufgabe 1. Im Δ ABC sei AB = 14'; die von A nach dem Mittelpunkte M der Seite BC gezogene Transversale AM sei 6' lang und bilde mit AC einen Winkel von 100° 24'; wie groß sind die Winkel und unbekannten Seiten des Δ ABC?



Aufl. Verlängert man AM über M um sich selbst bis N und zieht CN, so kennt man im Δ ANC zwei Seiten und einen Winkel und findet hieraus:

$\measuredangle$ ACN = 57° 27′ 53″ und
$\measuredangle$ ANC = $\measuredangle$ MAB = 22° 8′ 7″;

weiter aber: 1) AC = 5,36324′.
2) $\measuredangle$ BAC = 122° 32′ 7″.

Im Δ ABM und im Δ ABC kennt man nun zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel; aus einem dieser Dreiecke kann man daher die noch fehlenden Stücke des Δ ABC finden und erhält:

3) $\measuredangle$ ABC = 14° 59′ 30″.
4) $\measuredangle$ ACB = 42° 28′ 23″.
5) BC = 17,47936′.

Aufgabe 2. Zwei an einander stoßende Seiten eines Parallelogramms sind = a und b, der eingeschlossene Winkel ist = α; wie groß ist der Inhalt?

Antw. ab sin α.

Aufgabe 3. Zwei Winkel eines Dreiecks sind α und β, die Höhe auf der beiden Winkeln anliegenden Seite ist gleich h; wie groß sind die Seiten des Dreiecks und der Inhalt?

Antw. Die zu h gehörige Grundlinie $= \frac{h \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$, die α gegenüberliegende Seite $= \frac{h}{\sin\beta}$; die dritte Seite $= \frac{h}{\sin\alpha}$, der Inhalt $= \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha \sin\beta}$.

Aufgabe 4. Die Diagonalen eines Vierecks sind a und b und schneiden sich unter dem Winkel α; wie groß ist der Inhalt?

Antw. $\frac{1}{2}$ab sin α. — Zieht man durch die Ecken Parallelen mit den Diagonalen, so ist die Aufgabe auf Nr. 2. zurückgeführt.

Aufgabe 5. Der Umfang eines Dreiecks ist gleich a, die Winkel sind gleich α, β und γ; wie groß sind die Seiten und der Inhalt F?

Aufl. Sind x, y, z die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Seiten, so ist:

1) $x + y + z = a.$

2) $x : y : z = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$

Hieraus folgt $x = \frac{a \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$; $y = \frac{a \sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$;

$$z = \frac{a \sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}};\ F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Aufgabe 6. Eine der parallelen Seiten eines Paralleltrapezes sei $= a$, die beiden anliegenden Winkel $= \alpha$ und β, die Höhe $= h$; wie groß ist der Inhalt?

Antw. $ah - \frac{h^2 \sin(\alpha + \beta)}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta}$; gleichviel, ob a die größere oder die kleinere parallele Seite ist.

Aufgabe 7. Die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks ist 10′ und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel sind 60° und 50°; wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

Aufl. Construirt man das Dreieck, welches die gegebene Differenz 10′ zur einen Seite und den Winkel 50° zum anliegenden Winkel hat, so sind die beiden andern Winkel 125° und 5°. Aus diesem Dreiecke findet man die dem Winkel 125° gegenüberliegende Seite und aus dieser den Inhalt:

$$F = \left(\frac{10 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 5^\circ}\right)^2 \cdot \frac{\sin 50^\circ \cdot \sin 60^\circ}{2 \cdot \sin 70^\circ} = 3118{,}21\,\square'.$$

Aufgabe 8. In einem Kreise zum Radius 100′ liegen drei gleiche Kreise, von denen jeder die beiden andern und den großen Kreis berührt; wie groß ist der Inhalt eines jeden dieser drei Kreise?

Antw. $(100 \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ)^2 \pi = 6766{,}688\,\square'$.

Aufgabe 9. Im $\triangle ABC$ ist $AB = 10'$, $BC = 16'$, $AC = 20'$. Es sei D ein Punkt in AC und $\measuredangle BDC = 77^\circ$; wie groß ist BD und der Inhalt des $\triangle ABD$?

Antw. $BD = 8{,}132455'$; $\triangle ABD = 16{,}92011\,\square'$.

Aufgabe 10. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks sei 20′, der eingeschlossene Winkel 45°, ein zweiter Winkel 80° 30′ 30″; wie groß sind die drei Seiten?

Antw. 10,956922′; 9,043078′ und 7,855255′.

Aufgabe 11. Zwei Seiten eines Dreiecks sind 550′ und 450′, der eingeschlossene Winkel 50°; wie groß die andern Stücke?

Antw. Die Winkel 77° 6′ 13″ und 52° 53′ 47″; die Seite 432,227′; der Inhalt 94798 □′.

Aufgabe 12. Die Seiten eines Dreiecks sind 600′, 700′ und 800′; wie groß sind die Winkel?

Antw. 46° 34′ 3″; 57° 54′ 36″ und 75° 31′ 21″.

Aufgabe 13. In einem Kreise liegt ein Paralleltrapez mit den parallelen Seiten a und b, und die Diagonale bildet mit diesen Seiten den Winkel α; man soll die Höhe, den Inhalt, die Diagonale, die nicht parallelen Seiten und den Radius des Kreises berechnen.

Aufl. Höhe $= \frac{a+b}{2} . \operatorname{tg}\alpha$; Inhalt $= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 . \operatorname{tg}\alpha$; Diagonale $= \frac{a+b}{2\cos\alpha}$. Die nicht parallele Seite kann man entweder aus dem Dreieck berechnen, welches eine Diagonale, a und α enthält, oder auch aus einem rechtwinkligen Dreieck, welches die Höhe zur einen Kathete hat. Man findet diese Seite $= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2\cos\alpha}\right)^2 - ab} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha}$.

Zu dieser Seite gehört der Centriwinkel 2α; daher ist

$$\text{der Radius} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}.$$

Anm. Der Mittelpunkt des Kreises hat von a den Abstand $\frac{b-a.\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha}$ und von b den Abstand $\frac{a-b.\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha}$. Die Summe dieser Ausdrücke ist die oben angegebene Höhe.

Aufgabe 14. Mit zwei Linien a und b, von denen a die größere, und dem Winkel α sind folgende Dreiecke construirt:

1) a und b sind zwei Seiten, und die zugehörigen Höhen schneiden sich unter dem Winkel α.
2) a und b sind zwei Seiten, und α ist der a gegenüberliegende Winkel.
3) b ist eine Seite, α der gegenüberliegende Winkel und a die Summe der beiden andern Seiten.
4) a ist eine Seite, α der gegenüberliegende Winkel und b die Differenz der beiden andern Seiten.
5) b ist eine Seite, α ein anliegender Winkel und a die Summe der beiden andern Seiten.
6) a ist eine Seite, α der gegenüberliegende Winkel und b die Höhe auf einem seiner Schenkel.
7) a und b sind zwei Höhen, die sich unter dem Winkel α schneiden.

8) a ist eine Seite, α ein anliegender Winkel und b die Höhe auf der α gegenüberliegenden Seite.

9) b ist eine Seite, α der gegenüberliegende Winkel und a die von der Spitze des Winkels α nach der Mitte von b gezogene Transversale.

10) α ist ein Winkel, a die Höhe auf dem einen Schenkel und b die Transversale von der Spitze des $\measuredangle \alpha$ nach dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.

11) a ist die Summe zweier Seiten, b die Höhe auf der dritten Seite und α ein dieser dritten Seite anliegender Winkel.

12) a und b sind zwei Transversalen, von zwei Ecken nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen, und α ist der Winkel, unter dem sie sich schneiden.

Man soll den Inhalt F jedes Dreiecks durch a, b und α ausdrücken.

Aufl. 1) $F = \frac{1}{2} ab . \sin\alpha$.

2) $F = \frac{1}{2} b . \sin\alpha \, [b . \cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2 . \sin\alpha^2}]$.

3) $F = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot tg \frac{\alpha}{2}$. — Bezeichnet man die den $\measuredangle \alpha$ einschließenden Seiten mit x und y, so hat man:

$$a^2 = (x + y)^2$$
$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy . \cos\alpha.$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so folgt:

$$a^2 - b^2 = 2xy (1 + \cos\alpha).$$

Es ist aber $\frac{1}{2} xy . \sin\alpha = F$.

4) $F = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot cotg \frac{\alpha}{2}$.

5) $F = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{b . \sin\alpha}{a - b . \cos\alpha}$. — Bezeichnet man die α anliegende unbekannte Seite mit x, so ist die andere $a - x$; folglich $(a - x)^2 = x^2 + b^2 - 2bx . \cos\alpha$.

6) $F = \frac{1}{2} b \, [b . cotg\,\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2}]$.

7) $F = \frac{ab}{2 \sin\alpha}$.

8) $F = \frac{a^2 b}{2 \, [b . cotg\,\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2}]}$. — Bezeichnet man den unbekannten, a anliegenden Winkel mit x, so ist $F = \frac{a^2 . \sin\alpha . \sin x}{2 . \sin(\alpha + x)}$. Nun ist $\sin x = \frac{b}{a}$, woraus $\cos x$ und dann $\sin(\alpha + x)$ zu finden ist.

9) $F = \frac{4a^2 - b^2}{8} . tg\,\alpha$.

10) $F = \frac{a}{2}\cdot[\sqrt{4b^2 - a^2} - a.\mathrm{cotg}\,\alpha]$. — Man verlängere b um sich selbst u. s. w.

11) $F = \frac{1}{2}b\,[b.\mathrm{cotg}\,\alpha \pm \sqrt{a^2 - 2ab.\mathrm{cosec}\,\alpha + b^2.\mathrm{cotg}\,\alpha^2}]$.

12) $F = \frac{2}{3}ab.\sin\alpha$.

Aufgabe 15. Ein Viereck liegt in einem Kreise und zugleich um einen Kreis; zwei gegenüberliegende Seiten sind a und b, und α ist ein der Seite a anliegender Winkel; es werden die beiden andern Seiten x und y und der Inhalt F gesucht.

Aufl. Liegt x dem $\measuredangle\,\alpha$ an, so hat man $x + y = a + b$ und

$$x^2 + a^2 - 2ax.\cos\alpha = y^2 + b^2 + 2by.\cos\alpha.$$

Die zweite Gleichung entsteht, wenn man das Quadrat der α gegenüberliegenden Diagonale doppelt ausdrückt. Man erhält

$$x = \frac{2b\,(a+b)\,.\cos\frac{\alpha^2}{2}}{a + b - (a - b)\,.\cos\alpha},\quad y = \frac{2a\,(a+b)\,.\sin\frac{\alpha^2}{2}}{a + b - (a - b)\,.\cos\alpha};$$

$$F = \frac{ab\,(a+b)\,.\sin\alpha}{a + b - (a - b)\,.\cos\alpha}.$$

Aufgabe 16. Der Inhalt eines Dreiecks ist 30□′, zwei Winkel sind 60° und 66°; wie groß ist die Höhe auf der dem $\measuredangle$ 60° gegenüberliegenden Seite?

Antw. 7,155735′.

Aufgabe 17. Zwei Seiten eines Vierecks sind a und b, der eingeschlossene Winkel ein rechter; der andere der Seite a anliegende Winkel ist α, und das Viereck liegt in einem Kreise; wie groß sind die beiden andern Seiten und der Inhalt?

Aufl. Sind x und y die resp. a und b gegenüberliegenden Seiten, so ziehe man durch den einen Endpunkt von b eine Parallele mit x, durch den andern eine Parallele mit y. Man erhält:

$$x = a.\sin\alpha - b.\cos\alpha;\quad y = a.\cos\alpha + b.\sin\alpha;$$

der Inhalt $= \frac{a^2 - b^2}{4}\,.\sin 2\alpha + ab\,.\sin\alpha^2$.

Aufgabe 18. Ein Winkel eines Dreiecks ist 70°, eine anliegende Seite 10′ und die Höhe auf der dem Winkel gegenüberliegenden Seite 6′; wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?

Antw. 29,458524□′.

Aufgabe 19. Der Radius eines Kreises ist 10′ und ist um 5′ über die Peripherie verlängert; vom Endpunkt der Verlängerung ist eine Secante durch den Kreis gelegt, welche mit dem verlängerten

Radius einen Winkel von 30° bildet. Wie groß ist diese Secante, und wie groß ihr äußerer Theil?

Antw. 19,604758′ und 6,376003′.

Aufgabe 20. Im $\triangle ABC$ sei $AB = 24'$, $\measuredangle A = 36°$ und $\measuredangle B = 100°$; wie groß ist der Radius des eingeschriebenen Kreises?

Antw. 6,127477′. — Ist M der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, so drücke man den Inhalt des $\triangle ABM$ zweimal aus.

Aufgabe 21. Die Seiten eines Dreiecks sind 10′; 4′ und 8′; welchen Winkel bildet die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Seite 8′ und der gegenüberliegenden Ecke mit der Höhe auf derselben Seite?

Antw. 54° 6′ 18″. — Man findet $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{21}{11}}$.

Aufgabe 22. Zwei neben einander liegende Seiten eines Vierecks sind 8′ und 6′, der eingeschlossene Winkel = 90°; die beiden andern Seiten bilden mit der dem Winkel 90° gegenüberliegenden Diagonale ein gleichseitiges Dreieck; unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Diagonalen?

Antw. 84° 3′ 43″.

Aufgabe 23. In einem Kreise zum Radius 20′ sei ein Bogen $AB = 6'$; man soll die Verbindungslinie x des Punktes B mit dem Mittelpunkte des Radius MA ohne Hülfe der Logarithmentafeln auf 10 Decimalstellen genau berechnen.

Aufl. 1) $x^2 = 400 + 100 - 400 . \cos 0,3.$

$$2)\quad \cos 0,3 = 1 - \frac{0,3^2}{2!} + \frac{0,3^4}{4!} - \frac{0,3^6}{6!} + \frac{0,3^8}{8!} - + \ldots$$

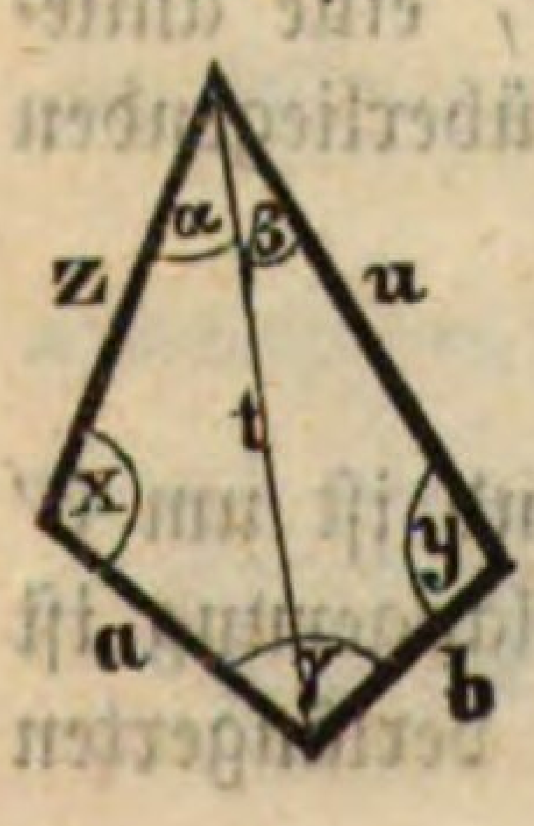
Man erhält $x = 10,8565834565'$.

Aufgabe 24. Die Pothenot'sche Aufgabe (vergl. §. 176.) Zwei neben einander liegende Seiten a und b eines Vierecks, der eingeschlossene Winkel γ und die beiden Winkel α und β, welche die durch den Scheitelpunkt von γ gehende Diagonale mit den unbekannten Seiten bildet, sind gegeben; man soll die anderen Stücke berechnen.

Aufl. Aus 1) $a : t = \sin \alpha : \sin x$

2) $t : b = \sin y : \sin \beta$ folgt:

$a : b = \sin \alpha . \sin y : \sin \beta . \sin x$; daher:



$$3)\quad \sin y = \frac{a . \sin \beta}{b . \sin \alpha} . \sin x.$$

Es ist aber $x + y = 360° - \alpha - \beta - \gamma$ und bezeichnet man $360° - \alpha - \beta - \gamma$ durch δ, so ist $y = \delta - x$; folglich

aus 3): $\sin(\delta - x) = \frac{a \cdot \sin\beta}{b \cdot \sin\alpha} \cdot \sin x$, oder

$$\sin\delta \cdot \cos x - \cos\delta \cdot \sin x = \frac{a \cdot \sin\beta}{b \cdot \sin\alpha} \cdot \sin x.$$

Dividirt man durch $\sin\delta \cdot \sin x$, so folgt:

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\delta + \frac{a \cdot \sin\beta}{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\delta}.$$

Zur logarithmischen Berechnung setze man

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a \cdot \sin\beta}{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\delta}, \text{ so ist } \operatorname{cotg} x = \frac{\cos(\delta - \varphi)}{\sin\delta \cdot \cos\varphi}.$$

Man rechnet also in dieser Folge:

$$\delta = 360° - \alpha - \beta - \gamma; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a \cdot \sin\beta}{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\delta};$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos(\delta - \varphi)}{\sin\delta \cdot \cos\varphi}; \qquad y = \delta - x;$$

$$z = \frac{a \cdot \sin(\alpha + x)}{\sin\alpha}; \qquad u = \frac{b \cdot \sin(\beta + y)}{\sin\beta};$$

$$t = \frac{a \cdot \sin x}{\sin\alpha}.$$

Anmerk. Man kann auch auf folgende Weise verfahren:

Aus 3) folgt $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a \cdot \sin\beta}$, und setzt man nun

$$(1.) \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a \cdot \sin\beta}, \text{ so ist}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi}, \text{ oder } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\psi}{\sin(90° - \psi)}; \text{ folglich:}$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin\psi - \sin(90° - \psi)}{\sin\psi + \sin(90° - \psi)}; \text{ hieraus nach Formel XXIII.:}$$

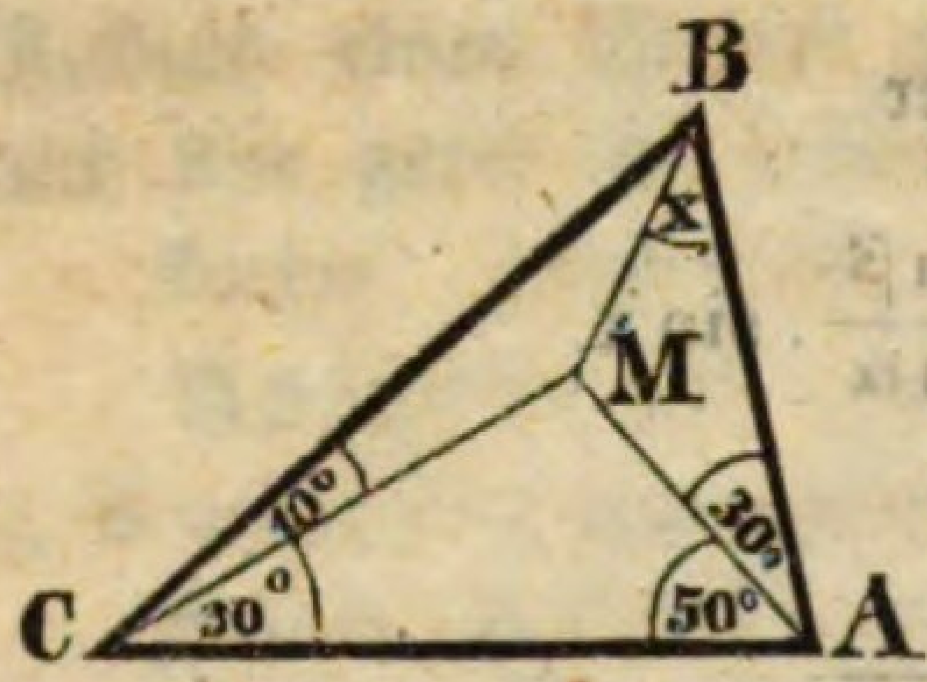
$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} : \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \operatorname{tg}(\psi - 45°) : \operatorname{tg} 45°; \text{ also:}$$

$$(2.) \quad \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{tg}(\psi - 45°).$$

Hieraus findet man $\frac{x-y}{2}$, weil $\frac{x+y}{2}$ bekannt ist, und kann also x und y berechnen.

Aufgabe 25. Ein Dreieck ist durch eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel α und β gegeben; man soll in c einen Punkt bestimmen, dessen Abstände von den beiden andern Seiten sich zu einander wie diese Seiten verhalten.

Aufl. Der Abstand des Punktes von der Spitze des $\measuredangle\alpha$ ist $= \frac{c \cdot \sin\beta^2}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2}$.



Aufgabe 26. Im $\triangle ABC$ ist $\measuredangle A = 80°$ und $\measuredangle C = 40°$. Von den Ecken aus gehen nach einem Punkte M innerhalb des Dreiecks gerade Linien, und die Lage von M ist durch die Winkel $MAC = 50°$ und $MCA = 30°$ gegeben; welchen Winkel x bildet MB mit AB?

Antw. $40°$. — Man drücke die Verhältnisse $MA : MB$, $MB : MC$, $MC : MA$ trigonometrisch aus und setze sie zusammen. — Nimmt man $\measuredangle BAC = 70°$ (statt $80°$), läßt aber die anderen gegebenen Winkel unverändert, so wird $\measuredangle x$ ebenfalls gleich $40°$.

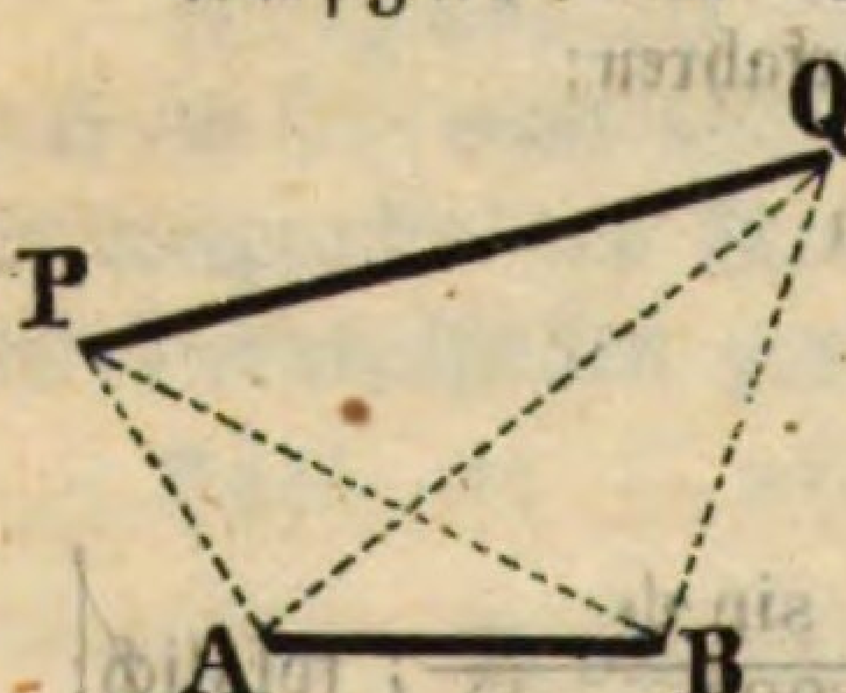
Aufgabe 27. In einem Dreieck, dessen Inhalt $100\square'$ ist, verhalten sich zwei Seiten zu einander wie $4:5$, und die gegenüberliegenden Winkel wie $1:2$; wie groß ist die der Verhältnißzahl 4 zugehörige Seite?

Aufl. Bezeichnet man die beiden Seiten durch $4y$ und $5y$, die Winkel durch x und $2x$, so hat man

$$\sin x : \sin 2x = 4:5 \text{ und } 10y^2 . \sin(180° - 3x) = 100.$$

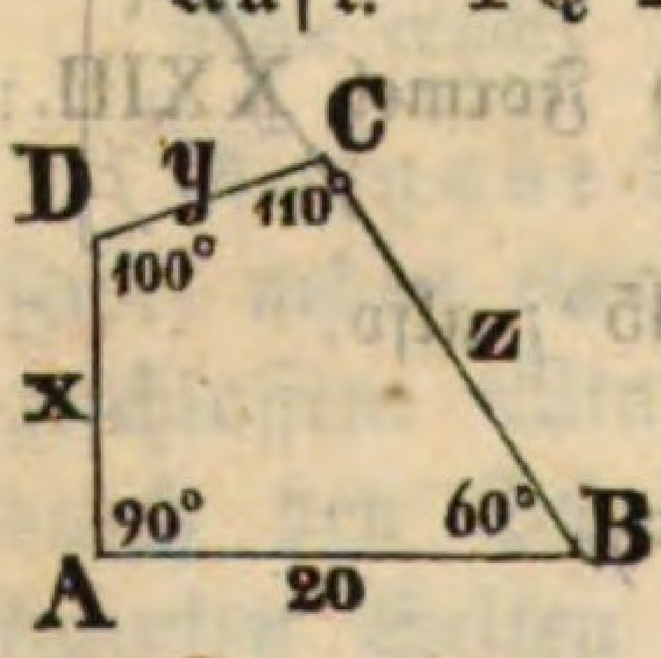
Es ist $4y = 19{,}08875'$.

Aufgabe 28. Die Entfernung PQ zweier unzugänglichen Punkte P und Q von einander mit Hülfe einer Standlinie AB zu ermitteln, welche $1000'$ lang ist, und von deren Endpunkten aus man folgende Winkel gemessen hat:



$$\measuredangle BAP = 110°, \measuredangle BAQ = 35°, \measuredangle ABQ = 100° \text{ und } \measuredangle ABP = 30°.$$

Aufl. $PQ = 1408{,}537'$.



Aufgabe 29. Eine Seite eines Vierecks sei $20'$, die beiden anliegenden Winkel $90°$ und $60°$ und der dem letzteren gegenüberliegende Winkel $100°$; der Inhalt des Vierecks sei $200\square'$; es sollen die drei unbekannten Seiten berechnet werden.

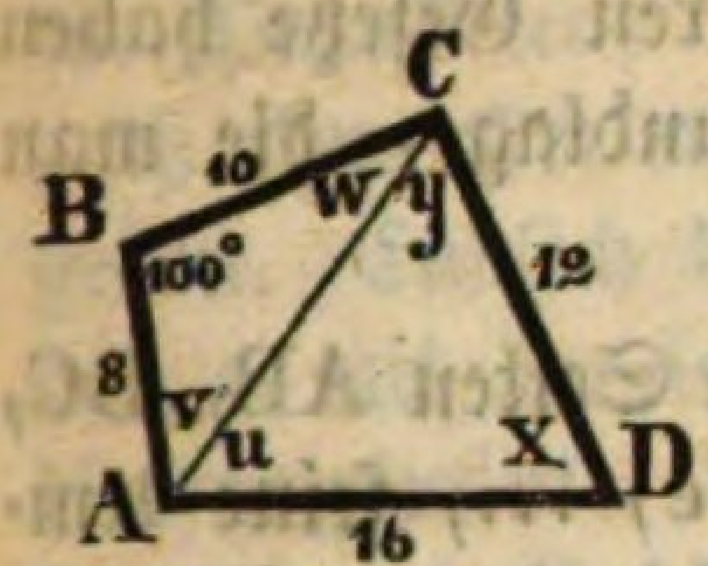
Aufl. Denkt man sich AD und BC bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängert, so erhält man durch Subtraction zweier Dreiecke:

$$\frac{400 . \sin 60° . \sin 90°}{2 . \sin 30°} - \frac{y^2 . \sin 70° . \sin 80°}{2 . \sin 30°} = 200 \text{ und hieraus:}$$

$$y = \sqrt{\frac{800 . \cos 45° . \sin 15°}{\sin 70° . \sin 80°}} = 12{,}57815'.$$

Um x und z zu berechnen, ziehe man durch C und D Parallelen mit resp. DA und AB. Man findet:

$$z = 40 - 2y . \cos 10° = 15{,}22587' \text{ und } x = z . \sin 60 - y . \sin 10° = 11{,}00182'.$$

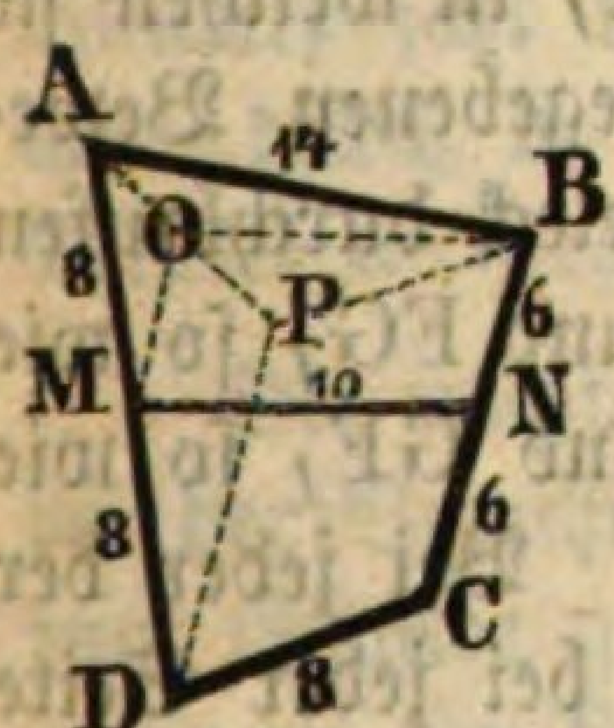


Aufgabe 30. Ein Viereck ABCD hat die Seiten 8', 10', 12' und 16'; der von den Seiten 8' und 10' eingeschlossene Winkel ist 100°; wie groß sind die andern Winkel?

Aufl. Zieht man die Diagonale AC, so kann man △ABC aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, dann △ACD aus drei Seiten berechnen. Man findet $v = 45° \; 19' \; 35''$; $w = 34° \; 40' \; 25''$ und $AC = 13{,}848536'$; dann $u = 46° \; 43' \; 30''$; $y = 76° \; 6' \; 39''$ und $x = 57° \; 9' \; 51''$; daher $v + u = 92° \; 3' \; 5''$; $w + y = 110° \; 47' \; 4''$.

Aufgabe 31. Es sind die vier Seiten eines Vierecks ABCD gegeben, und die Verbindungslinie NM der Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seiten; man soll ohne Hülfe der Logarithmentafeln den Inhalt des Vierecks ABCD berechnen. Es sei AB = 14', BC = 12', CD = 8', DA = 16' und NM = 10'.

Aufl. Construirt man das Parallelogramm BCDP, verbindet P mit A, halbirt AP in O und zieht noch BO und MO: so ist MNBO auch ein Parallelogramm. Die Berechnung kann nun in folgender Weise geschehen:



1) Im △ABP sind zwei Seiten und die Transversale von dem gemeinschaftlichen Endpunkt beider nach dem Mittelpunkt der dritten Seite gegeben. Man berechne den Inhalt des △ABP (indem man BO über O um sich selbst verlängert und den Endpunkt der Verlängerung mit A verbindet), die Seite AP (§. 68. I.), den cos. des Winkels APB (§. 240. III.) und aus demselben auch noch den sin. dieses Winkels. Alle gefundenen Werthe bringe man auf die einfachste Form, ohne aber vorkommende irrationale Wurzeln wirklich auszuziehen.

2) Im △APD kennt man jetzt die 3 Seiten; man berechne den Inhalt nach §. 185. I., und dann noch den cos. und sin. des Winkels APD.

3) Im ⧺BCDP sind die Seiten bekannt, und der sin. des Winkels BPD ist aus Nr. 1) und 2) zu finden; nämlich mit Hülfe der Formel §. 214. IX. aus $\sin BPD = -\sin(APB + APD)$. Man erhält daher den Inhalt des ⧺BCDP aus §. 242. Aufg. 2.

4) Wenn man endlich △ABP, △APD und ⧺BCDP addirt, so folgt:

$$\triangle ABCD = \tfrac{98}{15}\sqrt{39} + \tfrac{11}{5}\sqrt{1079} = 113{,}06655 \, \square'.$$

Von den Vielecken.

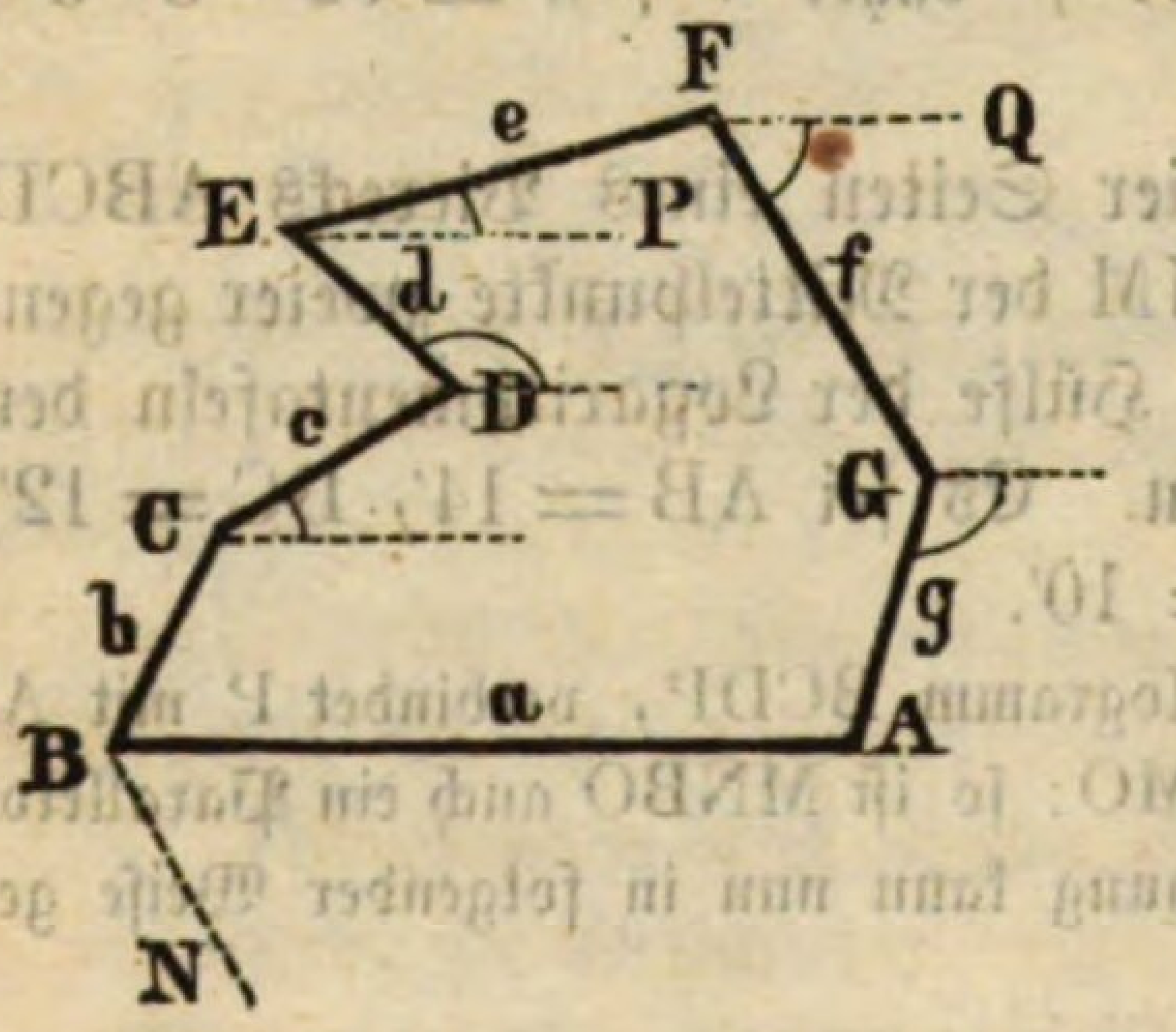
§. 243.

Erklärung.

Die Gesetze der Trigonometrie lassen sich erweitern, indem man aus ihnen analoge Gesetze für Vielecke ableitet, welche dann den

Inhalt der Polygonometrie bilden. Die letzteren Gesetze haben eine besondere Art der Winkelbestimmung zur Grundlage, die man zu ihrem Verständniß festhalten muß.

1) Es sei ABCD... ein beliebiges Vieleck; seine Seiten AB, BC, CD, DE, EF... bezeichnen wir mit a, b, c, d, e, ..., seine Umfangswinkel durch ab, bc, cd, de, ... Von einer Ecke A aus können wir den Umfang des Vielecks nach zwei Richtungen hin durchlaufen: entweder von A nach B, C, D u. s. w., oder von A nach G, F, E u. s. w. Diese Richtungen nennen wir entgegengesetzte und unterscheiden sie auch bei jeder einzelnen Seite: also bei a die Richtung AB von der Richtung BA, bei b die Richtung BC von der Richtung CB, u. s. w. In Bezug auf zwei oder mehr Seiten nennen wir diejenigen Richtungen gleiche, in welchen sie bei einer der angegebenen Bewegungen um das Vieleck durchlaufen werden. So sind z. B. in Bezug auf a und f: AB und FG, so wie auch BA und GF gleiche Richtungen; hingegen AB und GF, so wie BA und FG entgegengesetzte Richtungen dieser Seiten. Bei jeder der beiden Bewegungen um das Vieleck unterscheiden wir bei jeder Seite einen ersten und einen zweiten Endpunkt; z. B. bei der Bewegung von A nach B, C u. s. w. ist B der erste Endpunkt von b, C von c, D von d, u. s. w. Bei der entgegengesetzten Bewegung sind diese Punkte die zweiten Endpunkte.



2) Neben den Umfangswinkeln, deren Bezeichnung schon angegeben, bezeichnen wir noch die Winkel, welche eine Seite, z. B. a, mit den Seiten c, d, e, ... bildet, resp. durch ac, ad, ae, u. s. w. In Beziehung auf diese Winkel halte man aber folgende Erklärung fest: Eine der beiden angegebenen Richtungen vorausgesetzt (in der Figur die Richtung ABCD...), zieht man durch den ersten Endpunkt jeder Seite eine Parallele mit der entgegengesetzten Richtung von a (also mit BA, nicht mit AB) und versteht nun unter ac, ad, ae, ... die Winkel, welche resp. c, d, e, ... mit diesen Parallelen bilden. Diese Winkel sind positiv in Rechnung zu bringen, wenn sie oberhalb der Parallelen liegen, negativ, wenn sie unterhalb liegen. Nun bildet aber jede der Linien c, d, e, ... mit der zugehörigen Parallelen zwei Winkel, einen concaven und einen convexen, und der eine liegt immer oberhalb, der andere unterhalb

der Parallelen; man kann also beliebig einen dieser Winkel nehmen, muß ihm aber auch das seiner Lage entsprechende, richtige Vorzeichen geben. Endlich dehnt man diese Erklärung auch auf den Winkel aus, den a mit der letzten Seite g bildet, und versteht unter ag nicht den Umfangswinkel BAG, sondern den Winkel, den GA mit der Parallelen durch G bildet; dieser Winkel ist zwar seiner absoluten Größe nach dem ∡ BAG gleich; aber er ist negativ. In Bezug auf die erste Seite b bezeichnet ab den Umfangswinkel ABC, der also immer positiv ist; auch für diesen Winkel kann man aber seine Ergänzung zu 360° mit dem Vorzeichen — setzen. Nach dieser Erklärung ist z. B. ae = ∡ FEP und positiv; hingegen ist af = ∡ GFQ und negativ.

Man kann aber auch alle diese Winkel construiren, indem man die entgegengesetzte Richtung der Seiten zum Grunde legt, also die Richtung von A nach G, F, E u. s. w. Dann ergeben sich alle diese Winkel gerade entgegengesetzt, während ihre absolute Größe unverändert bleibt. Es war vorher z. B. ae ein positiver Winkel; jetzt würde F der erste Endpunkt von e sein; also müßte man durch F eine Parallele mit AB (nicht mit BA) ziehen. Der Winkel ae liegt dann unterhalb der Parallelen, ist also negativ.

Die nachfolgenden Gesetze gelten nur unter der Bedingung, daß bei der Berechnung aller Winkel ein und dieselbe Richtung der Seiten zum Grunde gelegt wird. Wir wollen immer die Richtung ABCD... nehmen; der Leser wird sich leicht davon überzeugen, daß alle Gesetze auch bei der entgegengesetzten Richtung wahr sind.

3) Endlich können wir einen Winkel, z. B. den, welchen a mit f bildet, auch dadurch construiren (und berechnen), daß wir, nicht wie vorhin von a, sondern von f ausgehen und nun durch den ersten Endpunkt von a eine Parallele mit f ziehen; wir würden dann den Winkel lieber durch fa (statt af) bezeichnen. In dieser Beziehung merke man: der Winkel fa wird dem Winkel af durchaus gleich, wenn man beide Winkel bei entgegengesetzter Richtung der Seiten construirt; nimmt man dieselbe Richtung, so wird fa dem Winkel af gerade entgegengesetzt. Es ist dies leicht einzusehen. Bei der Richtung ABCD... war af = ∡GFQ und negativ. Construirt man nun fa bei der Richtung FEDC..., so ist B der erste Endpunkt von a; man muß also durch B eine Parallele mit FG ziehen (die Linie BN). ∡ ABN ist nun = fa, und weil dieser Winkel, von f aus gesehen, unterhalb BN liegt: so ist er ebenfalls negativ. Die Gleichheit beider Winkel folgt aus der Parallelität ihrer Schenkel.

4) Durch Rechnung findet man die Winkel ac, ad, ae u. s. w. aus den Umfangswinkeln des Vielecks nach folgendem Gesetze:

Den Winkel, welchen a mit einer beliebigen Seite f bildet, erhält man, wenn man von der Summe aller Umfangswinkel, welche nach einer Richtung hin zwischen a und f liegen, so vielmal 180° abzieht, als das Vieleck noch Seiten zwischen diesen beiden Seiten hat. Hiernach ist also:

$$ac = ab + bc - 1 . 180^\circ$$
$$ad = ab + bc + cd - 2 . 180^\circ$$
$$ae = ab + bc + cd + de - 3 . 180^\circ$$
$$af = ab + bc + cd + de + ef - 4 . 180^\circ$$

u. s. w.

Diese Winkel ergeben sich durch die Rechnung positiv oder negativ, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der mit a parallelen Linie liegen.

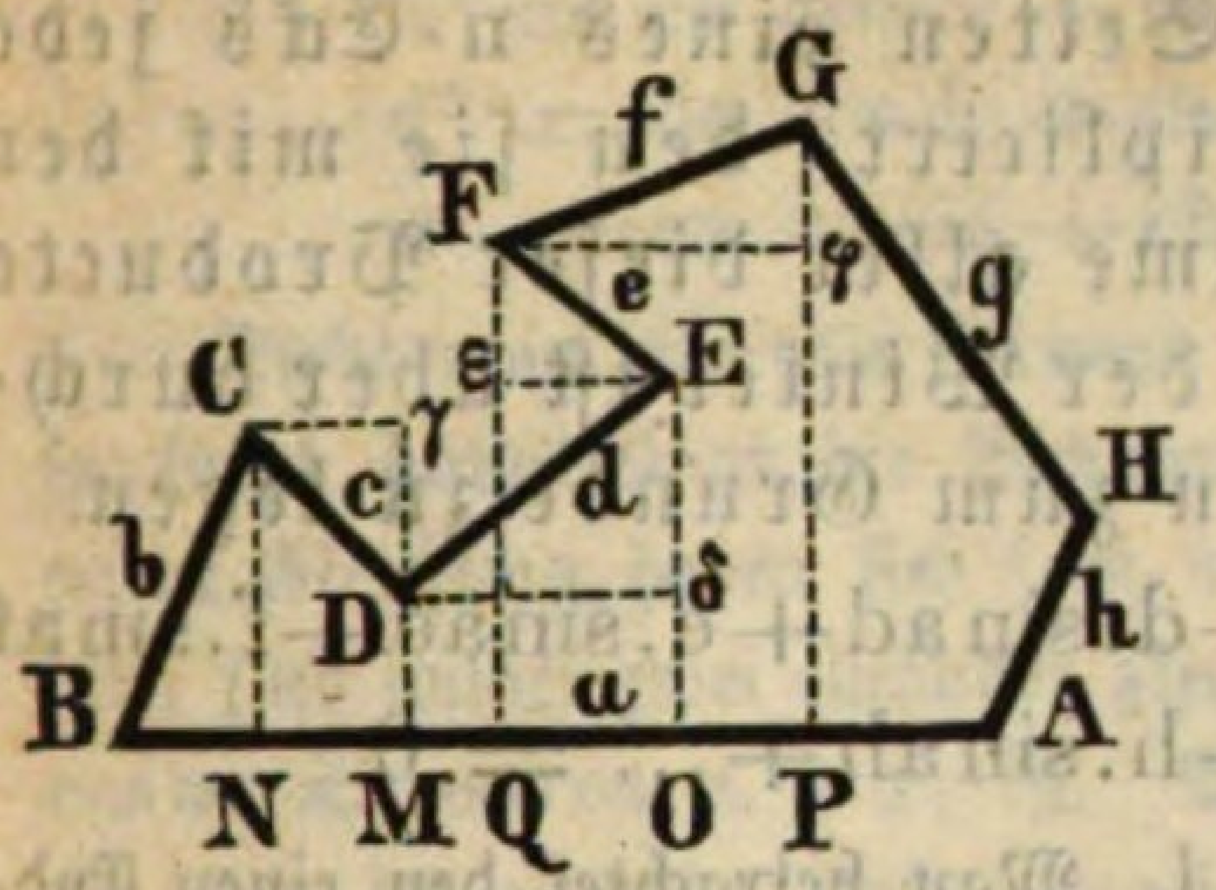
Der Beweis ist einfach und beruht darauf, daß bei parallelen Linien die Summe der inneren Winkel = 2R ist. Um z. B. ae zu berechnen, so liegen zwischen a und den mit a durch C, D und E parallel gelegten Linien 3 × 2 rechte Winkel, welche von ab + bc + cd + de abgezogen, den ∡FEP geben, welcher der Winkel ae ist. Um af zu berechnen, würde man die absolute Größe des Winkels GFQ erhalten, wenn man von 4 × 2 rechten Winkeln, welche den Seiten b, c, d, e als innere Winkel anliegen und von a und den mit a parallelen Linien (durch die Punkte C, D, E und F gelegt) gebildet werden, die Summe ab + bc + cd + de + ef abzieht. Die umgekehrte Subtraction giebt daher diesen Winkel negativ, und dies entspricht auch der Lage des Winkels af.

§. 244.

Gesetze.

I. Fällt man von irgend einer Ecke G eines Vielecks eine Senkrechte auf eine beliebige Seite a, so ist diese Senkrechte GP gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede Seite zwischen einem Endpunkte B von a und der Ecke G mit dem sin. des Winkels multiplicirt, den sie mit a bildet. Bei der Berechnung dieser Winkel ist aber die Richtung von B durch jene Seiten nach G hin als Richtung der Seiten zum Grunde zu legen.

Behaupt. $GP = b.\sin ab + c.\sin ac + d.\sin ad + e.\sin ae + f.\sin af.$



Bew. Man fälle von allen Ecken zwischen B und G Lothe auf a, ziehe noch durch jede dieser Ecken eine Parallele mit a und verlängere sie bis zum Durchschnittspunkt mit der von der nächsten Ecke auf a gefällten Senkrechten. Man drücke nun zunächst das von C gefällte Loth trigonometrisch aus, und dann jedes folgende Loth mit Hülfe des vorhergehenden. Es ist:

$CN = b.\sin ab.$

$DM = \gamma M - \gamma D = b.\sin ab - c.\sin \gamma CD = b.\sin ab + c.\sin ac.$

$EO = \delta O + E\delta = b.\sin ab + c.\sin ac + d.\sin ad.$

$FQ = \varepsilon Q + F\varepsilon = b.\sin ab + c.\sin ac + d.\sin ad + e.\sin(180^\circ - ae)$

$\quad = b.\sin ab + c.\sin ac + d.\sin ad + e.\sin ae.$

$GP = \varphi P + G\varphi = b.\sin ab + c.\sin ac + d.\sin ad + e.\sin ae + f.\sin af.$

Man erkennt leicht, daß, wenn der Winkel, den a mit einer Seite bildet, negativ concav (oder positiv convex) ist, dann der zweite Endpunkt dieser Seite in Bezug auf a tiefer liegt, als der erste. In diesem Falle ist dann immer ein negatives Product zu dem vorhergehenden Lothe zu addiren.

II. Fällt man von irgend einer Ecke G eines Vielecks eine Senkrechte GP auf eine beliebige Seite a, so ist der Abstand des Fußpunktes P dieser Senkrechten von einer Ecke B der Seite a, also BP, gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede Seite zwischen dem Endpunkte B und der Ecke G mit dem cos. des Winkels multiplicirt, den sie mit a bildet. Die Richtung der Seiten, welche man bei der Berechnung der Winkel zum Grunde legt, ist hierbei gleichgültig, weil $\cos(-\alpha) = \cos(+\alpha)$ ist.

Behaupt. $BP = b.\cos ab + c.\cos ac + d.\cos ad + e.\cos ae + f.\cos af.$

Bew. Bei derselben Hülfsconstruction, wie in I., berechne man zuerst die Entfernung des Fußpunktes des von C auf a gefällten Lothes von der Ecke B und dann die Entfernung des Fußpunktes jedes folgenden Lothes durch die Entfernung des Fußpunktes des vorhergehenden. Man erhält:

$BN = b.\cos ab.$

$BM = BN + C\gamma = b.\cos ab + c.\cos ac.$

$BO = BM + D\delta = b.\cos ab + c.\cos ac + d.\cos ad.$

$BQ = BO - E\varepsilon = b.\cos ab + c.\cos ac + d.\cos ad - e.\cos(180^\circ - ae)$

$\quad = b.\cos ab + c.\cos ac + d.\cos ad + e.\cos ae.$

$BP = BQ + F\varphi = b.\cos ab + c.\cos ac + d.\cos ad + e.\cos ae + f.\cos af.$

Man erkennt leicht, daß, wenn der positive oder der negative Winkel, den a mit einer Seite bildet, stumpf ist, dann der Fußpunkt des vom zweiten Endpunkte dieser Seite gefällten Lothes in Bezug auf den Fußpunkt des vorhergehenden Lothes nach links hin liegt. In diesem Falle ist dann immer ein negatives Product zu der Entfernung des Fußpunktes des vorhergehenden Lothes zu addiren

III. Wenn man von n — 1 Seiten eines n-Ecks jede mit dem sin. des Winkels multiplicirt, den sie mit der nten Seite bildet, so ist die Summe aller dieser Producte gleich Null. Bei der Berechnung der Winkel ist aber durchaus dieselbe Richtung der Seiten zum Grunde zu legen.

Behaupt. $b.\sin ab + c.\sin ac + d.\sin ad + e.\sin ae + f.\sin af + g.\sin ag + h.\sin ah + \ldots = 0.$

Bew. Der Satz folgt unmittelbar aus I. Man betrachtet den einen Endpunkt von a als erste Ecke des n-Ecks und zählt die Ecken so, daß der andere Endpunkt die letzte wird. Die Senkrechte von dieser Ecke auf a gefällt ist dann nach I. die linke Seite obiger Gleichung, und diese Senkrechte ist Null.

IV. Jede Seite eines n-Ecks ist gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede der anderen Seiten mit dem cos. des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten Seite bildet.

Behaupt. $a = b.\cos ab + c.\cos ac + d.\cos ad + e.\cos ae + f.\cos af + g.\cos ag + h.\cos ah + \ldots$

Bew. Der Satz folgt unmittelbar aus II. Man betrachtet wieder den einen Endpunkt B von a als erste Ecke und zählt die Ecken so, daß der andere Endpunkt die letzte wird. Die Entfernung des Lothes, welches von der letzten Ecke auf a gefällt ist (in diesem Falle Null), von B ist a selbst und nach II. auch die rechte Seite der obigen Gleichung. — Die Richtung der Seiten ist hier, wie bei II., in Bezug auf die Berechnung der Winkel wieder gleichgültig.

V. In jedem Vieleck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate aller übrigen Seiten, minus dem doppelten Product je zweier dieser Seiten, multiplicirt mit dem cos. des Winkels, den sie mit einander bilden.

Der Beweis soll für ein Fünfeck mit den Seiten a, b, c, d, e geführt werden. Er ist so einfach, daß man ihn leicht für jedes Vieleck eben so führen kann.

Behaupt. $$a^2 = \begin{cases} b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \\ -2bc.\cos bc - 2bd.\cos bd - 2be.\cos be \\ \qquad - 2cd.\cos cd - 2ce.\cos ce \\ \qquad\qquad - 2de.\cos de. \end{cases}$$

Bew. Wendet man den Lehrsatz IV. auf jede Seite des Fünfecks an, und multiplicirt man dann noch jede der fünf Gleichungen mit der Seite, welche man durch die anderen Seiten ausgedrückt hat, so entsteht:

$$a^2 = ab.\cos ab + ac.\cos ac + ad.\cos ad + ae.\cos ae$$
$$b^2 = bc.\cos bc + bd.\cos bd + be.\cos be + ba.\cos ba$$

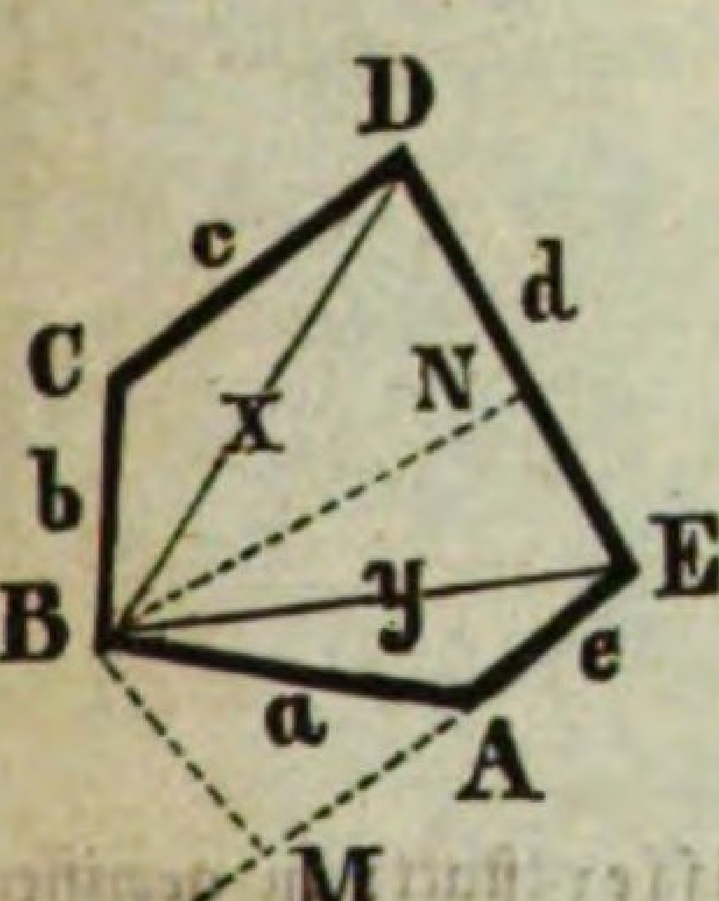
$$c^2 = cd.\cos cd + ce.\cos ce + ca.\cos ca + cb.\cos cb$$
$$d^2 = de.\cos de + da.\cos da + db.\cos db + dc.\cos dc$$
$$e^2 = ea.\cos ea + eb.\cos eb + ec.\cos ec + ed.\cos ed.$$

Zieht man nun die Summe der letzten vier Gleichungen von der ersten ab, so folgt unmittelbar die Behauptung. Alle vier Glieder der rechten Seite der ersten Gleichung heben sich fort, und von den Gliedern, welche rechts übrig bleiben, sind immer zwei einander gleich. Man beachte hierbei, daß $\cos ab = \cos ba$, $\cos ac = \cos ca$ u. s. w. ist. Allerdings sind nach §. 243. Nr. 3) die Winkel ab und ba einander entgegengesetzt, weil aus der Form der Gleichungen oben hervorgeht, daß diese Winkel im Sinne gleicher Richtungen der Seiten zu verstehen sind; aber es ist $\cos(-\alpha) = \cos(+\alpha)$.

VI. Aus n — 1 Seiten eines n-Ecks findet man seinen Inhalt, wenn man das halbe Product je zweier dieser Seiten mit dem sin. des Winkels multiplicirt, den sie mit einander bilden, und dann alle diese Producte addirt. Bei der Berechnung der Winkel ist aber durchaus dieselbe Richtung der Seiten zum Grunde zu legen.

Für das Fünfeck mit den Seiten a, b, c, d und e ist, wenn F den Inhalt bezeichnet, die Behauptung:

$$F = \begin{cases} \frac{1}{2}bc.\sin bc + \frac{1}{2}bd.\sin bd + \frac{1}{2}be.\sin be \\ \quad + \frac{1}{2}cd.\sin cd + \frac{1}{2}ce.\sin ce \\ \quad\quad + \frac{1}{2}de.\sin de. \end{cases}$$



Bew. Zieht man die Diagonalen BD und BE und bezeichnet sie resp. mit x und y, so ist:

(1.) $F = \frac{1}{2}bc.\sin bc + \frac{1}{2}xd.\sin xd + \frac{1}{2}ye.\sin ye.$

Fällt man nun $BN \perp DE$ und $BM \perp EA$, so ist:

(2.) $x.\sin xd = BN$ und $y.\sin ye = BM.$

Ferner ist nach dem Gesetz I.:

$$BN = c.\sin dc + b.\sin db.$$
$$BM = d.\sin ed + c.\sin ec + b.\sin eb.$$

Bei diesen beiden Gleichungen ist die Richtung von A nach E, D, C, ... zum Grunde gelegt; bei entgegengesetzter Richtung folgt aber auch aus den vorstehenden Gleichungen und aus §. 243. Nr. 3.:

$$BN = b.\sin bd + c.\sin cd$$
$$BM = b.\sin be + c.\sin ce + d.\sin de.$$

Setzt man nun diese Werthe für BN und BM statt $x.\sin xd$ und $y.\sin ye$ in (1.) ein, so folgt:

$$F = \frac{1}{2}bc.\sin bc + \frac{1}{2}d.(b.\sin bd + c.\sin cd)$$
$$+ \frac{1}{2}e.(b.\sin be + c.\sin ce + d.\sin de),$$

und löst man noch die Klammern auf, so ergiebt sich die Behauptung.

Setzt man an a noch ein Dreieck an, so kann man dessen Inhalt zu F addiren, und erhält den Inhalt eines Sechsecks. Der Inhalt des Dreiecks ist aber genau auf demselben Wege durch b, c, d... auszudrücken, wie der Inhalt der $\Delta\,\Delta$ BDE und BDA; man fällt wieder von B eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite. Ganz eben so kann man zum Siebeneck, Achteck u. s. w. übergehen.

Anm. Die vorstehenden sechs Gesetze sind sämmtlich Erweiterungen der für Dreiecke bewiesenen Gesetze. Die Sätze I. und II. sind die Erweiterungen der Gesetze Nr. 1) und 2) in §. 234.; die Sätze III., IV. und V. sind die Erweiterung der Gesetze I., II. und III. in §. 240; endlich ist der Satz VI. die Erweiterung der in §. 241. Aufg. 1. für den Inhalt F eines Dreiecks entwickelten Formel $F = \frac{1}{2}ab.\sin\gamma$.

Berichtigung.

Seite 39 Zeile 16 von unten lies: in dem Mangel gewisser statt: in gewissen
„ 303 „ 7 „ oben „ welche statt: welchen
„ 319 „ 10 „ unten „ 1 statt: arc 1″

Berlin, gedruckt in der Königlichen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei (R. Decker).